BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
F
4
NAPOLI

xxxiv

EVCLIDE
RESTITVTO

OVERO

GLI ANTICHI ELEMENTI GEOMETRICI
Ristaurati, e facilitati

DA

VITALE GIORDANO
DA BITONTO.

Lettore delle Matematiche nella Reale Accademia
stabilita dal RE' CRISTIANISSIMO in Roma.

NAZIONALE

LIBRI XV.

Ne i quali principalmente si dimostra la compositione delle
proportioni secondo la definitione datane
dal suo antico Autore.

IN ROMA, Per Angelo Bernabò. M. DC. LXXX.

Con Licenza de' Superiori.

ALLA SACRA, E REAL MAESTA'
CHRISTIANISSIMA
DI
LODOVICO XIV.
RE' DI FRANCIA, E DI NAVARRA

SIRE.

QVELLA vaghezza, che trà le rouine delle paterne Scuole de' Pittagorici mi venne già di applicare alle Matematiche, ſpenta ſenz'alcun dubio da vna peruerſa fortuna in me ſtata ſarebbe, ſe la Maeſtà Voſtra, intenta ad arricchire colle buone arti il Mondo tutto, agio dato non mi haueſſe di mantenerla ſempre più viua á beneficio della giouentù Franceſe in que-

ſta ſua Reale Accademia. Nella quale perciò, dopo molte fatiche da me ſoſtenute, non ſolo per ageuolar le materie con chiaro metodo, e breue, all'intelligenza de' diſcepoli poco eſperti dell'Italiana fauella; ma per dar anche fuori qualche mia particolare inuentione, mi è non sò come riuſcito di comporre alcune Opere, che partitamente la Machina tutta di così alta ſcienza diſcuoprono. Contiene la Prima, in cui le fondamenta ſi gettano, gli Elementi di Euclide, da me nella primiera lor giacitura reſtituiti, e confermati con quelle pruoue, di che ſpecialmente i principij delle Parallele, e delle Proportioni hauer biſogno fin qui ſi è creduto, ancorche la pruoua dependeſſe dagli antecedenti, e noti principij, non sò in che modo da tanti celebrati Scrittori non mai auuertita, non ſenza qualche ſcherno di Euclide, che per queſto difetto in più forme, che il fauoloſo Proteo, ſi è laſciato vedere. Hora queſti Elementi, che primi nell'ordine ſono, e primi parti del mio debile ingegno, conſacro humilmente al Nome ſempre Inuitto di V.M. ed à i raggi del ſuo profondo intendimento gli eſpongo, ch'è quan-

to dire gli eſpongo alla publica luce, quando dal ſuo gradimento quello anche dipende dell' Vniuerſo. Con queſto così tenue tributo io non preſumo però di ſatisfare, ne pure in piccio-la parte all'infinito debito, in che mi veggio coſtituito dalla ſua Regia Beneficenza; ſapen-do io bene, che appreſſo la M. V. la ſteſſa ſatisfa-tione, ſe fia gradita, riceue tanto di grazia, che ſi conuerte in debito, e che il debito ſteſſo è co-sì prezioſo, che di qualunque ſatisfatione è mag-giore. Ma poiche la preſente Opera quanto fà più apparire la ſua Verità per la mia poca in-duſtria, tanto può eſſer più eſpoſta all'odio al-trui, ed all'inuidia, io ſolamente intendo di ſta-bilirla ſotto il potentiſſimo Patrocinio della M. V. che coll'eccelſa prerogatiua di Primoge-nito della Chieſa, e di Promotor zelantiſſi-mo della Religione, quella ben giuſtamente vanta frà l'altre di perpetuo Difenſore della Ve-rità. Difenderà ella nel tempo ſteſſo la Mate-matica tutta, la quale dalla Verità de' ſuoi prin-cipij appunto queſto nome à tutte l'altre diſci-pline commune meritare hà potuto. E difen-derà con merauiglia vniuerſale lo ſteſſo Euclide,

quaſi

quasi dalle tombe di Megara risorto, non tanto forse per vendicar le proprie offese, quanto ambizioso di viuere anch'egli con tanti Eroi Letterati sotto gli auspicij di V. M: che il presente secolo hà reso già co'suoi fatti egregij sopr'ogn'altro memorabile à posteri, e gli angoli più remoti della terra, hà con gli applausi empiuto delle sue glorie immortali. Si degni dunque la M. V. di accoglier con lieto ciglio, questa ancorche lieue dimostrazione del mio riuerentissimo ossequio; giàche (se grata non le fia, come al commodo della guerra insieme, e della pace ordinata) il riflettere in mezzo alle sue più alte occupationi alle cose più humili, non è disdiceuole à quella fortezza, che vnicamente risplende nell' animo suo, e che sola per eccellenza, fù dagl' Antichi appellata Virtù. Ed à V. M. profondissimamente m'inchino.

DI VOSTRA MAESTA'.

Humilissimo, e diuotissimo Seruo.

Vitale Giordani.

SEBASTIANO MATTEI
AL LETTORE.

LA Matematica, che Platone annouerò frà le parti primarie della ſua Philoſ ſia, hebbe in ogni ſecolo quella prima veneratione, con la quale i Sacerdoti antichi dell'Egitto s'eleuarono alle ſupreme dignità della Republica, mentre nell'Oriente, e nell'Oſtro s'apprezzaua la razionalità, ed erano tenuti, e reputati Sauij, Magbi, Bragmani, e Gimnoſophiſti quegli huomini, che dimoſtrauano le coſe per le loro cauſe formali, come de' Matematici diſſe Auerroe; e però queſta ſcienza appreſſo i Greci s'inalzò col nome di Dottrina, e Diſciplina, quaſi per Antonomaſia, che altro non voglion ſignificare le voci Matheſis, e Mathema. Eſſa laſciate le conſiderationi di buono, e male appartenenti alla morale, e gli eſtremi di materialità, ed aſtrattione proprij della Fiſica, e Metafiſica, ſi contentò della ſtrada media per dedurre, e dimoſtrare le paſſioni più importanti del ſuo obietto, ch'è la quantità, non da primi generi, ne dall'vltime formalità, ſecondo Proclo, ma da mezzi così proportionati, che le dimoſtrazioni Matematiche non poſſono contradirſi per la loro euidenza; e fù forzato Platone à dire, che haueua queſta Dottrina ſortito vna ottima, e perfetta natura; ed Ariſtotele, emulo della ſetta Megarenſe, quando volle ridurre à perfettione la ſua Filoſofia rationale, altro non fece, che vna Matematica delle operazioni intellettiue, dirette, e refleſſe; e mentre procuraua sfuggire la materia, inciampò nella forma della ſcuola contraria, per verificarſi la dottiſſima cenſura di Filone, qui Mathematicam appellauit ſcientiam vniuerſalem, quod hæc rerum intelligibilium imagines, verique veſtigia tanquam in Polytiſſimo Speculo demonſtret, mentemque purgatam paulatim abducat à ſenſu. *Quindi è, che gli Aſſirij colle figure Geometriche, e Pitagora co'i numeri, procurauano ſciogliere i Fenomeni più difficili, e gli arcani della natura; e Platone ſcriſſe in modo Matematico la ſua Filoſofia; anche la parte Morale, e Politica, & i libri della Republica.*

Auer. 1. phiſ.com. 1.

Lib. 1. cap. 1. ſup. 1. Eucl.

Eraſm. in Adag.

L'origine di queſta ſcienza fù creduto nell'Egitto, ed è fama, che Talete Mileſio la traſportaſſe in Grecia da quella celebre Prouincia,

doue

doue ò per la potenza della Monarchia, ò per l'inclinazione de' Prencipi, che fauoriuano i Matematici con honori, e ſtipendij, ò ſia per la neceſſità de' Popoli coſtretti à profeſſare la Geometria per l'inondationi del Nilo, fiorì più che in neſſuna altra parte del Mondo; però il Filoſofo di Stagira credeua, non ſenza improbabilità, che anco le ſcienze, come le più coſe dell'Vniuerſo, ſi riuolgeſſero col moto del primo mobile, e gli parue facile ſapere le loro vltime digreſſioni, e difficiliſſimo affermare coſa di certo nelle ſue prime progreſſioni, quantunque molti habbiano ſcritto degl'inuentori dell'arti, e delle ſcienze; quaſi nel ſuo ſenſo dieeſſe, che hebbero principio, e col Mondo, e col moto. E ſù ſententza di Socrate, poiche tutte le Dottrine, principalmente le Matematiche riſiedono nella parte cogitatiua dell'anima, ſe è vera la Filoſofia Pitagorica, e Platonica, che il ſapere ſia ricordarſi l'huomo delle ſue ragioni, e così ſempre, ch'il Mondo ſù popolato d'huomini, è credibile foſſe anche adornato, ed arricchito di ſcienze, le quali ſono, ſenza dubio, proportionate all'intelletto, perche la verità conſiſte in vna ſola conformità indiuiſibile dell'atto all'obietto, ancorche il modo ſia lungo, e diffuſo, comparato alla breuità della noſtra vita. Nè diſcorda queſta Dottrina dalle communi opinioni, mentre tutti i Dottori di Santa Chieſa, e più interpreti delle ſacre carti affermano, ch'il noſtro primo Padre ſù dottiſſimo in qualunque ſcienza, dal quale ſi trasfuſe ne i ſucceſſori, tanto che i figlioli di Seth, nepoti di Adamo, laſciarono le figure Aſtronomiche auanti del diluuio impreſſe in due colonne, e rimaſero le veſtigie ſino à tempi di Gioſeppe Hebreo. Da quì è che i Chaldei, Meſopotamij, ed Aſſirij furono nelle Matematiche peritiſſimi in guiſa tale, che Ariſtotele altro non impoſe à Calliſtene ſuo familiare, il quale diede per compagno ad Aleſſandro mentre partiua per l'Aſia, ſe non che gli traſmetteſſe dagli Archiuij di Babilonia, quando foſſe eſpugnata quella Città, tutte le Aſtronomiche oſſeruazioni de' Caldei, che ſi trouarono fatte per lo ſpatio di trè mila nouecento, e trè anni. Gli Egitij finalmente nell'Africa ſi conobbero deuoti, ed in vn certo modo ſuperſtitioſi de' Matematici, ne contenti delle dimoſtrazioni de i Rè, inalzarono ne i tempij, ed altri luoghi publici, ò ſcolpito, ò dipinto l'animale Orige, ch'era figura del Matematico.

Ne pare improbabile, che dall'Aſia, e dall'Africa ſi transfondeſſe nell'Europa, doue ſimilmente queſta ſcienza ſù venerata come Diuina, non che profeſſata, e ſeguita come humana, ed i Matematici ſtimati felici, e più che huomini, cantò Ouidio nel primo de' faſti.

1. de Cel.

Soer. in Memnone.

Hypoc. ſec. 1. aph. 1.

Ioſep. lib. 1. antiq. Iud. cap. 3.

P. Ramus lib. 1. proem.

Pier. Valer. lib. 10. pag. mihi 90.

Feli-

Felices animæ, quibus hæc cognoſcere primis,
Inque domos ſuperas ſcandere, cura fuit.
Credibile eſt, illos pariter vitijſque, iociſque
Altius humanis exſeruiſſe caput.

Ma che Talete Mileſio foſſe il primo Geometra frà gli Aſſirij mi pare difficiliſſimo, ed improbabile, perche Euforbo Frigio, e Palamede Greco, che fioriuano nel tempo della guerra Troiana, laſciarono in carte non poche opere piene di figure Geometriche; e Talete viſſe dopo centenaia d'anni intorno al 580. auanti la noſtra redentione; e ben vero che de i primi, ò per l'ingiuria de' tempi, ò per l'incuria de i Scrittori, non ſi legge, che haueſſero ſeguaci, come Talete, il quale fù imitato da Pitagora Samio, Anaſſagora, Clazomene, e ſucceſſiuamente da i migliori Filoſofi del Peloponeſſo ſino al ſecolo d'Euclide, che riduſſe la Matematica à tutta perfettione.

Di queſto Autore dubitano, ed anco ne fanno lunghe diſcuſſioni i Commentatori, ſe fù il Prencipe della Setta Megarenſe, ò altro Geometra celebre negli anni ſeguenti, perche del Megarenſe ſi sa, che nell'infantia d'Aleſandro occupò la Catedra ad Ariſtotele, quando paſſaua legato degli Atenieſi in Perſia, e del Matematico ſi legge, che fù familiare à Tolomeo primo Rè d'Egitto, ma in venticinque, ò trenta anni ſoli di differenza non sò per qual ragione non poſſa eſſere il medeſimo giouane nel tempo d'Aleſsandro, ed antiano in quel di Tolomeo; in qualunque modo, eſſo fù il Geometra più inſigne frà tutti quelli, de' quali rimane la memoria nella noſtra età. S'accorſe che Socrate Geometriam diſcendam eſſe aiebat, donec quis poſſit, & vſus ita ferat; *che Platone non accettaua diſcepolo alcuno nell'Accademia auanti d'hauer inteſo i principij Geometrici, per li quali paſſauano tutti i Filoſofi della Grecia come per conſuetudine antica, e compreſa la neceſſità della Matematica, ò moſso dal delettabile della parte ſpeculatiua, e dall'vtile della prattica, s'affaticò à cercare vn modo, che nè la rendeſſe oſcura per la breuità, ne improportionata per la diffuſione, e lo trouò tale, che domandato dal Rè Tolomeo ſe vi era altra ſtrada più breue, e più facile, riſpoſe,* Nullam eſſe aliam viam regiam. *Conobbe che l'Aritmetica, e la Geometria ſono le parti principali della Matematica, e che per meritar nome di Matematico è neceſsario eſser buon Geometra, e dimoſtrare geometricamente tutte le coſe, che cadono nell'arte, e però ſenza ſparmiar fatica ſcielſe quelle dimoſtrazioni, che conducuano al ſuo fine, con tale artificio, che ſe vna ſola ne mancaſse, precipita-*

pitarebbe il bello, ed ammirabile di queſto Coloſſo, mentre ſi ſcorgono le ſuſſeguenti coſe concatenate con l'antecedenti, che mal potrebbe la terza ſenza la ſeconda, e queſta ſenza la prima dimoſtrarſi.

E ancorche quaſi tutti dopo d'Euclide ſtudiarono di trouare nuoui modi, ò inuertendo l'ordine de' libri, ò tralaſciando alcune propoſizioni, e reducendole à Corollarij, ò aggiungendone delle nuoue, non oſtante è certiſſimo, che queſti huomini inſigni hanno arricchito di belliſſimi penſieri le buone lettere, ma non sò ſe apportano vtile ſi grande agli ſtudioſi, come s'eſperimenta dagl'Elementi d'Euclide. Eſſi ritengono quella ammirabile diſpoſizione, che nota Proclo, le di cui parole ſono:

Proc. ſup. 1. Eucl. cap. 5. lib. 2.

Elementaris verò ipſius peritæ Geometricarum rerum contemplationis inſtitutio inuincibilem, perfectamque habet enarrationem, *dalle definitioni, da i Poſtulati, e dagli Aſſiomi, che ſono quei ſempliciſſimi principij, ne i quali ſi fonda tutta la ſtruttura Matematica, procede alla proua di propoſizioni ſemplici, che chiama Elementi, e ſeruono come di mezzi termini per dimoſtrare le coſe più difficili, e più compoſte; e diuiſe tutta l'opera in quindici Elementi, nel primo de' quali tratta della generatione de i triangoli, e parallelogrammi, dell'vgualità degli angoli, de i lati, e loro ſuperficie; nel ſecondo dimoſtra le paſſioni, e proprietà, che accadono alla retta linea variamente diuiſa, ed aſſegna la differenza di quanto il quadrato d'vn lato del triangolo obliquangolo ſupera, ò manca da i quadrati degli altri due lati; nel terzo manifeſta le paſſioni delle rette tirate nel circolo, e degli angoli, ed archi, che contengono; nel quarto s'eſpongono l'inſcrittioni, e circoſcrittioni de' Poligoni regolari nel circolo; nel quinto compara le proportioni, che cadono frà le grandezze in genere; nel ſeſto dimoſtra le proportioni de i piani rettilinei, e loro lati, introduce la compoſitione delle proportioni, e dichiara la proportione degli archi, ed angoli ne i circoli vguali; nel ſettimo parla delle paſſioni, e proportioni de i numeri primi, e compoſti ſecondo i varij modi di miſurarſi: nell'ottauo proua varie paſſioni de' numeri proportionali, e ſimili, e de' loro lati; nel nono manifeſta le paſſioni de' numeri continui proportionali, pari, e diſpari; nel decimo le paſſioni delle quantità rationali, ed irrationali; nell'vndecimo ſpiega la generazione de' corpi ſolidi, loro ſimilitudine, e la proportionalità de i parallelepipedi; nel duodecimo fà la comparatione della proportione de' circoli à quella, che cade frà i quadrati de' loro diametri, de' ſimili Poligoni inſcritti in eſſi, e la proportionalita delle ſfere, Piramidi, Coni, e Cilindri; e nel decimoterzo aſſegna varie paſſioni, che accadono*

dono alla linea diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, fà la generazione di cinque corpi regolari, li comprende nella data ſfera, compara il diametro della ſfera à i lati de' corpi regolari iſcritti, e i medeſimi lati frà di loro. L'Elemento decimoquarto, col ſeguente, alcuni ò per la conſonanza della materia, ò per la ſimilitudine della forma, l'attribuiſcono ad Euclide, altri ad Ipſicle Aleſandrino, di che ſi parla nel principio d'eſſo libro, e nel diſcorſo ſi legge la comparatione del Dodecaedro all' Icoſaedro tanto in ſolidità, quanto in ſuperficie; e finalmente nel decimoquinto ſi vede la ſcambieuole iſcrittione de i corpi regolari frà di loro.

Sò che ſi potrebbe auanti ogn'altra coſa trattare delle proportionalità, cioè ſimilitudini delle proportioni nelle grandezze in genere facendone il primo Elemento, quaſi indipendente dagl'altri, ma ſe ſi conſidera bene la diſpoſitione data da Euclide à queſti Elementi, in niſſun' altro luogo fuorche nel quinto potcuano meglio collocarſi, ſtante che la proportionalita è del genere de' relatiui, mentre riſulta dalla comparatione di due, ò più proportioni frà loro; onde prima di ſaperſi, che coſa è quantità, e che coſa è figura, e prima di concepirſi il modo della comparatione, e la relatione frà due ſole grandezze, mal potranno ſcorgerſi le proportionalità, che frà più di due quantità accadono; e perciò con grande artifitio Euclide, conoſcendo che l'intelletto humano procede da i noti à i men cogniti, da i principij alli principiati, da ſemplici à compoſti, e dagl'aſſoluti à i relatiui, prima d'ogn'altra coſa, ſpiega la generatione della quantità, e delle figure più ſemplici, e comparandone due per volta, come fa ne i primi quattro Elementi, con le voci d' vguale, duplo, triplo &c. inſinua il modo della comparatione, con che viene ad introdurre vna certa abilità à poterſi poi più facilmente concepire la natura delle altre relationi meno ſemplici, come ſono le comparationi delle proportioni frà loro ſpiegate nel quinto Elemento; e ritenendo ſempre il medeſimo ordine, nel ſeſto Elemento introduce la compoſitione delle proportioni, ed in queſta forma dalla comparatione frà due ſole quantità, che è la ſempliciſſima, paſſa alla comparatione delle proportioni frà loro, che è la meno ſemplice, e da queſta s'inoltra alla compoſitione delle proportioni, che è la compoſta. Del medeſimo modo il ſettimo Elemento, che pare ſi regga da per ſe, non poteua occupare altro luogo, ò perche regge i ſeguenti Ottauo, Nono, e Decimo, ò perche i numeri, che poſſon conſiderarſi come linea, ſuperficie, e corpo, ſono medij di participatione frà piani, e ſolidi, e douenano frà eſſi con-

ſtituir-

ſtituirſi, e collocarſi; quindi è che l'Vndecimo, e Duodecimo; ancorche dipendano da i primi ſei, e non da i quattro intermedij, ſi ſerbarono all'vltimo, e riuſcì felicemente per la commodità di continuare il trattato de' ſolidi ne i libri conſecutiui.

E però il Signor Vitale Giordano, Autore di queſt'Opera, Geometra celebre frà i migliori della noſtra età, dopo lunghe fatiche fatte nello ſpatio di ventiquattr'anni, hauendo aggiuſtato vn Corſo Matematico, oue pienamente ſi tratta non ſolo la parte Teorica, però anche la prattica vtiliſſima alle indigenze della vita humana, gli parue in queſto primo Tomo degli Elementi ſeguitare il bell'ordine d'Euclide, col quale il Megarenſe ſi reſe ammirabile al Mondo, come diſſe Proclo:

Procl. ſup. 1. Eucl. lib. 2. cap. 5. Præcipuè verò circa Geometricam elementorum inſtitutionem eum quiſpiam admirabitur propter ordinem, & electionem eorum, quæ per elementa diſtribuit theorematum, atque problematum; etenim non ea aſſumpſit omnia, quæ poterat dicere, ſed ea dumtaxat, quæ elementari tradere potuit ordine. *E perche ne anche nel nome diſcrepaſſe dal ſuo Anteſignano, volle al volume dargli quello d'Euclide reſtituto, hauendolo reſtituito al ſuo priſtino ſplendore, e con tal chiarezza, e facilità ſpiegato, che ogni principiante potrà goderlo ſenza interpretatione di Maeſtro alcuno. Del Signor Vitale, ſenza adulazione può dirſi;* Quod totam artem prudentiſſimè, ac planiſſimè tractatam, admirabili, ac penè diuina demonſtrandi facilitate complectatur. *Vedonſi ſpeſſi luoghi appartenenti ad altre parti della Filoſofia addotti con ogni grauità, ornati d'eleganze, sfugge ſempre la temeraria conſuetudine di biaſimare i Scrittori, anzi loda i celebri, e compatiſce i deboli, & adducendo le ſue ragioni, perſuade colla verità più toſto, che con artificio; non dice tutto quello, che poteua dire, ne tralaſcia tutto ciò, che altri hanno tralaſciato, ma ben sì adduce quel che appartiene alla materia d'Elementi. Rimuoue affatto tutti i principij, che non ſono per ſe noti, ò che non poſſono ſenza immenſa fatica dimoſtrarſi, come improprij dell'inſtituto Matematico; commuta la definitione delle parallele in altra atta à ſpiegare la loro propria natura; dimoſtra qual poſitione debbano hauere le rette, che diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate in infinito mai ſcambieuolmente s'auuicinano, ne ſi ſcoſtano, e dopo la propoſizione 26. del primo Elemento, comparando la linea retta alla curua, e conoſcendo eſſer impoſſibile, che vna retta ſia parallela ad vna curua, ſenza turbare in coſa alcuna l'ordine d'Euclide, con quel ſolo principio dimoſtra tutti gli Elementi delle*

paral-

parallele, proua il poſtulato, ch'è quinto in Proclo, Campano, e Commandino, ed aſſuma 13. nel commento di Clauio. Conuince le oppoſizioni fatte ad Euclide ſopra i principij della proporzione, e ſoſtenendo la 6. definizione del quinto Elemento, dimoſtra, che ſi danno quattro grandezze in natura, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicazione, e preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, parimente ſecondo qualunque multiplicazione, ſempre gli vguali multiplici della prima, e terza, ò ſuperano, ò ſono vguali, ò minori degli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; e riuoltoſi al principio, che riguarda la compoſizione delle proportioni, materia, ò non toccata ò infelicemente trattata dagli altri, dopo la decima ottaua propoſizione del ſeſto Elemento, dimoſtra, che di quante grandezze ſi vogliano la proportione della prima all'vltima è compoſta delle proportioni intermedie, e dopo facilmente conuince, che di quante grandezze ſi vogliano continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice della proportione della prima alla ſeconda per vno meno il numero dei termini continui proportionali.

Alla publicazione di queſta vtiliſſima opera reſiſteua inuincibilmente la naturale modeſtia dell'Autore, ma non meno le di lui grauiſſime occupazioni cagionateli dalla quotidiana lettura priuata in ſua caſa, e publica nella Reale Accademia ſtabilita dal Rè Chriſtianiſſimo in Roma, le quali non laſciandolo vn momento di tempo reſpirare, non che à poterſi impiegare in altra coſa di rilieuo, giuſtificauano la ſua impoſſibilità di attender alla perfettione di queſt'opera neceſſaria, come eſſo diceua, per poter'vſcire alla ſtampa. Ma non ceſſando io di combattere colla mia importunità la di lui renitenza, l'induſſi alla fine à cedere al mio deſiderio, anzi al publico beneficio; l'ottenni però con vna condizione à me indeſpenſabilmente da lui preſcritta, di douermi io preciſamente prender la cura, ed il peſo di darle quell'vltima perfettione, la quale eſſo ſtimaua neceſſaria per la ſtampa, e per la quale ſi dichiaraua inhabilitato dalle predette ſue occupazioni. Conoſcendo però io eſſere queſt'opera già ridotta dall'Autore à ſegno, che poco, anzi nulla vi mancana per quella perfetta forma, che eſſo richiedeua, accettai di buon'animo l'incumbenza, la quale perciò da me facilmente adempiuta, ſtabilì in poco tempo la publicazione di queſt'opera; à queſta, ò Corteſe Lettore, per tuo maggior'vtile, e minor incommodo, volli aggiungere del mio la preſente prefazione per renderti con eſſa inſtrutto (prima di obligarti à tutta la lettura del Volume) dell'ordine, e qualità

delle

delle materie, ch'in essa si trattano, credendo io di poter ciò fare, se non più elegantemente, almeno più esattamente d'ogn'altro, sì per esser à quest'hora sopra venti anni, che come discepolo, & amico godo familiarmente della conuersazione de' suoi pensieri, e de' suoi studij, come ancora per il dett'obligo dall'Autore impostomi, e da me religiosamente adempito, di hauerla à riuedere attentamente più volte prima di consegnarla alla stampa; intorno alla quale, con l'aiuto di molti amici, ottenni ancora dall'Autore; per lo stesso fine di seruire alla maggior tua commodità, ed vtilità, che te la concedesse nel nostro volgare idioma Italiano, perche essendo questo copiosissimo, e bastante à spiegare in qualunque scienza con somma facilità, e felicità tutti i concetti del nostro intelletto; già nell'auuenire non parrà necessità miserabile, ma più tosto consuetudine antica, ò assuefattione degli huomini quella di fraudare gli anni migliori della vita allo studio della Filosofia, per impiegarli nella grammatica delle lingue Greca, e Latina.

Io non saprò spiegare l'vtile grande, che apporterà quest'opera à tutti gli affettionati alla facoltà Matematica meglio, che con le parole di Dionisio Lambino, parlando di Cicerone à Carlo Rè Christianissimo: Quantum autem ex omnibus operibus fructum percepturi simus ex eo cognoscere licet, quod ex hoc volumine tantam ad litterarum studiosos vtilitatem peruenire videamus. *Da per sè medesimo dichiara questo primo Tomo il commodo grande, che deuono apportare gli altri, quali sono già in ordine per seguire la stampa, se tù gradirai, e la buona intentione dell'Autore, e la mia passione di giouarti, e seruirti, la quale doucra scusarmi, ò farmi compatire di qualunque eccettione, che per qualsiuoglia riguardo possa mai trouarsi in quest'opera, come prouenuta per mio solo difetto, sì come deuesi alla gloria dell'Autore tutto ciò, che vi trouerai di buono. Viui felice.*

Imprimatur,

Si videbitur Reuerendiss. Patri Magistro Sacri Palatij Apostolici.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,

Fr. Raimundus Capisuccus, Sacri Palatij Apost. Mag. Ord. Præd.

CHE

CHE COSA SIA MATEMATICA, E quali ſieno le ſue parti.

MATEMATICA chiamiamo tutta quella parte di Filoſofia, che riguarda la quantità.

Due generi di quantità hà per oggetto la Matematica, cioè la quantità continua, e la quantità diſcreta.

Qualunque eſtenſione ſi chiama quantità continua, ed ogni moltitudine ſi dice quantità diſcreta.

La quantità continua ſi diuide in trè generi d'eſtenſioni. La prima è quell'eſtenſione, che coſtituiſce lo ſpazio. La ſeconda è la duratione, che volgarmente vien chiamata tempo; e la terza è il moto ſucceſſiuo, che ſi dice moto perenne.

Quindi è, che la quantità continua cade ſotto la noſtra cognitione, alle volte come coſa mobile, ed altre volte come coſa immobile; cioè la conſideriamo immobile quando ci forma lo ſpatio, e mobile, quando la conſideriamo come tempo, ò moto ſucceſſiuo. Li Matematici però, benche intendano per quantità continua l'eſtenſione materiale, con tuttociò la conſiderano aſtratta, cioè diſgiunta, da ogni materia.

La quantità diſcreta ſi conſidera, ò aſſoluta per ſe, ouero comparatiua ad altra coſa.

Aſſoluta per ſe s'intende, quando quella moltitudine ò è conſiderata in aſtratto, come ſe ſi proferiſſe cento, mille &c. ſenz' altra eſpreſſione; ouero è conſiderata in concreto, cioè applicata à qualche oggetto, come ſe diceſſimo, trenta Naui, mille huomini &c.

Comparatiua ad altro s'intende, quando quella moltitudine è comparata al ſuono, ò voce &c. come ſuccede nelle coſe della muſica.

Finalmente la quantità ſi diuide in quantità rationale, ed irrationale.

Rationale ſi dice quella quantità, della quale, riſpetto à qualche miſura, ſe ne poſſono eſprimere le parti; e quella quantità, della quale, in riguardo à qualche miſura, non ſe ne poſſono eſprimere le parti, ſi chiama irrationale.

La Matematica ſi diuide in quattro generi di Dottrine, cioè Geometria, Aritmetica, Armonica, ed Aſtronomia.

La Geometria è ſcienza, la quale, col mezzo d'alcuni notiſſimi principij, dimoſtra tutte le paſſioni, ò proprietà, che accadono alla quantità continua immobile; onde inſegna anco à miſurare la grandezza della Terra, e di tutte l'altre coſe materiali.

L'Aritmetica è ſcienza, che riguarda la quantità diſcreta, cioè la moltitudine aſſoluta per ſe, ſi riuolge intorno alle paſſioni numeriche, ed eſplica l'arte di ben conteggiare.

L'Armonica è ſcienza, che riguarda la quantità diſcreta, cioè la moltitudine comparatiua ad altro, conſidera, ed eſplica l'Armonia, ò concento ſonoro.

L'Aſtronomia è ſcienza, che conſidera le paſſioni della quantità continua mobile, eſplica, e dimoſtra l'apparenze, e moti de' Corpi Celeſti.

Annotatione.

PErche, come s'è detto, la quantità ſi diuide in quantità continua, e diſcreta, delle quali la continua ſi diſtingue in mobile, ed immobile, e la diſcreta in aſſoluta per sè, e comparatiua ad altro; hauendo gl'Antichi Matematici conſiderato nella quantità queſti quattro accidenti, vollero, che la Matematica ſi diuideſſe in quattro ſoli membri; cioè, in Geometria, che riguarda la quantità continua immobile; in Aritmetica, che riguarda la quantità diſcreta, ò moltitudine aſſoluta per se; in Armonica, ò Muſica, che riguarda la quantità diſcreta comparatiua ad altro; ed in Aſtronomia, che conſidera la quantità continua mobile: Queſti quattro membri, ò parti (ciaſcuna delle quali riceue altre ſubdiuiſioni, come à ſuo luogo ſi dirà) ſi diuidono in ſpeculatiua, e pratica.

La ſpeculatiua è quella, che riguarda ſolamente la dimoſtratione delle coſe; e la pratica è quella, che riguarda ſemplicemente l'operatiua.

La Dimoſtratione ò è Theorematica, ouero Problematica.

La Dimoſtratione Theorematica è quella, che ne certifica delle paſſioni, ò proprietà d'vna, ò più quantità in qualche modo eſpoſte, ò ſcambieuolmente adattate; laonde il Theorema non è altro, ſe non che la dimoſtratione da farſi in qualche coſa propoſta, ſecondo vna data Ipoteſi.

La Dimoſtratione Problematica è quella, che ci rende certi della poſſibilità di coſtruire qualche coſa propoſta, e perciò il Problema è quello, che c'inſegna à ſoluere, per alcune quantità date, qualche coſa propoſta.

Delli Theoremi, e Problemi, alcuni ſi dicono elementi, altri elementari, ed altri ve ne ſono ſeparati dalla forza, e ſignificato di queſti,

Elementi ſi dicono quei Theoremi, e Problemi, che ſeruono per la coſtruttione, e dimoſtratione dell'altre coſe, cioè che ſono come principij ordinati à dimoſtrare, e coſtruire altri Theoremi, e Problemi, e che, ſenza quelli, tutte le altre coſe non ſi potrebbero coſtruire, e dimoſtrare.

Quei Theoremi, e Problemi ſi dicono elementari, li quali ſeruono alla coſtruttione, e dimoſtratione di molte altre coſe, ma non ſeruono così vniuerſalmente per la coſtruttione di tutte l'altre coſe, come ſi diſſe degl'Elementi.

Quelli poi, che non ſeruono per la coſtruttione, e dimoſtratione di più coſe, nè dimoſtrano qualche coſa di coſpicuo, ſono fuori di queſto nome elementari.

Doppo d'hauer definito, che coſa ſia Theorema, e Problema, parmi à propoſito, prima che ſi entri in altro, definire, che coſa ſia Lemma, Scolio, Corollario, Poriſma, Deduttione, Caſo, ed Iſtanza.

Il Lemma è vn premeſſo, che ſi fà in aiuto alla propoſitione ſeguente.

Quando, in aiuto di qualche propoſitione di materia particolare, fà biſogno premettere qualche Theorema, ò Problema, che tratti d'altra materia, quel premeſſo da Matematici vien chiamato Lemma.

Lo Scolio denota vna breue eſpoſitione, ò interpretatione, ed alle volte qualche aggiuntione all'antecedente propoſitione.

Il Corollario è vna certa conſeguenza, che ſi caua da quel che ſi è dimoſtrato nella propoſitione antecedente, diuerſa da quello, che ſi è concluſo in eſſa propoſitione.

Poriſmi, ſecondo gl'Antichi, ſono certe propoſitioni, che ſi poſſono eſporre in forma di Problemi, ed anco in forma di Theoremi; non ſono aſſolutamente Problemi, ne meno Theoremi, ma tengono miſto ſignificato, che poſſono denotare, e l'vno, e l'altro.

Secondo i Moderni poi, per Poriſma ſi prende qualche concluſione, che ſi caua dal problema riſoluto, la quale non hà niente di commune con quello, che s'è propoſto, e ſi prende come Theorema certo, e dimoſtrato.

La Deduttione, nel Problema, è il paſſaggio, che ſi fà dal propoſto ad vn altro Problema, il quale ſerue di mezzo per la ſolutione del Problema propoſto.

Il Caſo è la traſpoſitione della coſtruttione, ò dimoſtratione.

Nè i Problemi, e Theoremi, qualche volta vna coſa può accadere in varij modi, e perciò, ſecondo vn modo, ſi fà la coſtruttione, e dimoſtratione, che ſi richiede, come à ſuo luogo ſi dirà; e di nuouo, per ogn'altro modo, ſi fà parimente la coſtruttione, e dimoſtratione, che per lo più è differente dall'altra, e così verrà dimoſtrato quanto s'è propoſto, ſecondo tutti i varij modi, e queſti modi varij ſono quelli, che ſi chiamano caſi.

L'Iſtanza è quella, che impediſce tutt' il corſo dell'oratione, opponendoſi ò alla coſtruttione, ouero alla dimoſtratione, la quale non deue eſſere riceuuta per vera, ma biſogna rifiutarla, e dimoſtrare, che ſia falſa.

Premeſſa la cognitione di quanto s'è detto, parmi tempo di dare principio alla ſpiegatione degl'Elementi d'Euclide, per eſſer quelli la baſe di tutto queſto noſtro corſo di Matematica; e per procedere coll'ordine del medeſimo Euclide, ſpiegheremo prima tutti li principij neceſſarij per l'intiera cognitione di queſti Elementi, i quali ſi diuidono in trè generi, cioè, Definitioni, Poſtulati, & Aſſiomi.

Definitioni ſi chiamano, in Matematica, quei principij, che ſpiegano la natura delle coſe, e li vocaboli dell'Arte.

Quei prineipij, li quali ſono per sè tanto notí, e chiari, che non hanno biſogno d'alcuna dimoſtratione, ſi che ſono conceduti da tutti per veri ſenz'alcuna dubitatione, ſi dicono Poſtulati.

Gli aſſiomi, ò communi ſentenze, ſono certe cognitioni dell'animo, che non ſolo in Matematica, ma in tutte l'altre Dottrine, ſono talmente manifeſte, & euidenti, che, chiunque ne concepiſce rettamente i vocaboli, per niſſuna ragione può diſſentire, e non riceuerli come veri, e reali,

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO PRIMO.

DEFINITIONI.

I.

IL PVNTO è quello, che non hà parte alcuna, *cioè, che non occupa ſpatio alcuno.*

II.

La linea è vna lunghezza ſenza larghezza.

III.

Gli eſtremi della linea ſono punti, *cioè, la linea terminata comincia dal punto, e finiſce nel punto.*

IV.

Di tutte le linee, che ſi poſſono ſtendere da punto à punto, la breuiſſima ſi chiama linea retta.

Quella poi, che non è la breuiſſima, ſi chiama linea curua.

V.

Superficie ſi chiama quella, che hà ſolamente lunghezza, e larghezza, *ouero il fluſſo laterale della linea ſi chiama ſuperficie.*

VI.

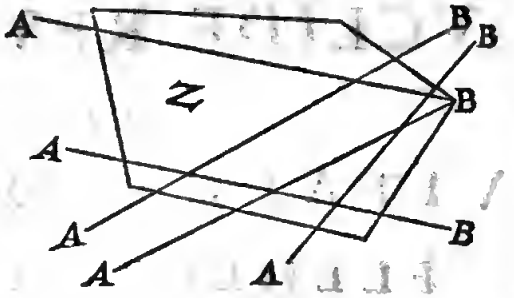
Gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

Perche la ſuperficie è il fluſſo laterale, ò tranſuerſale della linea, perciò la ſuperficie comincia dalla linea, e finiſce nella linea; onde gli eſtremi della ſuperficie ſono linee.

VII.

Quando vna retta linea è diſteſa, ſecondo tutte le poſiture, ſopra d'vna ſuperficie, ed in ogni poſitura giace con tutte le ſue parti in eſſa ſuperficie, quella ſuperficie, ſecondo Herone, la chiameremo ſuperficie piana.

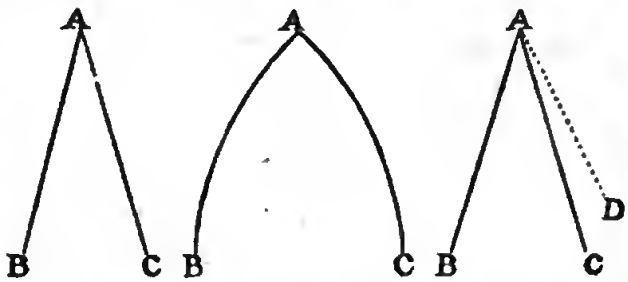
S'intenda qualſiuoglia retta linea A B, diſteſa ſopra la ſuperficie Z, ſecondo qualunque poſitura; ſe tutte le parti della retta A B, ſempre, ed in ogni poſitura, ſaranno nella ſuperficie Z, all' hora la ſuperficie Z la chiameremo ſuperficie piana.



VIII.

La ſcambieuole inclinatione di due linee, poſte in vn medeſimo piano, e concorrenti frà di loro in modo, che nõ ſiano nella medeſima dirittura, ſi chiama angolo piano.

Si concepiſcano le due linee B A, C A, poſte in vn medeſimo piano, e concorrenti in qualche punto A in modo, che non facciano vna ſola linea, ma l'vna ſia inclinata all'altra: Hor quella ſcambieuole inclinatione, cioè quell'apertura, che le linee B A, C A coſtituiſcono nel punto A, ſi chiama angolo piano.



Quindi è, che la quantità dell'angolo non conſiſte nella lunghezza delle linee B A, C A, mà nella ſcambieuole inclinatione, ò apertura, che coſtituiſcono nel concorſo A. Et è d'auuertirſi, che qualunque angolo piano ſi nota con tre lettere, come ſi vede nella figura, e quando ſi nomina, ſi fà col mezzo di quelle tre lettere, ponendo nel ſecondo luogo quella lettera, doue le linee ſanno il concorſo, cioè doue ſtà l'angolo, e così, volendo nominare vno delli notati angoli, ſi dirà l'angolo B A C, ò vero l'angolo C A B.

E anco da notarſi, che l'angolo non è lunghezza, ne ſuperficie, ne meno corpo, mà è ſolamente il modo, col quale due linee ſono ſcambieuolmente inclinate; e l'angolo piano ſi dice eſſere maggiore, ò minore, ſecondo che l'inclinatione, ò apertura di quelle linee, che lo contengono, è maggiore, ò minore; e così diremo, che quanto la linea A C è più inclinata alla linea A B, tanto l'angolo ſi dirà eſſere minore; e, quanto ſarà meno inclinata, tanto l'angolo B A C ſi dirà eſſere maggiore.

Oltre à ciò intendaſi tirata la retta A D in modo, che faccia qualche angolo con la retta A C, la medeſima retta A D ſarà angolo con la retta A B, donde è manifeſto, che la retta AC, diuide l'angolo D A B nelli due angoli

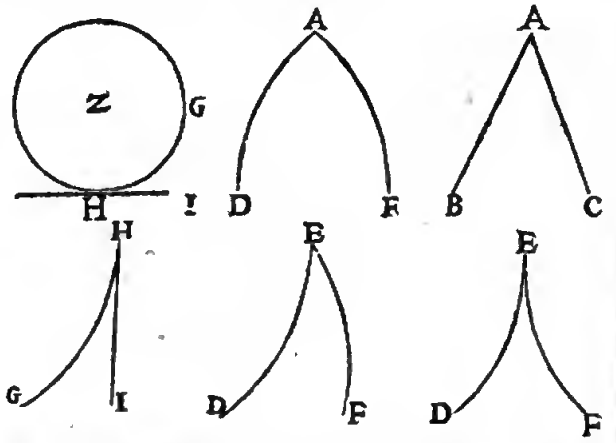
li B A C, C A D, e perciò l'angolo di natura sua è diuisibile; hor se l'angolo è diuisibile per necessaria conseguenza sarà ancora quantità, e stimo tanto difficile à potersi concepire, che il diuisibile non sia quantità, per quanto è difficile ad intendere, che l'indiuisibile sia quantità: conchiudiamo dunque, che l'angolo benche non sia lunghezza, non superficie, ne corpo; contuttociò essendo cosa diuisibile non può lasciare di non essere quantità.

I X.

Quell'Angolo, ch'è contenuto da linee rette, si chiama angolo rettilineo.

Quello ch'è contenuto da linee curue, si dice angolo curuilineo; e quello, ch'è contenuto da vna retta, e da vna curua, si chiama angolo mistilineo.

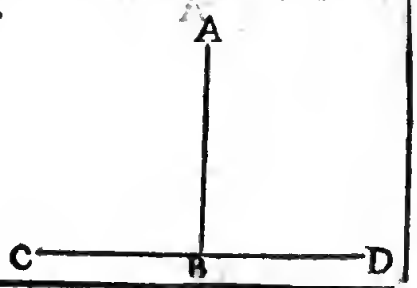
Nella figura seguente, l'angolo B A C, contenuto dalle rette B A, C A, si chiama angolo rettilineo, l'angolo D E F, contenuto dalle curue D E, F E, ouero D A, F A, si dice angolo curuilineo; e l'angolo G H I, contenuto dalla retta H I, e dalla curua G H, si chiama angolo mistilineo. Oltre à ciò, quando l'angolo è contenuto da vna linea curua, e da vna linea retta, e la retta continuata non sega in modo alcuno la linea curua, quell'angolo si dice angolo del contatto, come l'angolo G H I della figura Z, ed il punto H si chiama punto del contatto.



X.

Se vna retta linea cade sopra d'vn altra linea retta, e gli angoli, che fà dall'vna, e l'altra parte, sono frà di loro vguali, quelli si chiamano angoli retti; e la linea, che cade, si dice essere perpendicolare à quella, sopra la quale cade.

Cada la retta A B sopra la retta C D, e faccia l'angolo A B D vguale all'angolo A B C, in tal caso gli angoli A B D, A B C, si chiameranno angoli retti, e la linea retta A B, si dirà essere perpendicolare alla retta C D.



Ango-

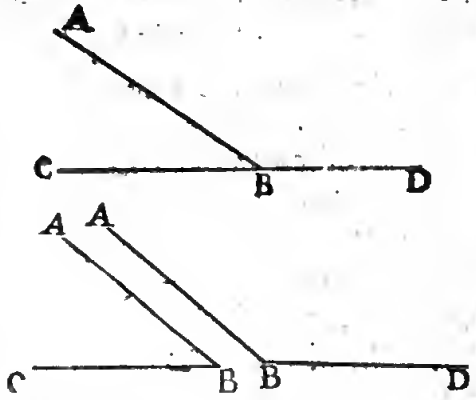
X I.

Angolo ottuſo ſi chiama quello, ch' è maggiore del retto.

X I I.

Quell' angolo, ch'è minore del retto, ſi chiamerà angolo acuto.

Cada la retta A B ſopra la retta C D, e faccia gli angoli A B D, A B C, fra di loro ineguali, cioè l'angolo A B D maggiore dell'angolo A B C; ſe l'angolo A B D ſarà maggiore d'vn' angolo retto, lo chiameremo angolo ottuſo; e ſe l'angolo A B C è minore d'vn' angolo retto, quello ſi chiamerà angolo acuto.



X I I I.

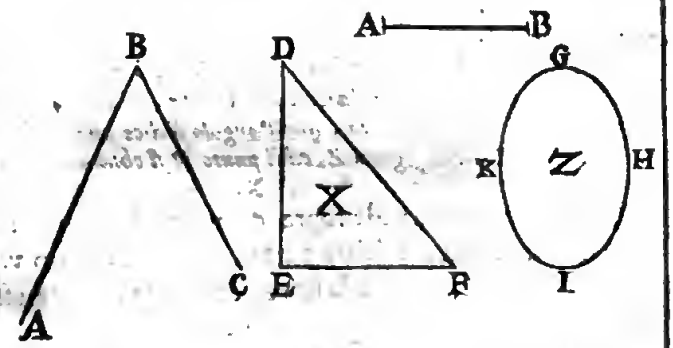
Termine è quello, ch'è eſtremo di qualche coſa.

Il punto, ch'è eſtremo della linea, ſi dice eſſer termine della linea; la linea, che è eſtremo della ſuperficie, ſi dice eſſer termine della ſuperficie: ed il medeſimo s'intende d'ogn'altra coſa.

X I V.

Figura ſi chiama quella, ch'è contenuta da vno, ò più termini.

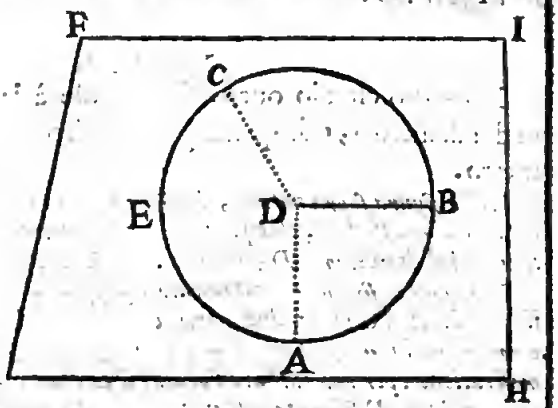
Non tutte le coſe, che hanno termini, ſi chiamano figure, ma ſolo quelle, che ſono circondate, e totalmente racchiuſe dentro à i ſuoi termini. v. g. la linea A B, è terminata dalli punti A, & B; e perche queſti non hanno eſtenſione alcuna, perciò non poſſono circondare, e racchiudere la linea A B; e, ſecondo il ſenſo della definitione, la linea A B non è figura. Similmente, la ſuperficie A B C non è figura, ſtante che non è racchiuſa tutta dentro alli ſuoi termini, ma è indeterminata verſo A C. Figura, ſecondo Euclide, ſi chiama la notata Z, la quale è totalmente racchiuſa dalla ſola linea G H I K; come anco ſi chiama figura la notata X, la quale è totalmente racchiuſa dentro i termini D E, E F, F D.



X V.

Il circolo è vna figura piana, contenuta da vna sola linea, che si chiama circonferenza, alla quale tutte le rette linee, che dal punto di mezzo vi cadono, sono frà di loro vguali.

In questa definitione Euclide c'insegna, che cosa dobbiamo intendere per circolo, e dice; ch'ogni qual volta s'haurà vna figura piana, contenuta da vna sola linea, che chiameremo circonferenza, e tutte le rette linee, tirate dal punto di mezzo alla circonferenza, saranno frà di loro vguali, quella figura si chiamerà circolo: laonde, acciòche quella figura sia circolo, è necessario che habbia tre conditioni, cioè; la prima, che sia figura piana; la seconda, che sia contenuta da vna sola linea, come la notata A B C, la quale si chiama circonferenza; e la terza, che tutte le rette linee, come D A, D B, D C, tirate dal punto di mezzo D, alla circonferenza, siano frà di loro vguali. Quando si trouerà dunque vna figura, che habbia le tre antedette conditioni, quella si chiamerà circolo.



Il Signor Gio: Alfonso Borelli, imitando Euclide nella definitione della Sfera, pone la definitione del Circolo nel seguente modo.

La figura piana descritta dalla reuolutione d'vna terminata retta linea, intorno ad vno delli suoi estremi fisso immobile, sin che ritorna nel luogo d'onde partì, si chiamerà circolo, e la linea descritta dall'estremo mobile di quella retta linea, si chiamerà circonferenza di circolo.

Cioè, se concepiremo immobile vno degli estremi di qualunque retta D C, come l'estremo D, intorno al quale, nel piano F G H I, sia reuoluta la retta D C, fin che ritorna nel luogo, d'onde partì, sarà descritta la figura piana A B C E, la quale hà le tre conditioni antedette, cioè; sarà figura piana, stante che la reuolutione è fatta nel piano F G H I, sarà contenuta dalla sola linea A B C E, disegnata dall'estremo C, che si chiama circonferenza, e tutte le rette D C, D A, D B &c. sono frà di loro vguali, poiche rappresentano la longhezza della retta D C in tutti i siti del piano F G H I, mentre nella sua reuolutione descrisse il circolo A B C.

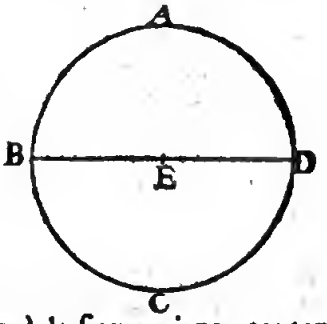
X V I.

Quel punto, intorno al quale si riuolse quella retta linea, che descrisse il circolo, si chiama centro del medesimo circolo, che, nella figura antecedente, *sarà il punto D.*

XVII.

Ogni retta linea, che paſſa per il centro del Circolo, e termina con ambi gli eſtremi nella circonferenza del medeſimo circolo, ſi chiama diametro del Circolo.

Per il centro E, del circolo A B C D, paſſi qualunque retta B E D, e concorra con la circonferenza del circolo da ambe le parti in B, & D, ſarà la retta B D quella, che chiamaremo diametro d'eſſo circolo.



XVIII.

Il mezzo circolo ouero ſemicircolo è la figura piana, contenuta dal diametro, e da quella parte di circonferenza, detratta dal diametro.

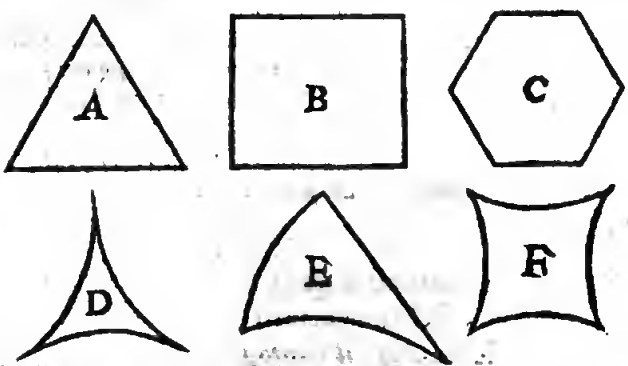
Nella figura ſopra notata, la figura piana contenuta dal diametro B D, e dalla linea B A D, ch'è parte della circonferenza, ouero quella, ch'è contenuta dal diametro B D, e dalla linea B C D, ſi chiama mezzo circolo.

In queſta definitione tacitamente ſi ſuppone, ch'il diametro B D diuida il circolo A B C D in due parti vguali, il che facilmente ſi potrebbe dimoſtrare in queſto luogo, mà non eſſendoſi per anco parlato della dimoſtratione, per non turbare l'ordine d'Euclide, nell'eſporne quì la definitione, che ſopra s'è ſpiegata, ſe ne traſporta la dimoſtratione dopo la terza propoſitione del primo libro.

XIX.

Le figure, che ſono contenute da linee rette, ſi dicono rettilinee; quelle, che ſono contenute da linee curue, curuilinee; e quelle, che ſono contenute da linee rette, e da linee curue, ſi dicono miſtilinee.

Nella figura ſeguente, le notate A, B, & C, che ſono contenute da linee rette, ſi dicono rettilinee; le notate F, & D, curuilinee; e la notata E, ch'è contenuta da linee curue, e rette, ſi chiama miſtilinea.



Delle

X X.

Delle figure piane quella, ch'è contenuta da tre ſole linee, ſi dice trilatero, ouero triangolo; *come le notate A, D, E.*

X X I.

Quella, ch'è contenuta da quattro linee, ſi chiama quadrilatero, ò quadrangolo; *come le notate B, F.*

X X I I.

E ſe ſarà contenuta da più di quattro linee, ſi chiamerà moltilatero; *come la notata C.*

X X I I I.

Delle figure trilatere quella, che hà tre lati vguali, ſi chiama triangolo equilatere, *come la notata A. della figura ſeguente.*

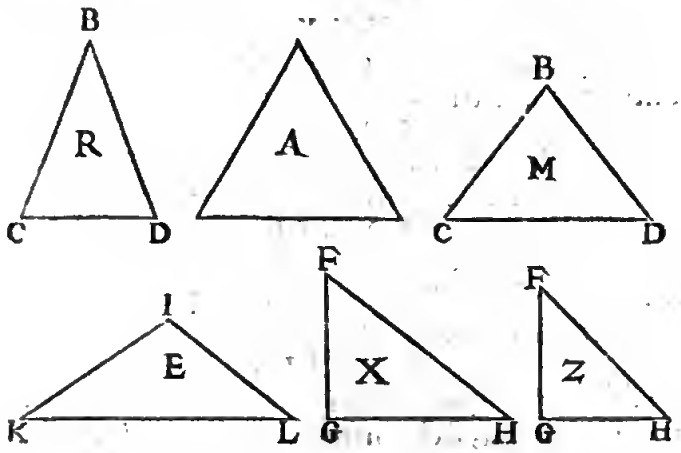
X X I V.

Quella che hà due lati vguali, ſi chiama iſoſcele, *come le notate R M Z.*

X X V.

E quella, che hà tutti tre i lati ineguali, ſi chiama ſcaleno, *come le notate X, ed E.*

Sin quì Euclide hà definito i triangoli per la comparatione de'i lati, e conſeguentemente li definiſce per la comparatione degl'angoli.



X X V I.

Ogni triangolo, che haurà vn'angolo retto, ſi chiama triangolo rettangolo, *come li notati X, Z.*

X X V I I.

Se haurà vn'angolo ottuſo, ſi dirà ambligonio, *come il notato E.*

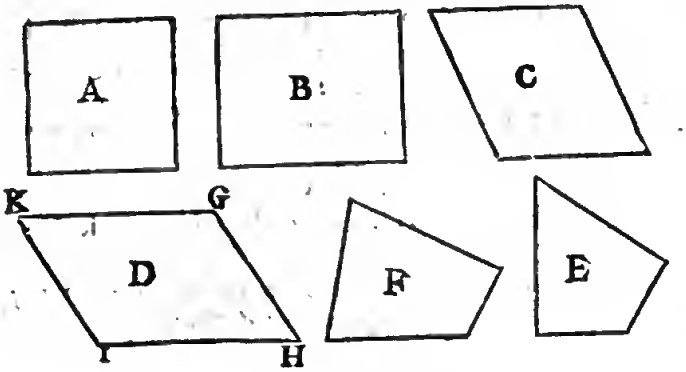
XXVIII.

E se tutti tre gli angoli saranno acuti, si chiamerà triangolo ossigonio, *come li notati A, R, M.*

D'onde è manifesto, ch'il triangolo scaleno può essere rettangolo, ed ambligonio; il triangolo isoscele può essere ambligonio, ed ossigonio.

XXIX.

Delle figure quadrilatere quella, che hà i quattro lati vguali, e tutti gli angoli retti, si chiama quadrato, *come la notata A.*



XXX.

Chiamasi quadrilungo quel quadrilatero, che hà gli angoli retti, e non tutti quattro i lati sono frà di loro vguali, *come la notata B.*

XXXI.

La figura quadrilatera, che hà tutti quattro i lati vguali, e non hà gli angoli retti, si chiama Rombo, *come la notata C.*

XXXII.

Romboide si chiama la figura quadrilatera, che hà i lati opposti vguali, e gli angoli opposti vguali, non è equilatera, ne meno hà gli angoli retti, *come la notata D.*

XXXIII.

Tutte l'altre figure quadrilatere, che non hanno le conditioni delle quattro antecedenti, si chiamano trapetij, *come le notate E, F.*

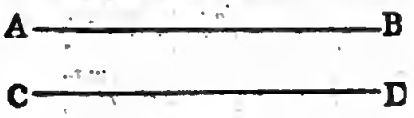
XXXIV.

Due rette linee, che sono in vn medesimo piano, e continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai scambieuolmente s'auuicinano, ò allontano, le chiameremo Rette linee parallele.

Spiega Euclide la natura delle rette parellele, per la negatiua del loro scambieuole concorso, come è manifesto da quel, che definisce con le seguenti parole.

Due

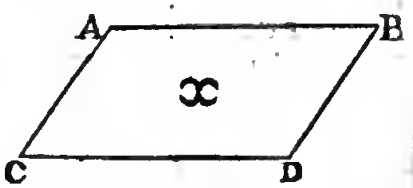
Due rette linee, che diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate in infinito dall'vna, e l'altra parte non concorrono, ſi chiameranno rette linee parallele. *Mà perche ſi trouano alcune linee, le quali diſteſe in vn medeſimo piano, e, continuate in infinito, ſempre ſcambieuolmente s'auuicinano, e mai concorrono, benche queſte ò ſono due linee eurue, ouero vna linea retta, ed vna eurua, come à ſuo luogo ſi dimoſtrerà, e le linee delle quali parla Euclide, ſono linee rette; con tutto ciò, dandoſi in Natura due linee in vn medeſimo piano, le quali, continuate in infinito, ſempre s'auuicinano, e mai concorrono, cade in dubio, ſe due rette linee diſteſe in vn medeſimo piano, e continuate mai concorrono, habbiano queſta paſſione d'auuicinarſi, ò diſcoſtarſi ſcambieuolmente nella loro infinita eſtenſione, il che ſuccedendo biſognarebbe fare concetto diuerſo da quello, che habbiamo delle rette parellele: hor, acciòche la definitione delle rette parallele non ſia mancante, è neceſſario ſpiegarui la loro propria natura, che è di non auuicinarſi, ne ſcoſtarſi in niſſun luogo della lor'eſtenſione, e, ſecondo tal diſinitione, diriggere il metodo alle dimoſtrationi, attinenti agl'elementi di eſſe parallele; ed à queſt'effetto, ſeguendo la ſentenza di Poſſidonio, Gemini, e Proclo, bò ſtimato neceſſario mutare la definitione d'Euclide, ed, in ſuo luogo, porui la ſeguente. Due rette linee, che ſono in vn medeſimo piano, e, continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito, in luogo alcuno mai ſcambieuolmente s'auuicinano, ò allontanano, le chiamaremo rette linee parallele; ſe poi ſia poſſibile, che ſi diano in Natura due rette linee come A B, C D le quali poſte in vn medeſimo piano, e continuate in infinito, in luogo alcuno della loro infinita eſtenſione ſcambieuolmente s'auuicinino, ne s'allontanino, lo dimoſtraremo à ſuo luogo.*



XXXV.

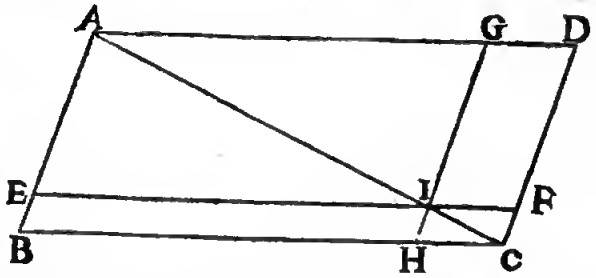
Ogni quadrilatero, che hauerà i lati oppoſti paralleli, ſi chiamerà Parallelogrammo.

Nel quadrilatero X, ſe i due lati oppoſti A B, C D, ſono frà di loro paralleli, ed ancora gli altri due lati oppoſti A C, B D, ſono frà di loro paralleli, il quadrilatero X, ſi chiamerà parallelogrammo.



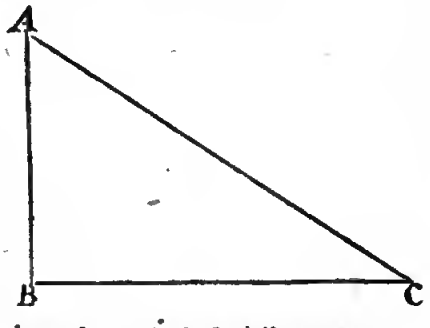
XXXVI.

Quando in vn parallelogrammo è tirato il diametro, ò diagonale, e due rette linee, parallele à due lati di eſſo parallelogrammo, ſi ſegano ſcambieuolmente in vn ſol punto col diametro, in modo che ſia diuiſo il detto parallelogrammo in quattro parallelogrammi, de'quali i due, che ſono ſegati dal diametro, ſi dicono ſtare intorno al diametro, e gli altri due, per li quali non paſſa il diametro, ſi chiamano complementi.



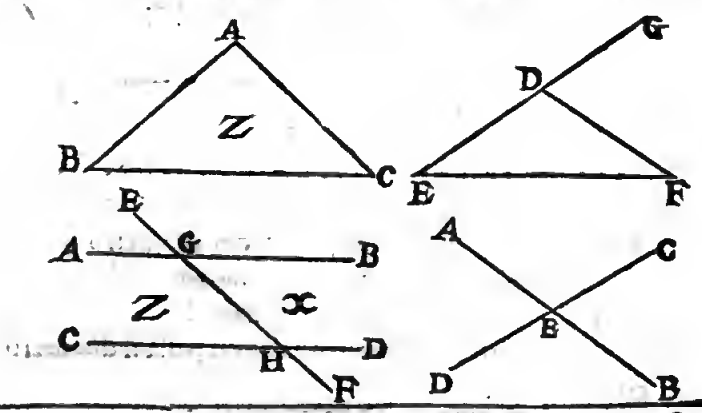
In ogni quadrilatere, la retta tirata da vn angolo all'angolo opposto, si chiama diametro, ouero diagonale, e considerando il parallelogrammo ABCD, il di cui diametro AC, nel quale si concepiscano tirate le rette EF, GH, cioè EF parallela al lato BC, e la retta HG, parallela al lato CD, le quali si seghino scambieuolmente coi diametro AC nel solo punto I in modo, che tutto il parallelogrammo ABCD sia distribuito in quattro parallelogrammi AEIG, IHCF, EBHI, GIFD, li due AEIG, IHCF, che sono segati dal diametro AC, si diranno stare intorno al diametro AC, e gli altri due EBHI, GIFD, i quali non sono segati dal diametro AC, si chiameranno complementi.

ANNOTATIONE.



1. *Ogni lato di qualunque triangolo si può chiamare base di quel triangolo: si che, se le rette AB, BC, si chiameranno lati, la retta AC si chiamerà base; se i lati AC, CB, si chiameranno lati, la retta AB, sarà la base &c.*

2. *In qualunque triangolo, l'angolo opposto alla base si chiama angolo verticale; cioè, se la retta BC, la chiameremo base, l'angolo verticale sarà il notato A; se la retta AB verrà chiamata base, sarà C l'angolo verticale.*



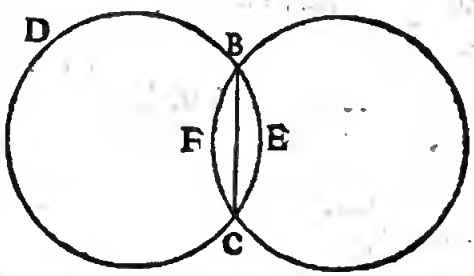
3. *Prolungato vn lato di qualunque triangolo D E F, come il lato E D, verſo G, l'angolo G D F ſi chiamerà angolo eſterno, e li due angoli D E F, D F E, ſi diranno angoli interni, ed oppoſti, riſpetto all'angolo eſterno G D F.*

4. *Se due rette linee, come A B, C D, ſono ſegate in qualunque modo da vn'altra retta E F, tutto quello, che ſi vede dalla retta E F verſo X, ſi dice eſſere da vna medeſima parte; e tutto quello, ch'è dalla retta E F verſo Z, ſimilmente ſi dice eſſere da vna medeſima parte.*

Oltre à ciò, gli angoli C H G, B G H ſi dicono eſſere alterni: e ſimilmente gli angoli A G H, D H G ſi dicono angoli alterni: l'angolo poi E G B, ſi chiama angolo eſterno; e l'angolo G H D, interno, ed oppoſto, riſpetto all'eſterno E G B; come anco gli angoli F H D, F H C ſono eſterni; e gli angoli H G B, H G A ſi dicono interni, ed oppoſti. Finalmente gli angoli B G H, D H G, ſi dicono interni, e dalla medeſima parte X: come anco gli angoli A G H, C H G, ſono interni, e dalla medeſima parte Z.

5. *Quando due linee rette, come A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in qualche punto E, gli angoli A E C, D E B, ſi dicono al vertice; e ſimilmente gli angoli A E D, C E B ſi chiamano angoli al vertice.*

6. *I circoli, e circonferenze de'circoli, ſi dicono ſegarſi ſcambieuolmente, quando qualche parte dell'vno cade dentro dell'altro in modo, che habbiano vna commune parte.*



Si concepiſcano i circoli B F C, D B E C, talmente collocati in vn medeſimo piano, che qualche parte B E C F del circolo D B E C, cada dentro del circolo B F C in modo, che la portione B F C E ſia parte commune; in tal caſo i circoli, e loro circonferenze B F C, D B E C, ſi diranno ſegarſi ſcambieuolmente.

POSTVLATI.

I.

Ci ſi conceda poter tirare vna retta linea da qualunque punto à qualſiuoglia altro punto.

II.

Chẽ vna retta linea terminata ſi poſſa continuamente, e direttamente prolongare.

III.

Che intorno à qualſiuoglia centro, e con qualunque interuallo, ſi poſſa deſcriuere vn circolo.

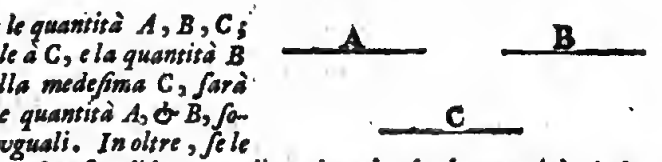
IV.

Che di qualunque quantità propoſta ſia poſſibile poterne immaginare, ò prendere vn'altra maggiore, ò minore.

ASSIOMI.

I.

Quelle cose, che sono vguali ad vna terza, sono ancora frà di loro vguali; e se vna delle vguali è maggiore, ò minore d'vna terza, l'altra delle vguali sarà maggiore, ò minore di quella medesima terza.



Siano espoſte le quantità A, B, C; ſe A ſarà vguale à C, e la quantità B ſarà vguale alla medeſima C, ſarà manifeſto, che le quantità A, & B, ſono fra di loro vguali. In oltre, ſe le quantità A, & B, ſono fra di loro vguali, ogni qual volta la quantità A ſia maggiore di C, ancora B ſarà maggiore di C; e ſe A ſarà minore di C, ancora B ſarà minore di C.

II.

Se à coſe vguali s'aggiunghino coſe vguali, ouero vna medeſima coſa, gli aggregati, che ne vengono, ſono frà di loro vguali.

III.

Se da coſe vguali ſe ne detraggono coſe vguali, i rimanenti ſono frà di loro vguali.

IV.

Se à coſe ineguali s'aggiungono coſe vguali, gli aggregati ſono ineguali.

V.

Se da coſe ineguali ſe ne detraggono coſe vguali, i rimanenti ſono ineguali.

VI.

Le coſe, che ſono il doppio d'vna medeſima coſa, ſono frà di loro vguali.

VII.

Quelle coſe, che ogn'vna da per ſe è la metà d'vn altra coſa, ſono fra di loro vguali.

VIII.

Le coſe, che ſcambieuolmente congruono inſieme, ſono frà di loro vguali.

IX.

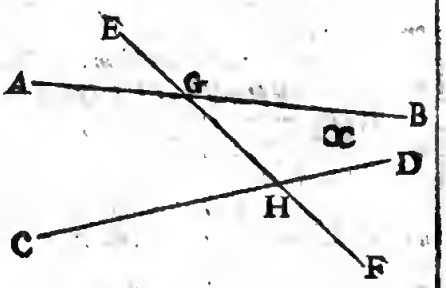
Il tutto è maggiore della ſua parte.

X.

Tutti gli angoli retti ſono frà di loro vguali.

X I.

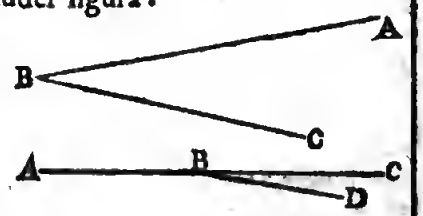
Se due rette linee ſono ſegate da vn altra retta linea, e gli angoli interni da vna medeſima parte ſono minori di due angoli retti, quelle continuate concorreranno da quella parte, doue ſono gli angoli minori di due retti.



Nella figura ſeguente, ſiano le rette A B, C D, ſegate dalla retta E F, e li due angoli B G H, D H G, inſieme giunti, ſiano minori di due angoli retti, vuole Euclide per conceſſo, che le rette A B, C D, continuate vadano à concorrere verſo X. E benche queſto aſſioma habbia di biſogno d'eſſer dimoſtrato, contuttocio l'hò poſto in queſto luogo, per non turbare l'ordine d'Euclide, e la dimoſtratione ſi può vedere dopo la propoſitione 31. di queſto Libro.

X I I.

Due rette linee non poſſono chiuder figura.



Le due rette A B, C B concorrenti in B non poſſono chiudere figura verſo le note A, & C, ſenza diſtruggere il concetto delle rette linee: e benche queſto aſſioma ſia aſſai chiaro, contutto cio, per leuare ogni dubio, ſe ne pone la dimoſtratione dopo la terza propoſitione di queſto.

X I I I.

Vna medeſima retta linea non può eſſere parte commune di due rette linee, che ſcambieuolmente concorrono, e non ſono nella medeſima dirittura.

S'intendano le rette C B, D B, non nella medeſima dirittura, le quali concorrino ſcambieuolmente in qualche punto B; ſe ſaranno continuate verſo B, le loro continuationi non coſtituiranno la ſola retta A B, in modo che A B ſia parte di A C, e ſia ancora parte della retta A B D; il che tutto ſi dimoſtrerà dopo la terza propoſitione di queſto primo Libro.

Delle Parti, che compongono il Theorema, e Problema.

TVtti queſti Elementi d'Euclide ſono diuiſi in Theoremi, e Problemi, de' quali i Theoremi riguardano la ſola dimoſtratione delle coſe, ed i Problemi l'operatiua, e dimoſtratione dell'operato, come à ſuo luogo fù definito.

Hor accio che il Theorema, e Problema sia perfetto, deue costare di cinque parti; cioè Propositione, Espositione, Costruttione, Dimostratione, e Conclusione.

Nella propositione si propone in genere quello, che si vuol fare, e dimostrare.

Nell'Espositione s'espone in specie quello, che in genere fù proposto nella propositione.

La costruttione, nel Problema, è l'operatione, ò descrittione di quella figura, che solue il proposto, e lo prepara alla dimostratione da farsi; e, nel Theorema, è l'aggiuntione di quelle quantità, che bisognano per la dimostratione di quello, che si è proposto.

La dimostratione è vn ordinato discorso, col quale, mediante li primi, ed insallibili principij, ò altre cose già dimostrate, per continuati sillogismi, si perviene alla verità di quello, che si è proposto fare, e dimostrare.

Conclusione è l'artificioso ritorno, che si fà alla propositione, col quale si conferma tutto quello, che si è fatto, e dimostrato.

Succede solamente nel Problema, che qualche volta, oltre le cinque sopranotate parti, sia necessaria la determinatione, la quale dichiara quando, e per qual ragione, come anco in quanti modi si può soluere il Problema, e di questa se ne parlerà à suo luogo.

Nota, che non sempre in ogni Theorema, ò Problema, si trouano queste sei parti; poiche alle volte può mancare l'espositione, e determinatione, ed altre volte la costruttione; è ben vero però, che pochissimi sono quei Problemi, à i quali manchi totalmente l'espositione, e determinatione; e pochissimi ancora sono quei Theoremi, à quali manchi la costruttione: è necessario però, che in tutti sempre si troui la propositione, la dimostratione, e la conclusione, stante che in tutti li Theoremi, e Problemi, è necessario prima conoscere quello, che si cerca; secondo dimostrare il medesimo, mediante li prin.i principij, ò altre cose dimostrate; e finalmente concludere quello, che si è fatto, e dimostrato.

La Dimostratione poi, ò è affirmatiua, ouero negatiua.

La Dimostratione affirmatiua è quella, con la quale, mediante li primi principij, ò altre propositioni dimostrate, si perviene direttamente alla conclusione di quello, che fù proposto fare, e dimostrare.

La Dimostratione negatiua (che si dice procedere per impossibile) è quando si prende il contrario di quello, che si vuole dimostrare per vero, e secondo tal'Ipotesi, procedendo per le cose concesse, si perviene à qualche impossibilità, mediante la quale conosciamo quell'Ipotesi presa per vera essere falsa. E perche la verità, nelle dimostrationi Geometriche, ò stà nella cosa, che si propone, ouero nel contrario della cosa proposta, ritrouato che il contrario della cosa proposta sia falso, si conclude, che la cosa proposta necessariamente sia vera.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Propoſitione.

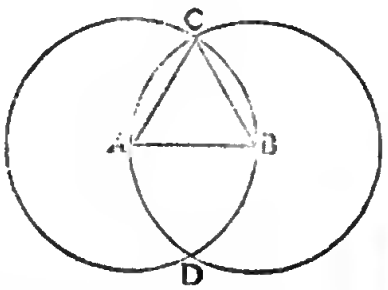
Sopra di qualunque data retta linea terminata, deſcriuere vn triangolo equilatere.

Eſpoſitione

Sia data qualſiuoglia retta linea terminata A B, ſopra la quale ſi voglia deſcriuere vn triangolo equilatere.

Coſtruttione.

Si faccia centro in vno degli eſtremi della retta data A B, come in A, e coll'interuallo A B, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo C B D: di nuouo ſi faccia centro nell'eſtremo B, e col medeſimo interuallo B A, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo C A D. Perche A B è ſemidiametro del circolo C B D, ed ancora del circolo C A D, perciò cade dentro dell'vno, e l'altro circolo; per la qual coſa parte d'vn circolo cade dentro dell'altro, e per l'annotatione dopo la 36. definitione, i circoli, e loro circonferenze ſi ſegano ſcambieuolmente. Sia dunque la loro interſegatione doue ſi voglia, come in C, & D, dal punto C alli centri A, & B, per il primo poſtulato, ſi tirino le rette C A, C B. Dico che il trilatere A B C è triangolo equilatere.



Dimoſtratione.

Perche nell'antecedente coſtruttione, intorno al centro A, s'è deſcritto il circolo C B D, e le rette linee A B, A C, ſono tirate dal medeſimo centro A alla medeſima circonferenza C B D, per la decimaquinta definitione, la retta A C è vguale alla retta A B. Similmente, perche il punto B, nella coſtruttione, è fatto centro del circolo C A D, e le rette linee B A, B C ſono tirate dal medeſimo centro B alla medeſima circonferenza C A D, per la decimaquinta definitione, ſarà la retta C B, vguale alla retta A B; mà fù dimoſtrata la retta A C vguale alla medeſima A B, ſarà, per il primo aſſioma, A C vguale alla retta C B; e tutti trè i lati A B, B C, C A ſono frà di loro vguali. Quel triangolo, che hà trè lati vguali, per la vigeſimaterza definitione, è triangolo equilatere; mà il triangolo A B C, per quel, che s'è dimoſtrato, hà trè lati vguali; il triangolo dunque A B C è triangolo equilatere.

Concluſione.

Per la qual coſa, ſopra qualunque data retta linea terminata, ſi può deſcriuere vn triangolo equilatere, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

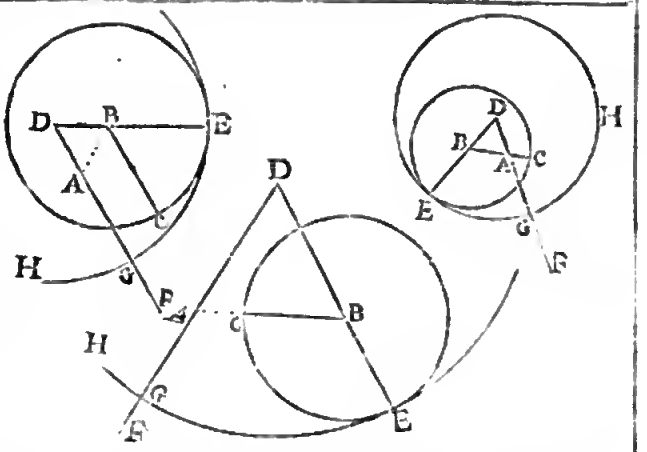
Propoſitione.

Dato vn punto, e data vna retta linea terminata, ſi può dal dato punto tirare vna retta linea vguale alla retta data.

Eſpoſitione

Sia dato il punto A, e la retta linea terminata B C, ſi vuole dal dato punto A tirare vna retta linea vguale alla retta data B C.

Costruttione.



Si faccia centro in vno degli estremi della retta data B C, come nel punto B, e coll'interuallo B C, per il terzo postulato, si descriua il circolo E C; dal centro B, al dato punto A, per il primo postulato, si tiri la retta B A, sopra la quale, per l'antecedente propositione, si descriua il triangolo equilatero D A B; si prolunghino, per il secondo postulato, i lati D B, D A, cioè D B, che passa per il centro B, fino alla circonferenza in E, ed il lato D A, che passa per il punto dato, si prolunghi indeterminatamente, verso F; e, fatto centro in D, coll'interuallo D E, per il terzo postulato, si descriua il circolo E G H, la di cui circonferenza segarà la retta indeterminata in qualche punto G. Dico che la retta A G è vguale alla data retta B C.

Dimostratione.

Essendo per costruttione, il punto D centro del circolo E G H, e le rette linee D E, D G, sono tirate dal centro D alla medesima circonfetenza E G H, per la decimaquinta definitione, la retta D E sarà vguale alla retta D G. In oltre, perche i lati D B, D A sono vguali (stante che sono lati del triangolo equilatere) detratto dalle vguali rette D E, D G, le vguali D B, D A, resta, per il terzo assioma, la retta A G, vguale alla retta B E. Finalmente, perche il punto B, per costruttione, è centro del circolo E C, e le rette B E, B C, sono tirate dal centro B, alla medesima circonferenza E C, per la decimaquinta definitione, la retta B C sarà vguale alla retta B E; ma fù mostrata la retta A G vguale alla medesima retta B E, per il ptimo assioma, la retta A G sarà vguale alla retta B C.

Conclusione.

Per la qual cosa, dal dato punto A si è tirata la retta A G vguale alla data retta B C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Propositione.

Date due rette linee ineguali, dalla maggiore tagliarne vna parte vguale alla minore.

Esposizione.

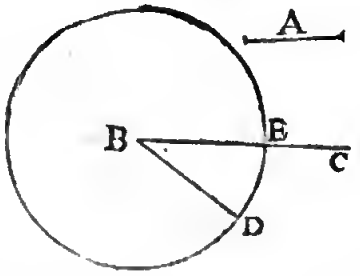
Sia la minore delle rette date A, e la maggiore B C; Dico esser possibile dalla maggiore B C ragliarne vna parte vguale alla minore A.

Costruttione.

Da vno delli estremi della maggiore data B C, come dal punto B, possiamo, per l'antecedente propositione, tirare vna retta linea, vguale

alla

alla data minore A; ſe dunque in queſto luogo concepiremo fatto quanto s'è detto nell' antecedente propoſitione, e la retta tirata dal punto B, vguale alla minore A, ſia B D, fatto centro in B, coll'interuallo B D, ſi deſcriua il circolo D E, il quale ſegarà la maggiore B C in qualche punto E. Dico, che la retta B E ſarà vguale alla data minore A.



Per la definitione del circolo, la retta B E è vguale alla retta B D, ma, per coſtruttione, la retta A è vguale alla medeſima B D, ſarà, per il primo aſſioma, la parte B E vguale alla minore A. Dimoſtrane.

Per la qual coſa dalla maggior retta B C, ſi è tagliata la parte B E, vguale alla minore A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. Concluſione.

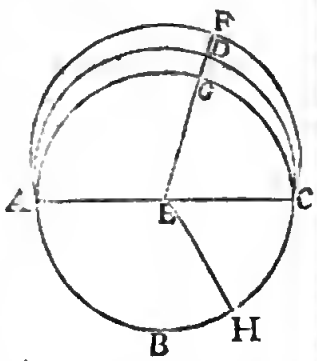
ANNOTATIONE.

Per non laſciare indietro coſ'alcuna, che non ſia eſattamente dimoſtrata, come ancora per facilitare la quarta propoſitione, premetto le ſeguenti dimoſtrationi.

I.

Ogni diametro ſega il circolo, è circonferenza di quello, in due parti vguali.

Sia qualunque circolo A B C D, il di cui centro E, ed il diametro A C. Dico che il Diametro A C diuide il circolo, e la circonferenza AECD in due parti vguali.



Intorno al Diametro AC s'intenda riuoluta la parte ABCE in modo che cada ſopra del rimanente ADCE: ò il piano ABCE cade dentro alla figura ADCE, come fà la notata AGC, ouero cade fuori, come la notata AFC, ò pure congrue con la figura A D C. Suppoſto prima, che cada fuori; ſi prenda nell'arco A F C qualunque punto F, e nell' arco ABC qualunque punto H, e dal centro E alli punti F, H, per il primo poſtulato, ſi tirino le rette E H, E F; la retta E F, ſegarà la circonferenza ADC in qualche punto D, e per la decima quinta definitione, le rette E D, E H, che ſono tirate dal centro E alla circonferenza BCD, ſono frà di loro vguali; e perche tutte le rette, tirate dal centro E alla circonferenza ABC, per la decimaquinta definitione, ſono frà di loro vguali, e la figura ABC riuolta occupa il ſito AFC, in conſeguenza le rette E F, E H ſono frà di loro vguali; ma la retta E D è dimoſtrata vguale alla medeſima retta EH, per il primo aſſioma, la retta E D ſarà vguale alla retta E F, la

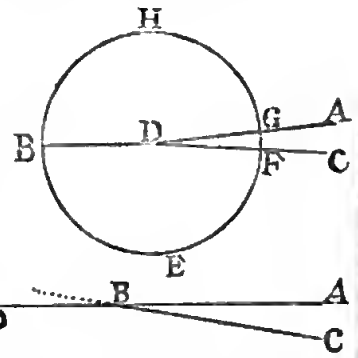
Queſta dimoſtratione è di Talete Mileſio, e proua quel, che ſi ſuppone nella decima ottaua definitione.

F, la parte sarebbe vguale al tutto, che per il nono assioma è impossibile; non dunque cade fuori. Suppoſto di nuouo, che cada di dentro come la notata AGCE: sarà EG vguale ad EH; mà la retta ED è ſtata dimoſtrata vguale ad EH; ſarà, per il primo aſſioma, la retta EG vguale ad ED, la parte vguale al tutto, che per il nono aſſioma, è impoſſibile; non dunque cade di dentro, per la qual coſa riuoluta la figura ABCE, intorno al diametro AC, congruerà con la figura ADCE, dal che l'arco ABC congruerà con l'arco ADC; mà quelle coſe, che congruono inſieme, per l'ottauo aſſioma, ſono frà di loro vguali, ſarà il piano ABCE vguale al piano ADCE, e l'arco ABC vguale all'arco ADC: Per la qual coſa il diametro AC diuide il circolo ABCD, e ſua circonferenza, in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

I I.

Si dimoſtra il decimoterzo aſſioma.

Vna medeſima retta linea non può eſſere parte commune di due rette linee, che ſcambieuolmente concorrono, e non ſono nella medeſima dirittura. Di Proclo.



Concorrano le rette AD, CD, in qualche punto D, e continuate ambedue verſo B, la loro continuatione, s'è poſſibile, ſia la medeſima retta BD, in modo che DB ſia parte di AB, e ſia ancora parte della retta BDC.

Si faccia centro nel concorſo D, ed all'interuallo BD, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo BEG, ſegarà le rette BA, BC, come in G, ed F, e, ſe non le ſega, ſi prolunghino ſinche concorrano con la circonferenza in G, & F.

Perche la retta BDA paſſa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, & G, per la decimaſettima definitione la retta BG ſarà diametro del circolo BEGH, e, per l'antecedente dimoſtratione, diuide il circolo BEGH in due parti vguali, dal che la figura BEGD ſarà la metà del circolo BEGH. Similmente, perche la retta BDF paſſa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed F, per la decimaſettima definitione, la retta BDF è diametro del circolo BEFH, e per l'antecedente dimoſtratione, diuide il circolo in due parti vguali; per la qual coſa la figura BEFD ſarà la metà del circolo BEFH: ma ſi diſſe, che la figura BEGD è metà del medeſimo circolo, ſarà per il ſettimo aſſioma, la figura BEFD vguale alla figura BEGD, la parte ſarebbe vguale al tutto, che per il nono aſſioma, è impoſſibile; non dunque la retta BD è parte commune delle rette BG, BDF, ed in conſeguenza due rette, che concorrono, e non ſono nella medeſima dirittura, non è poſſibile, che habbiano vna parte commune, come ſu propoſto dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto, è manifeſto, che due rette linee, le quali ſcambieuolmente concorrono, e non ſono nella medeſima dirittura, continuate ſi ſegaranno nel punto del concorſo.

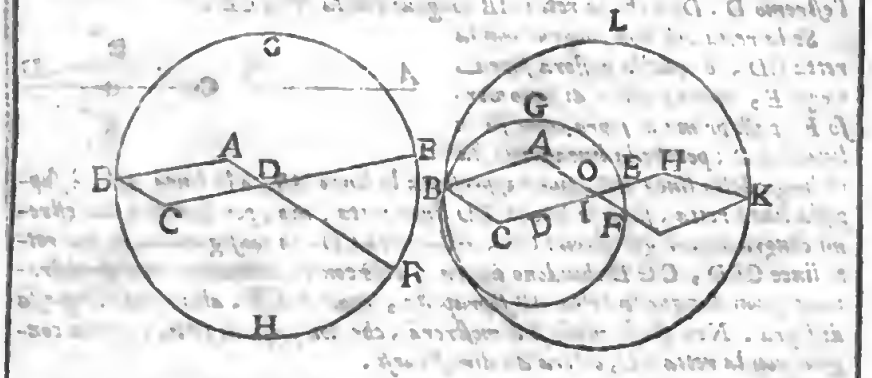
Per-

Perche ſe le rette A B, C B, concorrenti in B, continuate non ſi ſegaſſero in B, la loro continuatione ſarebbe vna ſola retta, come B D, ed all' hora la retta DB ſarebbe parte di D A, ed anco della retta DBC, ch'è contro l'antecedente dimoſtratione.

III.

Due rette linee, che ſcambieuolmente concorrono, è impoſſibile, che poſſano chiudere figura. Di Proclo.

Concorrano le rette linee AB, CB, in qualche punto B, Dico, che non poſſono chiudere figura verſo A, & C, cioè, che continuate le rette AB, CB, verſo A, & C, quelle non concorrono inſieme.



Concorrano s'è poſsibile, in qualche punto D, e, fatto centro in D, coll'interuallo DB, per il terzo poſtulato, ſi deſcriua il circolo BGF, ſi prolunghino, per il ſecondo poſtulato, le rette BAD, BCD, ſino alla circonferenza in E, ed F.

Perche la retta BADF paſſa per il centro D, per la decimaſettima definitione, ſarà diametro del circolo BFE, e, per la prima delle antecedenti dimoſtrationi, diuide la circonferenza del circolo in due parti vguali, dal che l'arco BGEF ſarà la metà di tutta la circonferenza. Similmente, perche la retta BCDE paſſa per il centro D, e concorre con la circonferenza in B, ed E, per la decimaſettima definitione, la retta BCDE ſarà diametro del medeſimo circolo, e per la prima delle antecedenti dimoſtrationi, diuide la circonferenza del circolo BGEF in due parti vguali; per la qual coſa l'arco BGE ſarà la metà di tutta la circonferenza del circolo BFEG, ma l'arco BGEF, per quel, che s'è dimoſtrato, è la metà della medeſima circonferenza, per il ſettimo aſſioma, ſarà l'arco BGE vguale all'arco BGEF, la parte vguale al tutto, che per il nono aſſioma, è impoſſibile: non dunque due rette linee poſſono chiudere figura, ch'era da dimoſtrarſi.

Il P. Clauio rigetta vna nuoua iſtanza, ed è, che le rette BAO, BCO, continuate poſſino andare ad vnirſi in qualche punto K, nella circonferenza del circolo BLK, ed il modo da rigettarle è il ſeguente.

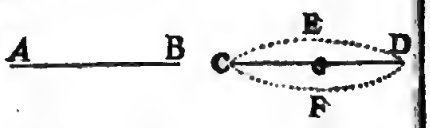
Si prenda nella retta BCO qualunque punto D; eſſendo la retta BCO, per la decimaquinta definitione, vguale alla retta OHK, ſarà BD minore di DHK; ſi che, fatto centro in D, e coll'interuallo DB, ſi deſcriua il circolo BGF, ſegarà le rette AOI, COH, nelli punti, come E, ed F; e, ripetendo le medeſime parole dell'antecedente dimoſtratione, ſi dimoſtrerà, che le rette

BA, BC, continuate non concorrono verſo O, per la qual coſa non poſſono racchiudere figura, ch'era da dimoſtrarſi.

I V.

Se di due rette linee, vna ſia ſoprapoſta all'altra, e gl'eſtremi dell' vna cadono ſopra gl'eſtremi dell'altra, quelle due rette linee congrueranno inſieme.

Siano le due rette linea AB, CD, e ſia la retta A B ſoprapoſta alla retta C D, e ſuppoſto che l'eſtremo A cada ſopra l'eſtremo C, e l'eſtremo B cada ſopra l'eſtremo D. Dico che la retta AB congrue con la retta CD.



Se la retta AB non congrue con la retta CD, ò quella paſſerà ſopra verſo E, ouero paſſerà di ſotto verſo F: paſſi prima di ſopra, come fà la linea CED; perche la linea CED ſtà in luogo della linea AB, cioè rappreſenta la linea AB, e la linea AB, è ſuppoſta linea retta, ſarà la linea CED linea retta; ma, per ipoteſi, i ſuoi eſtremi congruono con gli eſtremi CD, della retta CD, in conſeguenza, le due rette linee CED, C G D chiudono figura, ch'è contro all'antecedente dimoſtratione; non dunque la retta AB ſoprapoſta, come ſi diſſe, alla retta CD, paſſa di ſopra. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che non paſſa di ſotto, e perciò congrue con la retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

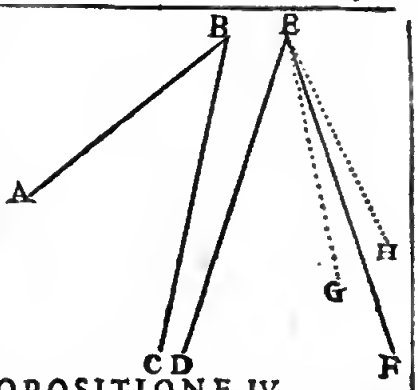
Da quel, che s'è dimoſtrato, è manifeſto, che ſe le rette AB, CD ſono frà di loro vguali, ſoprapoſta l'vna all'altra in modo, che il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D, la retta A B congruerà con la retta C D.

V.

Se di due vguali angoli rettilinei ABC, DEF, vno ſarà ſoprapoſto all' altro, come l'angolo ABC ſopra l'angolo DEF, in modo che la retta BA cada ſopra la retta E D, ed il punto B nel punto E. Dico che la retta BC cade ſopra la retta EF, e l'angolo A B C congrue coll'angolo D E F.

Se la retta BC non cade ſopra la retta EF, ò caderà dentro all'angolo DEF, ouero fuori. Cada prima fuori, come fà la retta EH, per quel, che ſi diſſe nel fine dell'ottaua definitione, l'angolo DEF ſarà minore dell'angolo DEH, mà l'angolo DEH rappreſenta l'angolo ABC, ſarà l'angolo DEF minore dell'an-

golo ABC, ch'è contro all'ipoteſi, mentre fù ſuppoſto l'angolo DEF vguale all'angolo ABC: non dunque la retta BC cade fuori dell'angolo DEF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che non cade dentro, come fà la retta EG, e perciò la retta BC cade ſopra la retta EF. Per la qual coſa gli angoli ABC, DEF, ſoprapoſti l'vno all'altro, congrueranno inſieme, ch'era da dimoſtrarſi.

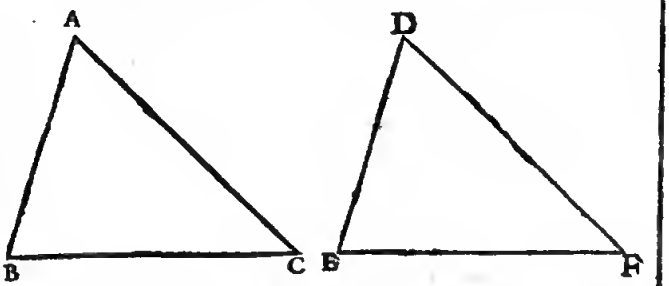


THEOREMA I. PROPOSITIONE IV.

Propoſitione.

Se due lati d'vn triangolo rettilineo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo rettilineo, ogn'vno al ſuo relatiuo, e l'angolo contenuto dalli due lati dell'vno, ſia vguale all'angolo contenuto dalli due lati dell'altro; ſarà la baſe dell'vno vguale alla baſe dell'altro, li rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro; cioè quelli angoli ſaranno frà di loro vguali, che ſono oppoſti à i lati vguali; ed il triangolo ſarà vguale al triangolo.

Eſpoſitione



Siano li triangoli rettilinei ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC, vguale al lato DF, l'angolo A, vguale all'angolo D. Dico, che la baſe BC ſarà vguale alla baſe EF, l'angolo B vguale all'angolo E, (che ſono oppoſti alli vguali lati AC, DF) l'angolo C vguale all'angolo F (che ſono oppoſti alli vguali lati AB, DE) e che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF.

Coſtruttione. Dimoſtratione.

Si concepiſca ſoprapoſto il triangolo ABC al triangolo DEF in modo che il lato AB cada ſopra del lato DE; perche l'interuallo delli eſtremi A B, ſi ſuppone vguale all'interuallo delli eſtremi D, E, poſto il punto A nel punto D, e l'eſtremo B nell'eſtremo E, la retta AB, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, congruerà col lato DE; ed eſſendo l'angolo A vguale all'angolo D, per il numero 5. della citata annotatione, la retta AC caderà ſopra la retta DF, e l'angolo A congruerà coll'angolo D: e perche la retta AC è poſta vguale alla retta DF, il punto C ca-

derà nel punto F. Hor perche il punto B cade nel punto E, ed il punto C cade nel punto F, per il numero 4. dell'antecedente annotatione, la baſe BC congruerà con la baſe EF, e per l'ottauo Aſſioma, la baſe BC ſarà vguale alla baſe EF; e perche tutti trè i lati AB, BC, CA, che ſono eſtremi del triangolo ABC, congruono con i trè lati DE, EF, FD, che ſono eſtremi del triangolo DEF, tutto il triangolo ABC congruerà col triangolo DEF; l'angolo B congruerà coll'angolo E, e l'angolo C coll'angolo F; ma quelle coſe che congruono inſieme, per l'ottauo Aſſioma, ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F, ed il triangolo A B C, vguale al triangolo DEF.

Concluſione. Per la qual coſa, quando due lati d'vn triangolo rettilineo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo tertilineo, e l'angolo contenuto &c. eh' era da dimoſtrarſi.

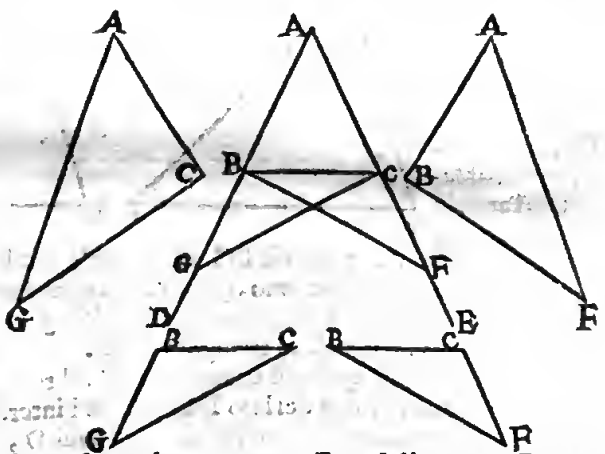
ANNOTATIONE.

Nelle coſe ſeguenti ſempre che ſi nominerà il triangolo, ſenz'altra conditione, ſi deue intendere triangolo rettilineo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE V.

Propoſitione. **Delli triangoli iſoſceli, gl'angoli ſopra la baſe ſono frà di loro vguali, e continuati i lati vguali verſo la baſe, gli angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.**

Eſpoſitione Sia il triangolo iſoſcele ABC, cioè che il lato A B ſia vguale al lato AC. Dico che gli angoli ABC, ACB, ſopra la baſe BC, ſono frà di loro vguali. E continuati i lati vguali A B, AC verſo E, & D, li angoli D B C, E C B ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.



Coſtruttione. Nella retta CE ſia preſo qualunque punto F, e dalla retta AD, per la terza propoſitione, ſi tagli la parte AG, vguale alla retta AF, ſi tirino le rette GC, BF.

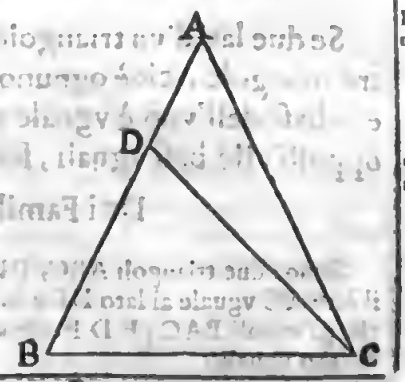
Dimoſtratione. Si conſiderino i triangoli ABF, ACG; perche il lato A G è fatto vguale al lato AF, ed il lato AC è ſuppoſto vguale al lato AB, li due la-

ti FA, AB, del triangolo A B F, ſono vguali alli due lati G A, A C del triangolo AGC, l'angolo A dell'vno è vguale all'angolo A dell'altro, ſtante che è commune à tutti due li triangoli, e, per la quarta propoſitione, la baſe GC, del triangolo GAC ſarà vguale alla baſe BF, del triangolo ABF, ed i rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli, che ſono oppoſti à i lati vguali; e perciò l'angolo ABF ſarà vguale all'angolo ACG, ſtante che ſono oppoſti alli vguali lati AG, AF; e l'angolo A G C ſarà vguale all'angolo AFB, che ſimilmente ſono oppoſti alli vguali lati AB, AC. Hor ſe dalli vguali lati AG, AF, ſe ne leuano gli vguali lati AB, AC, reſtà il lato B G vguale al lato CF. In oltre ſi conſiderino li due triangoli BGC, FCB: perche il lato BG è ſtato moſtrato vguale al lato C F; ed il lato G C vguale al lato BF, i due lati B G, G C, del triangolo B G C, ſono vguali alli due lati CF, FB del triangolo FCB, l'angolo BGC fù dimoſtrato vguale all'angolo CFB, e, per la quarta propoſitione, la baſe B C dell'vno ſarà vguale alla baſe CB dell'altro, cioè ſarà baſe commune, e li rimanenti due angoli dell'vno ſaranno vguali alli rimanenti due angoli dell'altro, cioè quelli ſono vguali, che ſono oppoſti à i lati vguali, e così gli angoli GBC, FCB ſaranno frà di loro vguali, ſtante che ſono oppoſti alli vguali lati GC, FB; e ſimilmente gl'angoli FBC, GCB ſono frà loro vguali, che ſono oppoſti alli vguali lati BG, CF. Hor perche gli angoli ABF, ACG furono dimoſtrati frà loro vguali, ſe da queſti ſe ne leuano gli vguali angoli GCB, FBC, reſtano gli angoli ABC, ACB, ſopra la baſe, frà di loro vguali, e perche gli angoli GBC, FCB furono dimoſtrati vguali, e queſti ſono angoli ſotto la baſe BC, in conſequenza gli angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali.

Per la qual coſa delli triangoli Iſoſceli gl'angoli ſopra la baſe ſono frà di loro vguali, e, continuati i lati vguali ſotto la baſe, gl'angoli ſotto la baſe ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi. Conclusione.

THEOREMA III. PROPOSITIONE VI.

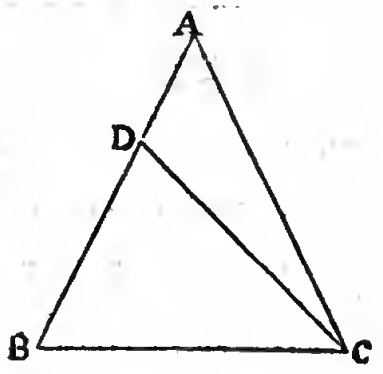
Se due angoli d'vn triangolo ſono frà di loro vguali, i lati oppoſti à gl'angoli vguali ſono frà di loro vguali. Propoſitione.



Sia il triangolo A B C, del quale l'angolo A B C ſia vguale all'angolo ACB. Dico che il lato AC è vguale al lato AB. Eſpoſitione.

Se il lato AB non è vguale al lato AC, vno delli due ſarà maggiore; ſuppoſto che il lato AB ſia maggiore del lato A C, ſi può per la terza propoſitione, dal maggior lato A B tagliarne vna parte vguale al minor lato AC, ſia dunque fatto, e ſia DB vguale ad AC, ſi tiri la retta D C. Coſtruttione.

Dimoſtratione.



Si conſiderino li due triangoli A B C, DCB; perche il lato DB, per coſtruttione, è vguale al lato AC, ed il lato B C è lato commune di tutti due li triangoli, perciò li due lati D B, BC, del triangolo DCB, ſono vguali alli due lati AC, CB del triangolo ABC, l'angolo DBC, per ipoteſi, è vguale all'angolo A C B, e, per la quarta propoſitione, il triangolo D C B ſarà vguale al triangolo ABC, la parte vguale al tutto, che, per il nono aſſioma, è impoſſibile, non dunque il lato AB è maggiore del lato AC, ed in conſeguenza i lati AB, AC ſono frà di loro vguali.

Concluſione.

Per la qual coſa, quando due angoli d'vn triangolo ſono frà di loro vguali, i lati oppoſti alli angoli vguali ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VII.

Quando dalli eſtremi d'vna retta linea eſcono due rette, e concorrono in qualche punto, ſe dalli medeſimi eſtremi eſcono due altre rette linee vguali alle prime in modo, che quelle ch'eſcono dal medeſimo punto ſiano frà di loro vguali, e tutte ſiano diſteſe dalla medeſima parte, le ſeconde paſſaranno ſopra le prime, e concorreranno nel medeſimo punto:

Queſta propoſitione ſi laſcia per non eſſer neceſſaria.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VIII.

Propoſitione.

Se due lati d'vn triangolo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo, cioè ognuno vguale al ſuo corriſpondente, e la baſe dell'vno è vguale alla baſe dell'altro, gli angoli, oppoſti alle baſi vguali, ſono frà di loro vguali.

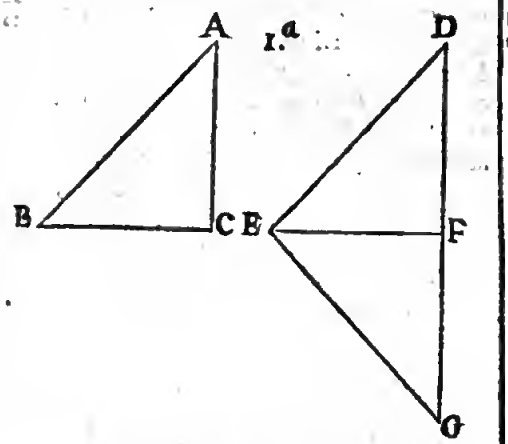
De i Familiari di Filone.

Eſpoſitione.

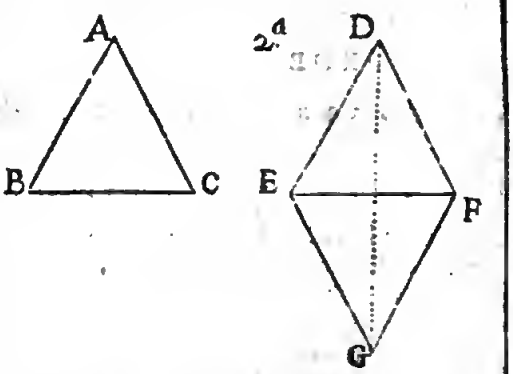
Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e la baſe BC vguale alla baſe EF. Dico, che gl'angoli BAC, E D F oppoſti alle vguali baſi B C, E F ſono frà di loro vguali.

Si concepiſca traſportaro il triangolo ABC nel modo, che ſi vede norato per le lettere G F E ralmente, che la baſe BC cada ſopra la baſe EF in modo, che il punto B cada nel punto E, il punto C cada nel punto F, e l'angolo A cada come in G. Perche le baſi B C, E F ſono ſuppoſte vguali, per il Corollario al numero 4. della paſsata Annotatione, congrueranno inſieme. Costruttione.

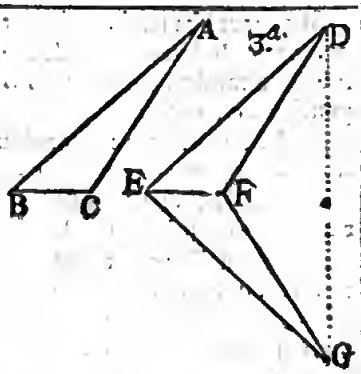
O i lati D F, F G, coſtituiſcono vna ſola retta linea, come nella prima figura, ò inclinano fuori, come nella ſeconda figura, ouero inclinano dentro, come nella terza figura. Suppoſto prima, che facciano vna ſola retta linea, come nella prima figura. Perche il lato EG rappreſenta il laro AB, ed il laro DE, per ipoteſi, è vguale al medeſimo lato A B, per il primo aſſioma, il lato DE ſarà vguale al lato E G, ed il rriangolo D E G ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſitione, gli angoli EDG, EGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; ma l'angolo G rappreſenra l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. Dimoſtratione.



Inclinino i lati D F, FG di fuori, come nella ſeconda figura, ſi riri la retta D G. Perche il lato EG rappreſenra il lato AB, ed il lato DE è poſto vguale al lato AB, ſarà per il primo aſſioma, il lato DE vguale al lato EG, il triangolo E GD ſarà iſoſcele, e, per la quinta propoſirione, gli angoli EGD, EDG, ſopra la baſe D G, ſono frà di loro vguali. Similmente, perche il laro FG rappreſenta il lato AC, ed il lato F D, per ipoteſi, è vguale al lato AC, ſarà il laro DF vguale al lato FG, e, per la quinta propoſitione, gli angoli FDG, FGD, ſopra la baſe DG, ſono frà di loro vguali; à queſti s'aggiungano gli vguali angoli EDG, EGD, cioè ad ogni vno il ſuo contiguo, ne viene, per il ſecondo aſſioma, l'angolo EDF vguale all'angolo EGF: ma l'angolo EGF rappreſenta l'angolo A, ſarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimoſtrarſi nel 2. luogo.



Final-



Finalmente inclinino i lati DF, FG di dentro, come nella terza figura, si tiri la retta DG. Perche il lato GE rappresenta il lato AB, ed il lato DE è posto vguale ad AB, sarà DE vguale ad EG, il triangolo EGD sarà isoscele, e, per la quinta propositione, gli angoli EGD, EDG, sopra la base DG, sono frà di loro vguali. Similmente, perche il lato FG rappresenta il lato AC, ed il lato FD è posto vguale ad AC, sarà il lato FD vguale al lato FG, e, per la quinta propositione, gli angoli FDG, FGD, sopra la base DG sono frà di loro vguali; se dalli vguali angoli EGD, EDG se ne detraggono gli vguali angoli FGD, FDG, restano gl'angoli EGF, EDF frà di loro vguali, mà l'angolo EGF rappresenta l'angolo A, sarà l'angolo A vguale all'angolo EDF, ch'era da dimostrarsi.

ANNOTATIONE.

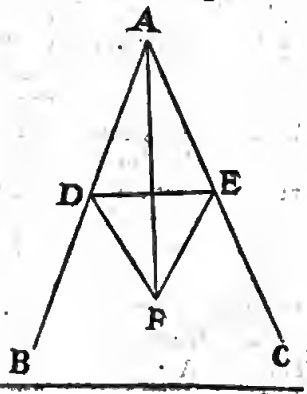
Nelle propositioni seguenti le citationi non si porranno in corpo alle propositioni, come s'è fatto sin quì, mà si porranno nel margine, con le letterine in testa, che corrisponderanno a quelle, poste nel corpo della propositione, è dinoteranno, che iui deue esser considerata tale citatione; oltre à ciò non si porrà più nel margine quale sia la propositione, e quale l'espositione, e costruttione, perche stimo esser sufficiente hauerle poste nelle propositioni antecedenti.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IX.

Dato vn angolo rettilineo, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'angolo rettilineo, BAC, da diuidersi in due parti vguali.

Si prenda nella retta AB qualunque punto D, dalla retta AC, [a] si tagli la parte AE vguale ad AD, e si tiri [b] la retta DE; sopra la retta DE si descriua il triangolo equilatere DFE, dal punto F al punto A [c] si tiri la retta FA. Dico che la retta FA diuide l'angolo BAC in due parti vguali.



Si considerino i due triangoli ADF, FEA: perche il lato AE è fatto vguale al lato AD, ed il lato AF è lato commune di ambidue i triangoli, perciò i due lati DA, AF, del triangolo ADF, [e] sono vguali alli due lati EA, AF del triangolo AEF; la ba-

[a] 3. Propositione.
[b] 1. Postul.
[c] 1. Propositione.
[d] 1. Postul.
[e] 8. Assioma

ſe DF, per coſtruttione, è vguale alla baſe EF (ſtante che ſono lati del triangolo equilatere) ſarà l'angolo DAF, [f] ch'è oppoſto alla baſe DF, vguale all'angolo EAF, ch'è oppoſto alla baſe FE: per la qual coſa l'angolo BAC è diuiſo dalla retta AF in due parti vguali, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

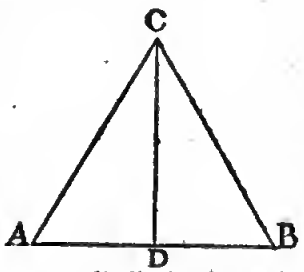
[f] 8. Propoſitione.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE X.

Data vna retta linea terminata, diuiderla in due parti vguali.

Sia la data retta linea terminata AB, la quale ſi voglia diuidere in due parti vguali.

Sopra la retta AB, [a] ſi deſcriua il triangolo equilatere ABC; poi ſi diuida l'angolo ACB [b] in due parti vguali con la retta CD. Dico che la retta CD continuata, ſega la retta AB in due parti vguali, come in D.



Si conſiderino i due triangoli CDB, CDA: perche il lato CA è vguale al lato CB (per eſſer lati del triangolo equilatere) ed il lato CD è lato commune d'ambidue i triangoli, ſaranno li due lati AC, CD, del triangolo ACD, [c] vguali alli due lati BC, CD, del triangolo CDB, l'angolo ACD, per coſtruttione, è vguale all'angolo BCD, ſarà la baſe AD [d] vguale alla baſe DB. Per la qual coſa la retta AB è diuiſa in due parti vguali in D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

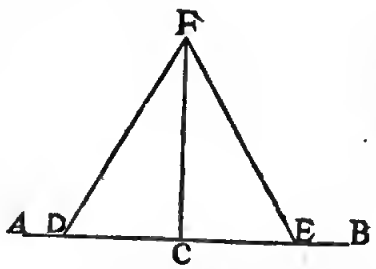
[a] 1. Propoſitione.
[b] 9. Propoſitione.
[c] 1. aſſioma.
[d] 4. Propoſitione.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XI.

Data vna retta linea, ed vn punto in eſſa, erigere in quel punto vna retta perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB, ed il punto in eſſa C, ſi vuole nel punto C erigere vna retta linea perpendicolare alla data AB.

Si prenda in AC qualunque punto D, dalla retta CB [a] ſe ne tagli la parte CE vguale alla retta CD; ſopra la retta DE [b] ſi deſcriua il triangolo equilatero FDE, dal punto F al punto C [c] ſi tiri la retta FC. Dico che la retta FC è perpendicolare ad AB.



Si conſiderino li triangoli FCE, FCD: perche il lato CE, per coſtruttione, è vguale al lato CD, ed il lato FC è commune ad ambidue li triangoli, i due lati EC, CF, del triangolo ECF [d] ſono vguali alli due

[a] 3. Propoſitione.
[b] 1. Propoſitione.
[c] 1. Poſtulato.
[d] 2. aſſioma.

lati

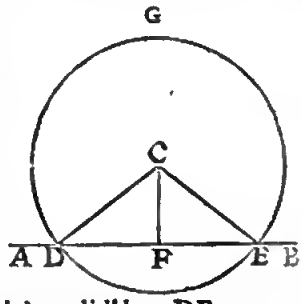
lati DC, CF del triangolo DCF, la baſe FE è vguale alla baſe FD (ſtante che ſono lati del triangolo equilatere FDE), pereiò l'angolo FCE, [c] oppoſto alla baſe FE, ſarà vguale all'angolo FCD, oppoſto alla baſe FD: ma, per la decima definitione, quando vna retta linea cade ſopra d'vn' altra, e fà gli angoli dall'vna, e l'altra parte vguali, quelli gli habbiamo chiamati angoli retti, e la retta linea, che cade, perpendicolare à quella ſopra la quale cade; eſſendoſi dimoſtrato, che gli angoli FCD, FCE ſono vguali, in conſequenza ſono angoli retti, e la retta linea FC ſarà perpendicolare alla retta AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[c] 8. Propoſitione.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XII.

Data vna retta linea indeterminata, ed vn punto fuori di eſſa, far cadere da quel punto vna retta linea perpendicolare alla data.

Sia data la retta linea AB indeterminata, ed il punto fuori di eſſa ſia C, ſi vuole dal punto dato C far cadere vna retta perpendicolare alla data AB.



Si faccia centro nel dato punto C, ed à qualunque interuallo, purche ſeghi la retta AB, [a] ſi deſcriua il circolo DEG; il quale ſegarà la retta AB nelli punti come D, ed E: ſi diuida la retta DE [b] in due parti vguali in F, dal dato punto C al punto F [c] ſi tiri la retta CF. Dico che la retta CF è perpendicolare alla data retta AB.

[a] 3. Poſtulato.
[b] 10. Propoſitione.
[c] 1. Poſtulato.

Per dimoſtrar queſto dal punto C alli pũti D, E [d] ſi tirino le rette CD, CE,

[d] 1. Poſtul.

Si conſiderino li due triangoli CFD, CFE, de' quali il lato DF, per coſtruttione, è vguale al lato FE, il lato CF è commune ad ambidue: li due lati dunque CF, FD, del triangolo CFD, [e] ſono vguali alli due lati CF, FE, del triangolo CFE, la baſe CD, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe CE, farà l'angolo CFD, [f] oppoſto alla baſe CD, vguale all'angolo CFE, oppoſto alla baſe CE, e, per la decima definitione, gli angoli CFD, CFE ſono retti, e la retta CF è perpendicolare alla retta AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

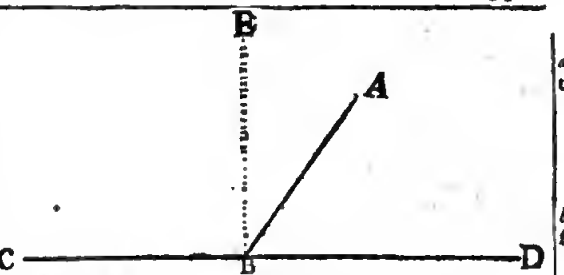
[e] 2. Aſſioma
[f] 8. Propoſitione.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE XIII.

Se vna retta linea cade ſopra d'vn' altra linea retta, gli angoli, che fa dall'vna, e l'altra parte, ò ſono angoli retti, ouero inſieme giunti ſono vguali à due angoli retti.

Cada la retta AB ſopra la retta CD, e faccia li due angoli ABC, ABD. Dico che queſti due angoli, ò ſono angoli retti, ouero preſi inſieme ſono vguali à due angoli retti.

Se



Se la retta AB è perpendicolare alla retta CD, [a] gli angoli ABC, ABD sono angoli retti. Se poi la retta AB non è perpendicolare alla retta CD, nel punto B, sopra la retta CD, [b] si erigga la perpendicolare BE, laonde gli angoli EBD, EBC, [c] saranno angoli retti.

[a] 10. definitione.

[b] 11. propositione.

[c] 10. definitione.

Perche gli angoli EBA, ABD, insieme giunti, sono vguali à tutto l'angolo EBD, che lo compongono, e l'angolo EBD, è retto, in conseguenza gli angoli EBA, ABD, giunti insieme, sono vguali ad vn'angolo retto; se gli aggiũghi l'angolo retto EBC, li tre angoli EBC, EBA, ABD, [d] insieme giunti, saranno vguali à due angoli retti.

[d] 2. assioma.

Di nuouo, perche li due angoli ABE, EBC, giunti insieme sono vguali all'angolo ABC, che lo compongono, tanto all'angolo ABC, quãto alli angoli ABE, EBC, giunti insieme, s'aggiunghi l'angolo ABD, ne verranno li due angoli ABC, ABD [e] vguali alli tre angoli CBE, EBA, ABD: mà li tre angoli CBE, EBA, ABD, furono dimostrari vguali à due angoli retti; li due angoli dunque ABC, ABD, [f] giunti insieme sono vgnali à due angoli retti, ch'era da dimostrarsi.

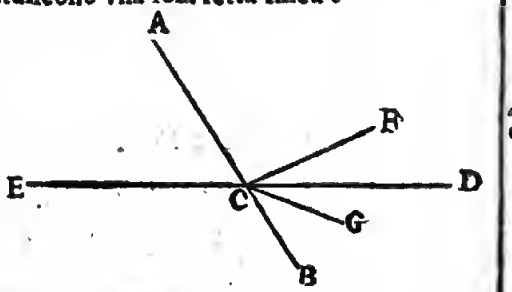
[e] 2. assiom.

[f] 1. assioma.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE XIV.

Se da vn punto, preso in qualche retta linea, sono tirate due rette linee, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte, le quali facciano con la prima retta, due angoli vguali à due angoli retti; quelle due rette linee saranno poste in vna medesima drittura e constituiranno vna sola retta linea.

Sia qualunque retta linea AB nella quale sia preso qualche punto C, e dal punto C si concepischino tirate due rette linee come CE, CD, cioè la retta CE tirata da vna parte, e la retta CD dall'altra in modo, che gli angoli ACE, ACD, insieme giunti, siano vguali à due angoli retti. Dico che le rette CE, CD costituiscono vna sola retta linea.

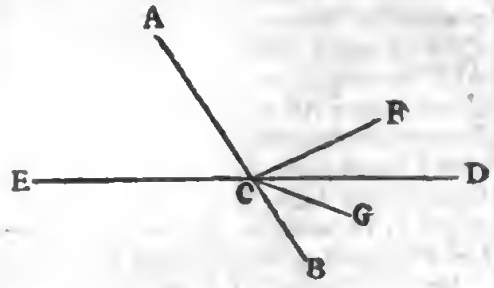


Se le rette CE, CD non costituiscono vna sola retta linea, continuata la retta EC, [a] la continuatione ò passarà sopra la retta CD, come la notata CF, ouero passerà sotto, come la notata CG: passi prima di sopra come fà la retta CF.

[a] 2. postulato.

Perche la linea ECF rap-

presenta vna sola retta linea, sopra la quale cade la retta A C gli due angoli ACE, A C F [b] sono vguali à due angoli retti, mà per ipotesi li due angoli ACE, ACD sono ancora vguali à due angoli retti, li due angoli dūque ACE, ACF [c] sono vguali alli due angoli A C E, A C D; Se ne leui il comune angolo ACE, resta l'angolo ACF [d] vguale all'angolo ACD, la parte vguale al tutto, [e] ch'è impossibile; non dunque la continuatione CF passa sopra della retta CD. Nell'istesso modo si dimostrerà, che non passa di sotto, come fa la retta CG, in consequenza, continuata la retta EC, quella passerà per la dirittura CD. Per la qual cosa le rette EC, CD costituiscono la sola retta ECD, ch'era da dimostrarsi.

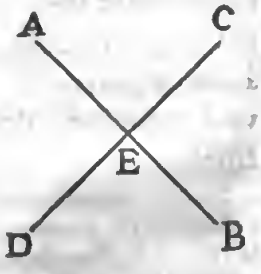


b 13. propositione.
c 10. assioma.
d 3. assioma.
e 9. assioma.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE XV.

Se due rette linee scambieuolmente si segano, gli angoli al vertice sono frà di loro vguali.

Si seghino le rette AB, CD, in qualche punto E. Dico che gli angoli AEC, DEB, al vertice E, sono frà di loro vguali, e che gli angoli AED CEB al vertice, sono frà di loro vguali. Cade la retta AE sopra la retta CD, e fà gl'angoli AED, AEC [a] vguali à due angoli retti. Similmente cade la retta CE sopra la retta AB e fà gli angoli AEC, CEB [b] vguali à due angoli retti: dal che li due angoli AED, AEC [c] saranno vguali alli due angoli AEC, CEB; Se ne leui vgualmente il cōmune angolo AEC resta l'angolo AED [d] vguale all'angolo CEB, al vertice. In oltre, cada la retta BE sopra la retta CD, e fà li due angoli DEB, BEC [e] vguali à due angoli retti, mà li due angoli AEC, CEB, si disse essere vguali à due angoli retti; li due angoli dunque DEB, BEC, [f] sono vguali alli due angoli AEC, BEC; se ne leui vgualmente il commune angolo BEC, resta l'angolo AEC [g] vguale all'angolo DEB al vertice, ch'era da dimostrarsi.



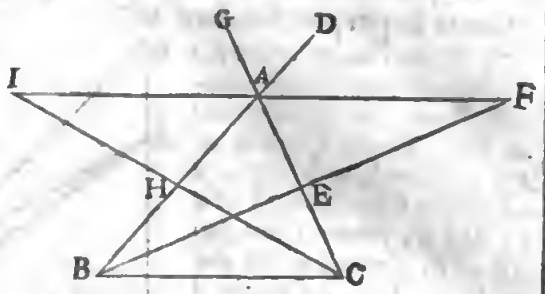
a 13. propositione.
b 13. propositione.
c 10. assioma.
d 3. assioma.
e 13. propositione.
f 10. assioma.
g 3. assioma.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XVI.

Continuato vn lato di qualunque triangolo rettilineo, l'angolo esterno è maggiore di ciascheduno delli angoli interni ed opposti.

Sia

Sia il triangolo rettilineo ABC, e di quello ſia continuato qualunque lato BA verſo D. Dico che l'angolo eſterno DAC è maggiore dell'angolo ACB interno, ed oppoſto, & è anco maggiore dell' altro angolo interno, ed oppoſto A B C.



Si diuida il lato AC [a] in due parti vguali in E, dal punto B al punto E [b] ſi tiri la retta BE, la quale ſi prolunghi [c] verſo F, ſi faccia EF [d] vguale alla retta EB, e ſi tiri [e] la retta AF.

Si conſiderino li due triangoli AEF, EBC; perche il lato AE, per coſtruttione, è vguale al lato EC, ed il lato EF è fatto vguale al lato EB; li due lati AE, EF, del triangolo AEF, [f] ſaranno vguali alli due lati CE, EB, del triangolo EBC, gli angoli al vertice AEF, CEB [g] ſono frà di loro vguali, e per la quarta propoſitione, la baſe AF ſarà vguale alla baſe BC, e l'angolo FAE ſarà vguale all'angolo ECB, per eſſere oppoſti alli vguali lati FE, EB. Hor perche l'angolo DAC [h] è maggiore dell'angolo FAE, che lo contiene, e l'angolo FAE, è dimoſtrato vguale all'angolo ECB, ſarà l'angolo eſterno DAC, maggiore dell'angolo ECB, cioè dell'angolo ACB interno, ed oppoſto. Di nuouo s'intenda continuato il lato AC verſo G, e ſi proui, come prima s'è fatto, che l'angolo eſterno GAB, è maggiore dell'angolo ABC; cioè ſi diuida AB [k] in due parti vguali in H, ſi tiri [l] la retta CH, la quale ſi prolunghi [m] verſo I, e ſi faccia IH [n] vguale ad HC, ſi tiri [o] la retta AI, ed hauremo due triangoli AHI, HBC, de' quali li due lati AH, HI, ſono, per coſtruttione, vguali à i due lati BH HC, gli angoli AHI, BHC, [p] al vertice, ſono frà di loro vguali; dal che la baſe AI [q] ſarà vguale alla baſe BC, e l'angolo IAH vguale all'angolo HBC; mà l'angolo GAB è maggiore dell'angolo IAH, perche lo contiene, ſarà l'angolo GAB [r] eſterno, maggiore dell'angolo ABC interno, ed oppoſto. Finalmente perche le rette DB, GC ſi ſegano ſcambieuolmente in A, gli angoli al vertice GAB, DAC, [s] ſono frà di loro vguali; mà l'angolo GAB è dimoſtrato maggiore dell'angolo ABC, l'angolo dunque DAC [t] ſarà maggiore dell'angolo ABC; per la qual coſa l'angolo eſterno DAC è maggiore dell'angolo interno ed oppoſto ACB, ed ancora dell'angolo ABC, eh'era da dimoſtrarſi.

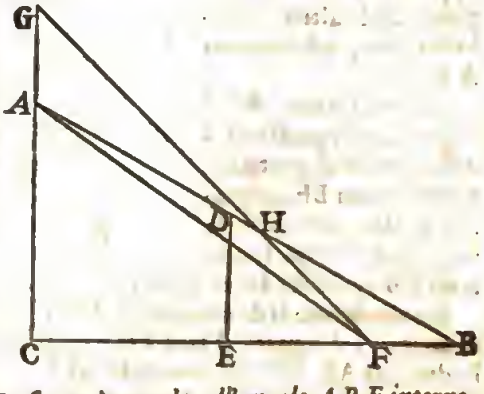
[a] 10. propoſ.
[b] 1. poſt.
[c] 2. poſt.
[d] 3. propoſ.
[e] 3. poſt.
[f] 2. aſſiom.
[g] 15. 4 10. propoſ.
[h] 9. aſſiom.
[i] 8. aſſiom.
[k] 10. prop.
[l] 1. poſt.
[m] 2. poſt.
[n] 3. propoſ.
[o] 2. poſt.
[p] 15. propoſ.
[q] 4. propoſ.
[r] 1. aſſiom.
[s] 15. propoſ.
[t] 1. aſſiom.

SCOLIO.

Coll'antecedente propoſitione ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Se ſarà qualche angolo acuto A B C, e da varij punti A, & D, preſi nella retta A B, cadano ſopra la retta CB quante ſi voglia perpendicolari A C, D E; Dico che la più

vicina all'angolo B ſarà minore, cioè ſe il punto E, ouero D ſarà più vicino al punto B, la perpendicolare DE ſarà minore la perpendicolare AC.



Se AC non è maggiore di DE, ò ſarà vguale, ouero minore. Suppoſto prima, che AC ſia vguale ad ED, ſi faccia CF vguale ad EB, e ſi tiri la retta AF; ſi conſiderino li due triangoli ACF, DEB. Perche i due lati AC, CF, ſono vguali alli due lati DE, EB, e l'angolo ACF è vguale all'angolo DEB, ſarà la baſe AF vguale alla baſe AB, e l'angolo AFC vguale all'angolo DBE: ſi che nel triangolo ABF, l'angolo AFC eſterno è vguale all'angolo ABF interno, ed oppoſto, ch'è contro all'antecedente propoſitione; non dunque AC è vguale alla retta DE.

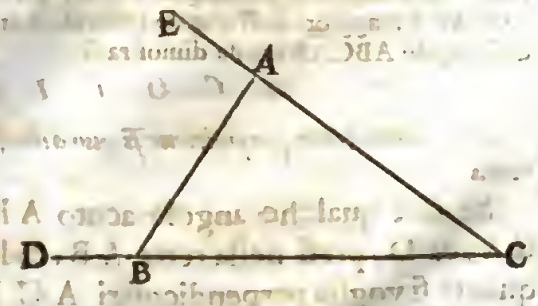
Di nuouo ſuppoſto, che AC ſia minore di DE; ſi prolunghi CA verſo G, e ſi faccia CG vguale ad ED, ſi tiri la retta GF, la quale ſegarà la retta AB in qualche punto H, e conſiderando i triangoli GCF, DEB, ſi prouerà come prima, che l'angolo GFC è vguale all'angolo DBE, ſi che nel triangolo HBF l'angolo eſterno HFC è vguale all'interno, ed oppoſto HBF, ch'è contro all'antecedente propoſitione. Non dunque la retta AC è minore di DC, non è vguale, per quel che s'è dimoſtrato, e perciò ſarà maggiore, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XVII.

Due angoli di qualunque triangolo rettilineo preſi, come ſi voglia ſono minori di due angoli retti.

Sia qualunque triangolo rettilineo ABC. Dico che li due angoli ABC ACB, preſi inſieme, ſono minori di due angoli retti; che li due angoli CAB, CBA ſono minori di due retti; e che li due angoli BAC, BCA ſono minori di due retti.

Si continui il lato CB [a] verſo D, l'angolo DBA [b] è maggiore dell'angolo BCA interno, ed oppoſto, tanto al maggior angolo DBA, quanto al minor angolo C, s'aggiunga l'angolo ABC; li due angoli ABC, ACB inſieme [c] ſaranno minori delli



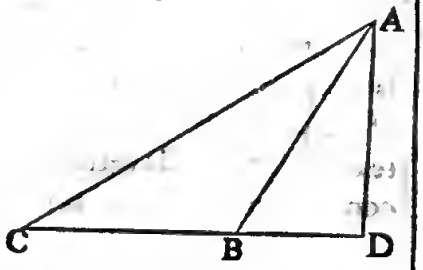
due

[a] 2. poſt.
[b] 16. propoſ.
[c] 4. aſſiom.

due angoli ABD, ABC, ma li due angoli ABD, ABC, [d] ſono vguali à due angoli retti, perciò i due angoli ABC, ACB [e] ſono minori di due angoli retti. Similmente, perche l'angolo DBA eſterno [f] è maggiore dell'angolo CAB interno, ed oppoſto; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo CBA, i due angoli CAB, CBA, [g] faranno minori de i due angoli DBA, CBA; ma li due angoli DBA, CBA [b] ſono vguali à due angoli retti: li due angoli dunque CAB, CBA ſono minori di due angoli retti: Nell'iſteſſo modo, continuando il lato CA verſo E, ſi prouerà, che li due angoli BAC, BCA ſono minori di due angoli retti, come fù propoſto dimoſtrare.

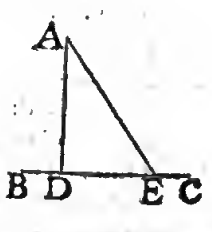
[d] 13. propoſ.
[e] 1. aſſiom.
[f] 16. propoſ.
[g] 4. aſſiom.
[b] 13. propoſ.

COROLLARIO I.



Dall'antecedente propoſitione ſi caua, che ſe vna retta linea, come AB, ſega qualche altra retta linea, CD, ad angoli obliqui, cioè che l'vno come ABC ſia ottuſo, e l'altro ABD acuto, ſe dal punto A cade vna retta perpendicolare alla retta CD, quella caderà dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD; perche, ſe non cade dalla parte dell'angolo acuto, cada, s'è poſſibile, dalla parte dell'angolo ottuſo, come fà la retta AC; perche l'angolo ACB è retto, e l'angolo ABC è ottuſo, i due angoli ABC, ACB, del triangolo ACB; non ſono minori di due angoli retti, ch'è contro all'antecedente propoſitione; non dunque la perpendicolare cade dalla parte dell'angolo ottuſo, ma cade dalla parte dell'angolo acuto, come fà la retta AD.

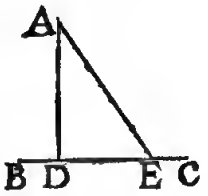
COROLLARIO II.



Da quelche s'è detto, ſi caua ancora, che ſe da qual che pũto cade vna retta perpendicolare ad vn'altra retta, quella è la minima di tutte l'altre tirate dal medeſimo punto à

quel-

quella retta. Per esempio, se dal punto A cade la retta A D perpendicolare alla retta B C, sarà A D la minima di tutte quelle rette, che dal punto A possono esser tirate alla retta B C. Si prenda in B C, fuori del punto D, qualunque punto E, e si tiri la retta A E; li due angoli A D E, A E D, per l'antecedente propositione, sono minori di due angoli retti, ma l'angolo A D E è retto, sarà l'angolo A E D minore del retto, e perciò l'angolo A D E sarà maggiore dell'angolo A E D, e, per la 19. propositione, il lato A E sarà maggiore di A D; e perche il punto E è preso ad arbitrio, perciò tutte le rette tirate dal punto A alla retta B C sono maggiori di A D, ed in conseguenza A D sarà la minima.



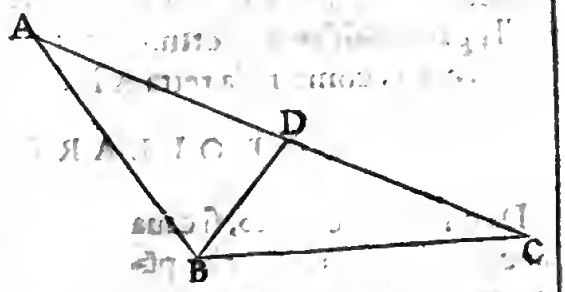
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVIII.

L'angolo opposto al maggior lato di qualunque triangolo rettilineo, è maggiore dell'angolo opposto al minor lato.

Nel triangolo rettilineo A B C, sia il lato A C maggiore del lato A B. Dico che l'angolo A B C, opposto al maggior lato A C, è maggiore dell'angolo A C B, opposto al minor lato A B.

Dal maggior lato A C [a] se ne tagli la parte A D vguale al minor lato A B, e si tiri [b] la retta B D.

Perche il lato A D è fatto vguale al lato A B, il triangolo A B D [c] sarà isoscele, e gli angoli A B D, A D B, sopra la base D B [d], sono frà di loro vguali; e perche, nel triangolo D B C, è continuato il lato D C in A, l'angolo A D B esterno [e] è maggiore dell'angolo C interno, ed opposto, mà l'angolo A D B, è mostrato vguale all'angolo A B D, sarà l'angolo A B D [f] maggiore dell'angolo C. Per la qual cosa l'angolo A B C, [g] opposto al maggior lato A C;



a 3. propos.
b 1. postulat.
c 24. defin.
d 5. propos.
e 16. propos.
f 1. assiom.
g 9. assiom.

è mag-

è maggiore dell'angolo C, opposto al minor lato AB; ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIX.

Il lato opposto al maggior'angolo di qualunque triangolo rettilineo, è maggiore del lato opposto al minor'angolo.

Nel triangolo ABC sia l'angolo B maggiore dell'angolo C. Dico che il lato AC opposto al maggior angolo B, è maggiore del lato AB opposto al minor angolo C.

Se il lato AC non è maggiore del lato AB, ò sarà minore, ouero vguale. Supposto prima, che il lato AC sia vguale al lato AB, in tal caso il triangolo ABC sarà isoscele, e gli angoli ABC, ACB [b] sopra la base BC, saranno frà di loro vguali, ch'è contro al nostro supposto; non dunque il lato AC è vguale al lato AB. Di nuouo supposto che il lato AC sia minore del lato AB, all'hora l'angolo B, opposto al minor lato AC, sarà minore dell'angolo C, opposto al maggior lato AB; mà si è supposto l'angolo B maggiore dell'angolo C, sarebbe l'angolo B maggiore, e minore dell'angolo C, ch'è impossibile; non dunque il lato AC è minore del lato AB, non è vguale, per quel che s'è dimostrato; in conseguenza il lato AC sarà maggiore del lato AB, come fù proposto dimostrare.

[a] 24. defin.
[b] 5. propos.
[c] 18. propos.

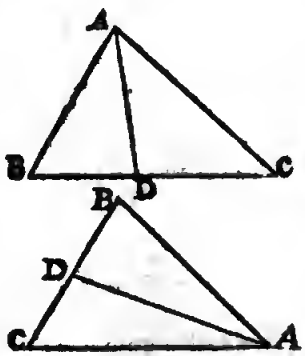
THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XX.

Due lati di qualunque triangolo rettilineo, presi come si voglia, sono maggiori del terzo lato.

Di Proclo.

Sia il triangolo ABC. Dico che li due lati AB, BC, insieme giunti, sono maggiori del terzo lato AC; che li due BC, CA, sono maggiori del terzo AB, e che li due BA, AC sono maggiori di BC.

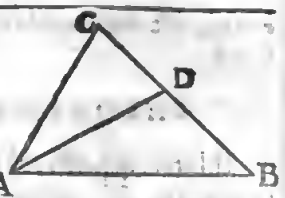
Si diuida l'angolo BAC [a] in due parti vguali con la retta AD, la quale continuata [b] concorra col lato BC in qualche punto D.



Si consideri il triangolo ADC, nel quale è continuato il lato CD, verso B, sarà l'angolo BDA esterno, maggiore dell'angolo DAC interno, ed opposto: mà l'angolo DAC, per costruttione, è vguale all'angolo DAB, sarà l'angolo BDA [d] maggiore dell'angolo BAD, e, per l'antecedente propositione, il lato AB, opposto al maggior angolo BDA, sarà maggiore del lato BD, opposto al minor angolo BAD.

[a] 9. propos.
[b] 2. postulat.
[c] 16. propos.
[d] 1. assioma.

Simil-

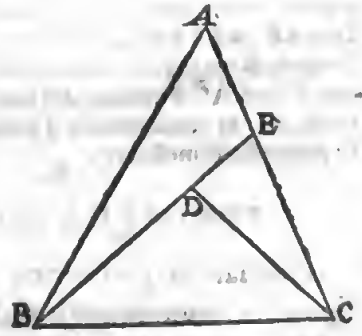


Similmente si consideri il triangolo BDA del quale è continuato il lato BD verso C, sarà l'angolo esterno CDA [e] maggiore dell' angolo DAB interno, ed opposto : ma l'angolo DAB, per costruttione è vguale all'angolo DAC, sarà l'angolo CDA [f] maggiore dell'angolo CAD, ed in consequenza il lato AC [g] sarà maggiore del lato CD : fù dimostrato il lato AB maggiore del lato BD, li due lati, dunque BA, AC, giunti insieme, sono maggiori del lato BC, ch'era da dimostrarsi.

[e] 16. propos.
[f] 1. assioma.
[g] 19. propos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XXI.

Se dalli estremi d'vn lato d'vn triangolo escono due rette linee, e concorrono dentro del medesimo triangolo, quelle prese insieme, sono minori degl'altri due lati del triangolo, e contengono angolo maggiore.



Sia il triangolo ABC, e dalli estremi B, & C, del lato BC, escano le rette BD,CD, e concorrino dentro del triangolo in qualche punto D. Dico che le due BD, CD, insieme giunte, sono minori de' i due lati BA, AC, presi insieme, e che l'angolo BDC è maggiore dell'angolo BAC.

Si continui la retta BD [a] fino, che cõcorre col lato AC in qualche punto E.

Nel triangolo ABE i due lati BA, AE, giunti insieme, [b] sono maggiori del terzo lato BE; tanto à i due lati BA, AE, giunt'insieme, quanto al lato BE, si aggiunghi la retta EC, ne verranno i due lati BA, AC [c] maggiori delli due lati BE, EC. Di nuouo, nel triangolo CED, i due lati CE, ED, presi insieme, [d] sono maggiori del terzo lato CD; tanto à i due lati CE, ED, giunti insieme, quanto al lato CD s'aggiunga la retta DB, ne verranno i due lati CE, EB [e] maggiori delli due CD, DB. Hor essendosi dimostrato li due lati BA, AC, maggiori de i due lati BE, EC, e li due BE, EC maggiori delli due BD, DC, i due lati dunque BA, AC presi insieme, sono maggiori delli due BD, DC insieme giunti, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

Nel triangolo DEC è continuato il lato ED verso B, sarà l'angolo BDC esterno, [f] maggiore dell'angolo DEC interno, ed opposto. Similmente nel triangolo EAB è continuato il lato AE verso C, sarà l'angolo CED [g] maggiore dell'angolo CAB, mà fù mostrato l'angolo CDB maggiore dell'angolo CED, in consequenza l'angolo CDB sarà molto maggiore dell'angolo CAB, come fù proposto dimostrare.

[a] 2. postulat.
[b] 20. prop.
[c] 4. assioma
[d] 20. prop.
[e] 4. assioma
[f] 16. propos.
[g] 16. propos.

PRO-

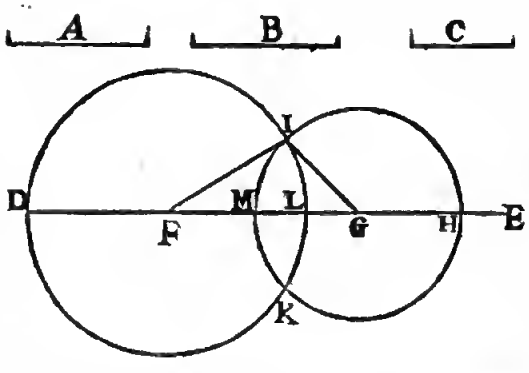
PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXII.

Date tre rette linee, costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle trè rette linee date.

Determinatione.

E necessario però, che le tre rette date habbiano questa determinatione, che due, in qualunque modo prese, siano maggiori della terza, stante che s'è dimostrato nella vigesima propositione, che due lati d'vn triangolo sono maggiori del terzo lato.

Siano date le tre rette linee A, B, C, in modo che le due A, & B, insieme giunte, siano maggiori della terza C; le due B, & C, siano maggiori della terza A; e le due A, & C, siano maggiori della terza B. Dico esser possibile costruire vn triangolo, che habbia i tre lati vguali alle tre rette date.



a 3. propos.

S'esponga la retta DE indeterminata verso E, dalla quale [a] se ne tagli la parte DF vguale alla retta A; similmente si tagli FG [a] vguale alla retta B; e si tagli GH [a] vguale alla retta C: poi, centro in F, coll'interuallo FD, [b] si descriua il circolo DIK; e di nuouo, fatto centro in G, coll'interuallo GH [b] si descriua il circolo HIK.

a 3. propos.
a 3. prop.

b 3. postulat

b 3. postul.

Perche la retta A, per costruttione, è vguale ad FD, e la retta FL [c] è vgua- alla medesima FD, sarà la retta A [d] vguale alla retta FL. Similmente essendo la retta C, per costruttione, vguale alla retta GH, e la retta GM [e] è vguale alla medesima GH, sarà la retta C [f] vguale alla retta GH; e così le due rette A, & C [g] saranno vguali alle due FL, GM; mà per iporesi, le due A, & C, insieme giunte, sono maggiori della retta B, le due dunque FL, GM, [b] sono maggiori della retta B; fù fatta FG, per costruttione, vguale alla retta B, le due rette dunque FL, GM sono maggiori della retta FG. Se dunque da FG se ne detrae FL resta GL [i] minore di GM; dal che il punto M cade dentro del circolo ILK, ed il punto L dentro del circolo IMK, per la qual cosa vn circolo cade dentro l'altro, e, per l'annotatione dopo la 26. definitione, i circoli IMK, ILK, scambieuolmente si segano. Siano le loro interseganioni come in I, & K, dal punto I alli centri F, & G [k] si tirino le rette IF, IG. Dico che il triangolo IFG, ha li tre lati vguali alle tre rette date A, B, C.

c 15. defin.
d 1. assioma
e 15. defin.
f 1. assioma
g 2. assioma
b 1. assioma
i 5. assioma
k 1. postul.

Per la definitione del circolo la retta FI, è vguale alla retta FD, mà, per costruttione, la retta A è vguale alla medesima retta FD, sarà la retta FI [l] vguale alla retta A. Similmente la retta GI, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GH, mà la retta C, per costruttione, è vgua-

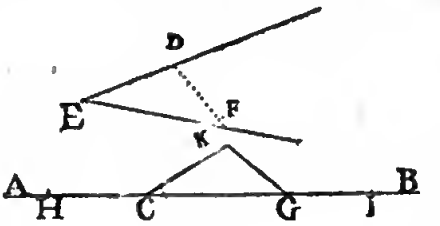
l 1. assioma

[l] 1. assiom. [m] 2. assiom.

le alla retta GH, sarà la retta C [l] vguale alla retta GI; dalche le due A, & C [m] sono vguali alli due lati FI, IG, la retta FG, per costruttione, è vguale alla retta B, in conseguenza li tre lati FI, IG, FG sono vguali alle tre rette date, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIII.

Data vna retta linea, ed vn punto in essa, e dato vn'angolo rettilineo, è possibile nel dato punto sopra la retta data, costituire vn'angolo rettilineo vguale all'angolo dato.



Sia la data retta linea AB, ed il punto in essa C, e sia dato l'angolo rettilineo E; si vuole nel punto C, sopra la retta AB, costituire vn'angolo rettilineo, vguale all'angolo E.

Si prendano due qualunque punti nelle rette ED, EF, che siano i notati D, ed F, e si tiri [a] la retta DF; si faccia poi CG [b] vguale alla retta EF, si tagli CH vguale alla retta ED, e si tagli GI vguale alla retta FD, e per l'antecedente propositione, sopra la retta CG si deseriua il triangolo CGK, talmente che il lato CK sia vguale ad HC, ouero ED, ed il lato GK sia vguale ad IG, ouero FD. Dico che l'angolo KCG è vguale all'angolo E.

[a] 1. post. [b] 3. propos.

Si considerino i due triangoli DEF, KCG: perche i due lati KC, CG sono vguali, per costruttione, à i due lati DE, EF, e la base KG è vguale alla base DF, l'angolo KCG sarà [c] vguale all'angolo E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

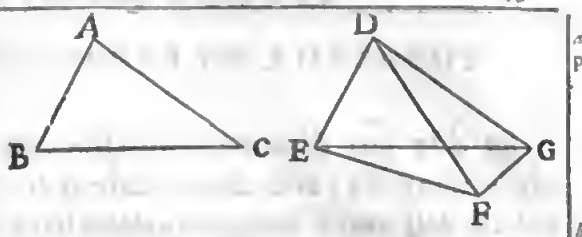
[c] 8. propos.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXIV.

Se due lati d'vn triangolo sono vguali à due lati d'vn'altro triangolo, ogn'vno vguale al suo corrispondente, è l'angolo contenuto dà i due lati dell'vno sia maggiore dell'angolo contenuto dà i due lati dell'altro; la base dell'vno, ch'è opposta all'angolo maggiore, sarà maggiore della base dell'altro, ch'è opposta all'angolo minore.

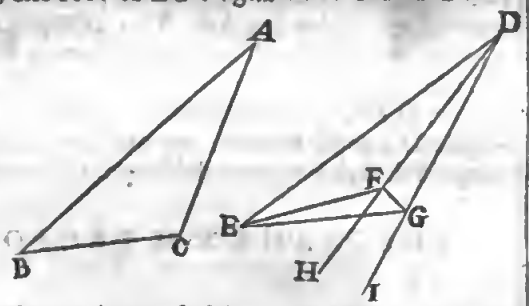
Siano i due triangoli ABC, DEF, e sia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, e l'angolo BAC maggiore dell'angolo EDF. Dico che la base BC sarà maggiore della base EF.

Nel



Nel punto D, ſopra la retta DE, [a] ſi coſtituiſca l'angolo EDG, vguale all'angolo A, e perche l'angolo A è poſto maggiore dell'angolo EDF, ſarà l'angolo E D G [b] maggiore dell'angolo E D F, per la qual coſa la retta D G cade fuori del triangolo D E F; ſi tagli DG [c] vguale al lato AC, e ſi tiri [d] la retta EG. O la retta EG paſſa ſopra del punto F, come nella prima figura, ouero paſſa ſotto al punto F, come nella ſeconda figura. Paſsi prima ſopra, come nella prima figura, ſi tiri [e] la retta FG, e ſi conſiderino li triangoli ABC, DEG; perche il lato AB, per ipoteſi, è vguale al lato DE, ed il lato DG è fatto vguale al lato AC, i due lati BA, AC ſaranno vguali alli due lati ED, DG, l'angolo EDG è fatto vguale all'angolo A, ſarà la baſe EG [f] vguale alla baſe BC. In oltre perche DF, per ipoteſi, è vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medeſimo lato AC, ſarà DG [g] vguale al lato DF, il triangolo DFG [h] ſarà iſoſcele, e gli angoli DGF, DFG, [i] ſopra la baſe FG, ſaranno frà di loro vguali; mà l'angolo DGF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, ſarà l'angolo DFG maggiore dell'angolo EGF, e tutto l'angolo EFG ſarà molto maggiore dell'angolo EGF; per la qual coſa il lato EG, [l] oppoſto al maggior angolo EFG, ſarà maggiore del lato EF, ch'è oppoſto all'angolo minore EGF, e perche il lato E G fù moſtrato vguale al lato B C, ſarà la baſe B C [m] maggiore della baſe EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo paſsi la retta EG ſotto al punto F, come nella ſeconda figura, ſi tiri [n] la retta F G, e conſiderando i due triangoli ABC, D E G ſi moſtri, come prima ſi fece, che la retta EG è vguale alla baſe BC.



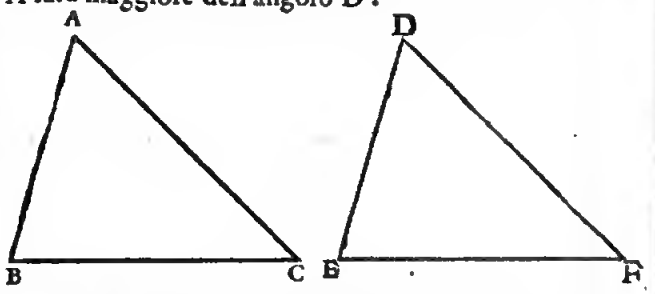
Perche il lato DF è poſto vguale al lato AC, ed il lato DG è fatto vguale al medeſimo lato AC, ſarà il lato DF [o] vguale al lato DG, il triangolo DFG [p] ſarà iſoſcele, e gli angoli ſotto la baſe IGF, HFG [q] ſaranno frà di loro vguali; mà l'angolo IGF è maggiore dell'angolo EGF, perche lo contiene, ſarà l'angolo HFG [r] maggiore dell'angolo EGF; per il che tutto l'angolo EFG ſarà molto maggiore dell'angolo EGF. Per la qual coſa nel triangolo EFG, il lato EG oppoſto al maggior angolo EFG [s] ſarà maggiore del lato EF, oppoſto all'angolo minore EGF; e perche la retta EG fù moſtrata vguale alla baſe BC, ſarà la baſe BC [t] maggiore della baſe EF ch'era da dimoſtrarſi.

a 23. propoſ.
b 1. aſſiom.
c 3. propoſ.
d 1. poſt.
e 1. poſt.
f 4. propoſ.
g 1. aſſiom.
h 24. defin.
i 5. propoſ.
k 1. aſſiom.
l 19. propoſ.
m 1. aſſiom.
n 1. poſt.
o 1. aſſiom.
p 24. defin.
q 5. propoſ.
r 1. aſſiom.
s 19. propoſ.
t 1. aſſiom.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXV.

Se due lati d'vn triangolo ſono vguali à due lati d'vn altro triangolo, ciaſcuno vguale al ſuo corriſpondente, e la baſe dell'vno è maggiore della baſe dell'altro, l'angolo oppoſto alla baſe maggiore ſarà maggiore dell'angolo oppoſto alla baſe minore.

Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia il lato AB vguale al lato DE, il lato AC vguale al lato DF, la baſe BC maggiore della baſe EF. Dico che l'angolo A ſarà maggiore dell'angolo D.



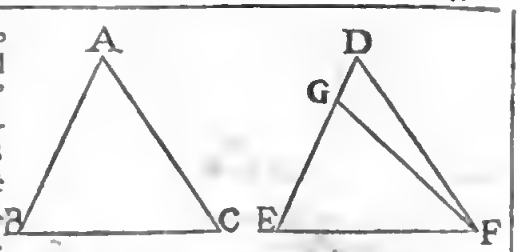
Se l'angolo A non è maggiore dell'angolo D, ò ſarà minore, ouero vguale. Suppoſto prima, che l'angolo A ſia vguale all'angolo D; perche i due lati AB, AC, per ipoteſi, ſono vguali alli due lati DE, DF, e l'angolo A è poſto vguale all'angolo D, ſarà [a] la baſe BC vguale alla baſe EF, ch'è contro all'ipoteſi, mentre s'è ſuppoſto, che BC è maggiore di EF, non dunque l'angolo A è vguale all'angolo D. Di nuouo ſia l'angolo A minore dell'angolo D, perche i due lati DE, DF, per ipoteſi ſono vguali à i due lati AB, AC, e l'angolo D è maggiore dell'angolo A, ſarà, per l'antecedente propoſitione, la baſe EF maggiore della baſe BC; fù ſuppoſta la baſe BC maggiore di EF, ſarebbe BC maggiore, e minore di EF, ch'è impoſsibile; non dunque l'angolo A, è minore dell'angolo D; non è vguale, per quel che s'è dimoſtrato; per la qual coſa l'angolo A ſarà maggiore dell'angolo D, come fù propoſto dimoſtrare.

[a] 4. propoſ.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXVI.

Se vn lato d'vn triangolo è vguale ad vn lato d'vn altro triangolo, e due qualunque angoli dell'vno ſiano vguali à due corriſpondenti angoli dell'altro, i rimanenti due lati dell'vno ſaranno vguali à i rimanenti due lati dell'altro, cioè ogn'vno vguale al lato corriſpondente, ed il reſtante angolo ſarà vguale al reſtante angolo.

Siano



Siano i due triangoli ABC, DEF, e ſia nel primo luogo il lato BC vguale al lato EF, l'angolo ABC vguale all'angolo DEF, e l'angolo ACB vguale all'angolo DFE cioè che gli angoli vguali ſiano ſopra gli vguali lati BC, EF. Dico che il lato AC ſarà vguale al lato DF, il lato AB vguale al lato DE, e che l'angolo A è vguale all'angolo D.

Se il lato AB non è vguale al lato DE, vno de' i due ſarà maggiore. Suppoſto che il lato DE ſia maggiore del lato AB, dal maggior lato DE ſe ne tagli la parte GE [a] vguale al minor lato AB, ſi tiri [b] la retta GF, e ſi conſiderino i due triangoli ABC, GEF; perche il lato GE è fatto vguale al lato AB, ed il lato EF è ſuppoſto vguale al lato BC, ſaranno i due lati GE, EF vguali à i due lati AB, BC, l'angolo GEF è ſuppoſto vguale all'angolo ABC, ſarà [c] la baſe GF vguale alla baſe AC, l'angolo BAC vguale all'angolo EGF, e l'angolo BCA vguale all'angolo EFG; mà l'angolo BCA è ſuppoſto vguale all'angolo EFD, l'angolo dunque EFG [d] ſarà vguale all'angolo EFD, la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile [e]: Non dunque il lato DE è maggiore del lato AB, mà ſono frà di loro vguali. In oltre perche il lato DE è dimoſtrato vguale al lato AB, ed il lato EF è ſuppoſto vguale al lato BC, i due lati DE, EF, del triangolo DEF, ſono vguali alli due lati AB, BC, del triangolo ABC, l'angolo E è ſuppoſto vguale all'angolo B, ſarà la baſe DF [f] vguale alla baſe AC, e l'angolo D vguale all'angolo A.

Suppoſto di nuouo, che il lato BC ſia vguale al lato EF, l'angolo B, vguale all'angolo E, e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico ſimilmente, che il lato DE è vguale al lato AB, il lato DF vguale al lato AC, e l'angolo C vguale all'angolo DFE.

Si faccia la medeſima coſtruttione di prima, e ſi moſtri, come prima ſi fece, che l'angolo EGF è vguale all'angolo BAC; mà nel triangolo DGF l'angolo EGF eſterno [g] è maggiore dell'angolo D interno, ed oppoſto, ſarà l'angolo A maggiore dell'angolo D; fù ſuppoſto l'angolo A vguale all'angolo D, ſarebbe l'angolo A maggiore, ed vguale all'angolo D, ch'è impoſſibile; non dunque il lato DE è maggior del lato AB, ma ſono frà di loro vguali.

Finalmente perche i due lati AB, BC, del triangolo ABC, ſono vguali à i due lati DE, EF del triangolo DEF, l'angolo B, per ipoteſi, è vguale all'angolo E, ſarà la baſe AC [b] vguale alla baſe DF, e l'angolo C vguale all'angolo DFE, ch'era da dimoſtrarſi.

[a] 3. propoſ.
[b] 1. poſt.
[c] 4. propoſ.
[d] 1. aſſiom.
[e] 9. aſſiom.
[f] 4. propoſ.
[g] 16. propoſ.
[b] 4. propoſ.

ANNOTATIONE.

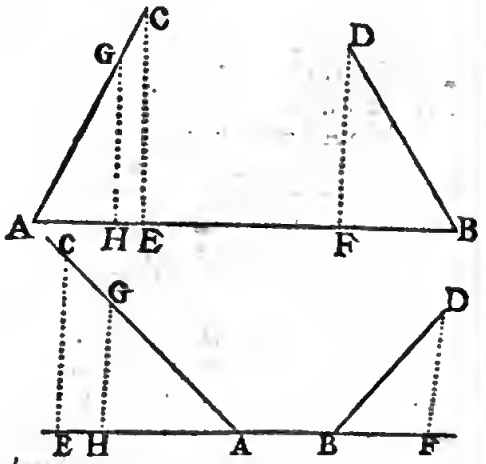
Per dimoſtrare gli Elementi delle parallele con metodo aſſai chiaro, e facile, premetto le ſeguenti dimoſtrationi.

I.

Se due rette linee, come CA, DB, ſono ſegate da qualche retta

AB,

AB, e gli angoli DBA, CAB ſono frà di loro vguali: Dico che ſe la retta CA è vguale alla retta DB, le rette DF, CE, che da i punti D, & C, cadono perpendicolari alla retta AB, ſono frà di loro vguali, e ſe la retta CA è maggiore della retta DB, la perpendicolare CE ſarà maggiore della perpendicolare DF.



Suppoſto prima che la retta CA ſia vguale alla retta BD: Dico che la perpendicolare CE è vguale alla perpendicolare DF. Perche gli angoli in E, ed F ſono retti, e gli angoli DBF, CAE ſono ſuppoſti vguali, i due angoli CEA, CAE del triangolo CAE, [a] *ſaranno vguali alli due angoli DFB, DBF, del triangolo DFB, il lato CA è ſuppoſto vguale al lato DB, ſarà BF* [b] *vguale ad AE, e la perpendicolare DF* [c] *vguale alla perpendicolare E C ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

a 2. aſſioma

b 26. prop.

c 3. propoſ.

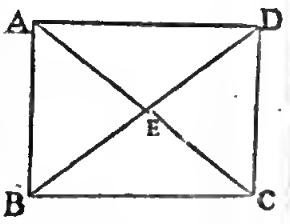
Di nuouo, ſuppoſto che la retta CA ſia maggiore della retta DB. Dico che la perpendicolare CE è maggiore della perpendicolare DF. Si faccia GA [c] *vguale alla retta DB, dal punto G ſi faccia cadere la retta GH* [d] *perpendicolare alla retta AB, ed operandoſi come ſi fece prima, ſi moſtrerà, che la retta GH è vguale alla retta DF, ma, per lo Scolio alla 16. propoſitione, la retta CE è maggiore di GH, ſarà la perpendicolare CE maggiore della perpendicolare DF, ch'era da dimoſtrarſi.*

c 3. prop.

d 12. prop.

I I.

Se due lati oppoſti d'vn quadrilatero ſono frà di loro vguali, e fanno angoli vguali con vno degl'altri due lati, i rimanenti due angoli ſono frà di loro vguali.



Sia il quadrilatero ABCD, e ſiano i lati oppoſti AB, DC frà di loro vguali, come ancora ſiano frà di loro vguali gl'angoli DCB, ABC. Dico che li reſtanti due angoli A, & D, ſono frà di loro vguali. ſi tirino [a] *le diagonali AC, DB, le quali ſi ſegarano in qualche punto E; e ſi conſiderino i due triangoli DBC, ACB, de' quali il lato AB, per ipoteſi è vguale al lato DC, il lato BC è commune, e perciò i due lati AB, BC ſono vguali alli due lati DC, CB, gli angoli ABC, DCB, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, ſarà la baſe AC* [b] *vguale alla baſe DB, l'angolo ACB vguale all'angolo DBC, e l'angolo BAC vguale all'angolo BDC. Inoltre perche gli angoli EBC, ECB ſono ſtati moſtrati vguali, ſarà* [c] *EB vguale*

a 1. poſtul.

b 4. propoſ.

c 6. propoſ.

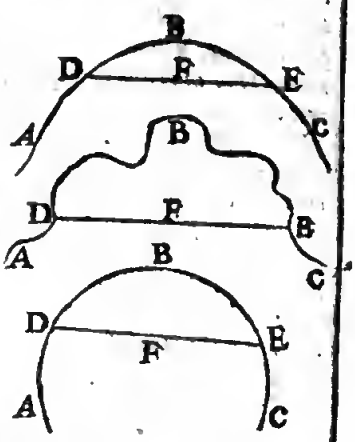
ad

ad EC [c]; dalle vguali rette AC, DB, ſe ne leuino le vguali rette EB, EC, reſta EA [d] vguale ad ED; dal che gli angoli EAD, EDA [e] ſono frà di loro vguali, ſe le aggiunghino gli vguali angoli BDC, BAC, ne viene tutto l'angolo BADſ vguale all'angolo CDA, come fù propoſto dimoſtrare.

[c] 6. propoſ.
[d] 3. aſſiom.
[e] 5. propoſ.
[f] 2. aſſiom.

I I I.

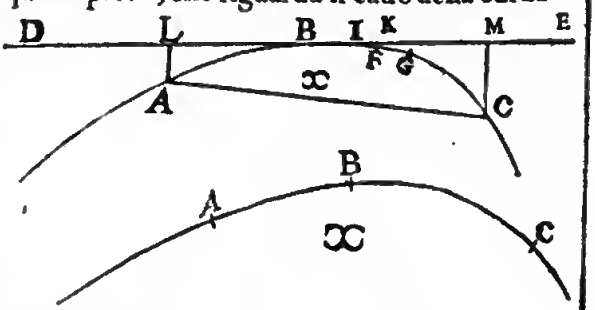
La linea retta chiude figura con la curua, quando la retta termina nella curua con tutti due gli eſtremi.



Concorra la retta linea DE con tutti due gli eſtremi D, ed E nella curua ABC. Dico che le linee DFE, DBE chiudono figura; cioè frà la linea curua DBE, e la retta DFE s'interpone ſpatio. Perche le linee DBE, DFE concorrono inſieme negli eſtremi D, ed E, ſe frà di loro non ſi racchiude ſpatio, l'vna congruerà con l'altra, ma quelle coſe, che congruono inſieme [g] ſono fra di loro vguali, ſarà la linea DFE vguale alla linea curua DBE; ma per la definitione 4. la linea curua DBE non è la breuiſſima di quelle, che ſi ſtendono fra i punti D, & E, la linea dunque DFE, ch'è vguale alla linea curua DBE, non ſarà la breuiſſima di quelle, che ſi ſtendono dal punto D al punto E; e perciò non ſarà linea retta, ch'è contro all'ipoteſi, ſtante che la linea DFE è ſuppoſta linea retta; non dunque le linee DBE, DFE congruono, ma fra di loro s'interpone qualche ſpatio; cioè chiudono figura, ch'era da dimoſtrarſi.

I V.

Se frà due punti preſi in qualche linea curua è tirata vna retta linea, quella paſſa da quella parte, che riguarda il cauo della curua.



Nella curua ABC, il di cui cauo ſia verſo X, ſiano preſi due qualunque punti A, & C. Dico che la retta, tirata dal punto A al punto C, cade dalla parte X, che riguarda il cauo della curua.

Si concepiſca la retta linea DE indeterminata, dall'vna, e l'altra parte, ſi prenda nella curua ABC qualunque punto B, e ſi concepiſca traſportata la curua ABC in modo, che col ſuo conueſſo s'appoggi alla retta indeterminata DE nel luogo B, cioè che la curua ABC concorra col ſuo conueſſo nella retta indeterminata DE, in modo che la curua ABC non ſegbi la retta DE, la linea curua ABC caderà fuori della retta linea DE; perche, ſe non cade fuori,

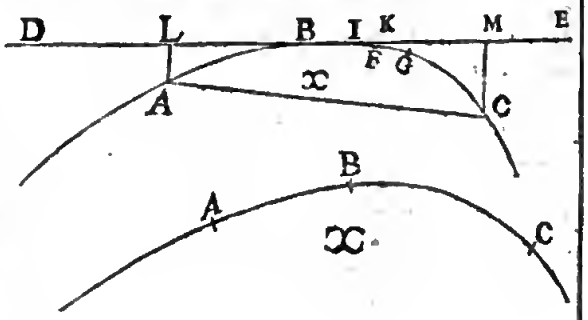
ò tut-

ò tutta passa sopra la retta DBE, ò ne passa parte; non passa tutta, perche
a 4.defin. *la linea ABC a sarebbe linea retta, ch'è contro all'ipotesi, se vna parte, come BF passa sopra la retta DE, la parte BF, della curua ABC, non sarebbe curua, ma linea retta, ed in tal caso la parte aggiunta, come FG vguale ò minore di FB sarebbe linea retta, presi nelle rette BF, FG due punti I, & K, vicini ad F, sarebbe IK per la medesima ragione linea retta, dal che tutta BG sarebbe vna sola retta linea; e col medesimo modo d'argumentare si dimostrerà, che tutta la linea ABC sarà linea retta, ch'è contro all'ipotesi, mentre la linea ABC è supposta curua: non dunque tutta, ne parte della linea curua ABC passa sopra la retta DE, ma cade tutta fuori; e perciò li punti A, & C cadono fuori della retta DE.*

Dalli punti A, & C alla retta DE si facciano cadere le rette AL, CM, perpendicolari ad ED, e si tiri la retta AC; perche i punti A, & C distano dalli punti L, M, per le quantità degl'interualli AL, CM, perciò la retta AC cade fuori della retta LM, ma per l'antecedente dimostratione, la retta AC comprende figura con la curua ABC, la retta dunque AC cade sotto la curua ABC; per la qual cosa passa dalla parte, che riguarda il concauo della curua ABC ch'era da dimostrarsi.

Altra breue dimostratione.

Se tutta la curua, ò vna picciolissima parte di essa come BI, congruerà con la retta BI, l'vna non chiudera figura con l'altra ch'è contro alla 3. dimostratione, e perciò li punti A, & C, cadono fuori della retta DE.

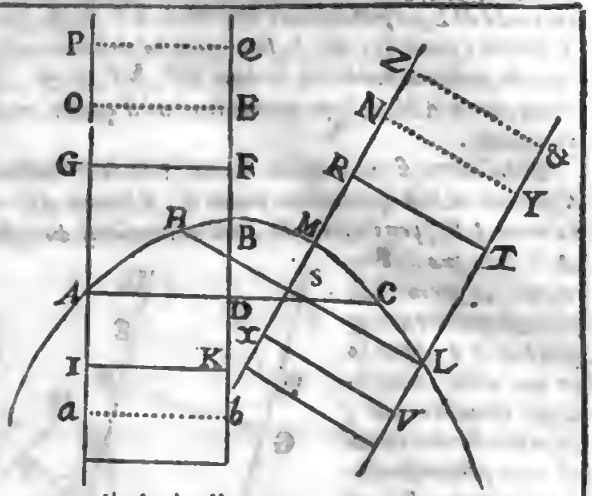


V.

Se frà due qualunque punti A, & C presi in qualunque linea curua ABC, il di cui concauo sia verso X, sia tirata la retta linea ADC, se dagl'infiniti punti immaginati nella curua ABC cadono rette linee perpendicolari à qualch'altra retta linea: Dico essere impossibile, che tutte quelle perpendicolari siano frà di loro vguali.

Si prenda nella curua ABC qualunque punto B, dal quale si faccia cadere
a 12.prop. *la retta BD a perpendicolare alla retta AC, e si continui la retta DB b verso E;*
b 2.postul. *nel punto A sopra la retta AC c s'erigga la perpendicolare AG, poi nella pro-*
c 11. propos. *longatione BE si prenda qualunque punto F, e si faccia AG d vguale alla ret-*
d 3.propos. *ta FD, si tiri e la retta GF. Nel quadrilatero GADF, i lati opposti GA, FD,*
e 1.postul. *per costruttione, sono fra di loro vguali, gli angoli GAD, FDA f sono vguali*
f 10.assioma *stante che sono retti, e per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli an-*

goli



goli AGF, DFG *ſono fra di loro vguali. In oltre perche la retta G A è fatta vguale ad FD, e la retta FD per coſtruttione è maggiore di FB, ſtante che la retta AC per l'antecedente dimoſtratione, cade nel concauo della curua ABC, ſarà la retta GA maggiore della retta BF: ſe gli angoli AGF, BFG ſono retti, le rette AG, BF, che cadono dalli punti A, & B ſaranno perpendicolari alla retta GF; mà AG è dimoſtrata maggiore di BF, non tutte le perpendicolari dunque, che cadono dalla curua ABC alla retta GF ſono fra di loro vguali, ch' è il noſtro propoſito; ſe gli angoli AGF, BFG non ſono retti, perche le rette AG, BF ſono ſegate dalla retta GF, e gli angoli AGF, BFG, per quel, che s'è dimoſtrato, ſono frà di loro vguali, per la prima delle antecedenti dimoſtrationi, eſſendo la retta AG maggiore di BF, la retta, che dal punto A cade perpendicolare alla retta GF, ſarà maggiore della retta, che dal punto B cade perpendicolare alla medeſima retta GF; non dunque tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta GF ſono frà di loro vguali.*

S'intendano continuate le rette DF, AG indeterminatamente verſo P, Q, ſi facciano FE, GO frà di loro vguali, e ſi tiri la retta OE; ſarà OA vguale ad ED, e procedendoſi come prima, ſi dimoſtrerà, che non tutte le rette, che cadono perpendicolari dalli punti A, & B alla retta OE ſono fra di loro vguali; e nell'iſteſſo modo pigliandoſi ſempre parti vguali dall'vna, e l'altra parte, come EQ, OP, e con queſt'ordine in infinito, e tirata la retta PQ, ſi dimoſtrerà, che non tutte le rette, che dalli punti A, & B, cadono perpendicolari alla retta PQ, ſono fra di loro vguali.

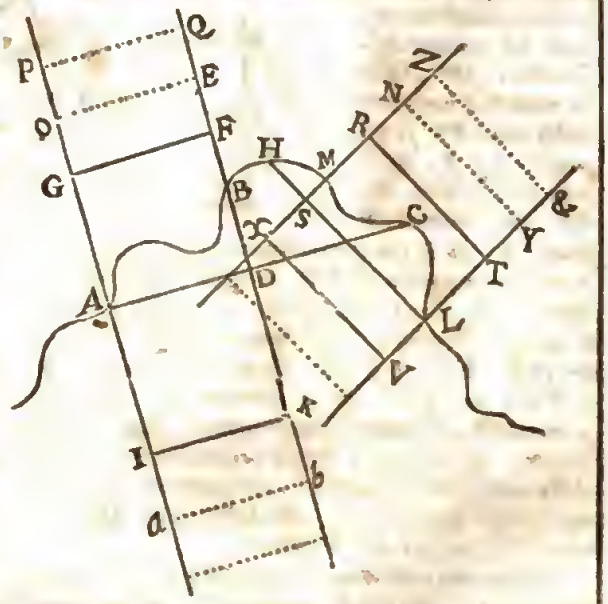
Di nuouo ſi prendano due qualunque altri punti nella linea ABC, che ſiano H, ed L, tirata la retta linea HL quella, per l'antecedente dimoſtratione, paſſa per il concauo della curua HML; preſo poi nella curua HML qualunque altro punto M, dal quale ſi faccia cadere la retta MS perpendicolare ad HL; nel punto L, s'erigga LT perpendicolare ad HL; ſi prenda in MN qualunque punto R, ſi faccia LT vguale ad SR, e ſi tiri la retta RT; procedendoſi come prima, ſi dimoſtrerà, che non tutte le rette, che dalla curua HML cadono perpendicolari alla retta RT, ſono fra di loro vguali; In oltre continuate le rette SR, LT indeterminatamente verſo Z, &, ſi prendano dall'vna, e dall'altra, parti vguali, come TT vguale ad RN, Y &, vguale ad NZ, e con queſt'ordine in infinito, ſi tirino le rette NT, Z, &, e ſi moſtri come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla

g 1. Poſtul.
h 12. Prop.
i 11. Prop.
k 3. Prop.
l 2. Poſtul.
m 1. Poſtul.

curua HML perpendicolari alle rette NT, Z,&,&c. Sono fra di loro vguali. E perche i punti H, M, L, ſono preſi ad arbitrio nella linea ABC, perciò qualunque poſitione habbiano le rette RT, NT, Z &, le linee rette, che dalla linea curua ABC cadono perpendicolari à quelle, mai ſaranno tutte frà di loro vguali.

n 2. poſtul. o 3. Prop.

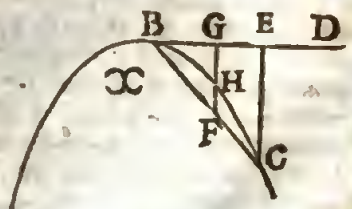
Finalmente ſi prolunghino le rette FD, GA n indeterminatamẽte verſo IK, ſi prenda in DK qualunque punto K, ſi faccia AI o vguale ad KD, e ſi tiri la retta IK; per la ſeconda delle antecedenti dimoſtrationi, gli angoli DKI, AIK ſono fra di loro vguali, e perche BK per coſtruttione è maggiore di AI, per la prima delle antecedenti dimoſtrationi, la retta che dal punto B cade perpendicolare alla retta KI, è maggiore della retta, che dal punto A cade perpendicolare alla medeſima retta KI; dal che non tutte le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari alla retta KI ſono fra di loro vguali; ſe poi ſi prendono le parti Kb, Ia vguali, tirata la retta a b, ſi dimoſtrerà come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalla curua ABC perpendicolari à KI, ſono frà di loro vguali. Di più ſi continui



p 2. Poſtul. q 3. propoſ. r 1. Poſtul.

MS p verſo X, & LT verſo V, ſi prenda in SX qualunque punto X, e ſi faccia LV q vguale ad XS, ſarà MX maggiore di LV; ſi tiri r la retta XV, e ſi moſtri come prima, che non tutte le rette, le quali cadono dalli punti ML, perpendicolari ad XV, ſono frà di loro vguali; e perche i punti, K, M, L, furono preſi ad arbitrio, in ogni poſitione, che ſarà la linea XV, le rette, che dalla curua ABC cadono perpendicolari ad XV, mai ſaranno tutte frà di loro vguali, come fù propoſto dimoſtrare.

Se poi la retta linea, ſopra la quale cadono le perpendicolari, continuata concorra con la curua BHC, come fà la retta BD, all'hora da qualunque punto C, preſo nella curua BC, ſi faccia cadere la retta CE perpendicolare alla retta BD, ſi tiri la retta BC, la quale per l'antecedente dimoſtratione, cade dalla parte concaua X, ſi prenda nella retta BC qualunque punto F, e dal punto F ſi faccia cadere la retta FG perpendicolare alla



Sup-

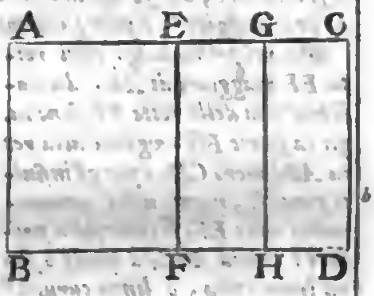
retta BD; perche il punto F è più vicino al punto B, che il punto C, per la prima delle antecedenti dimostrationi, la perpendicolare CE è maggiore della perpendicolare FG, e molto maggiore sarà di H G, ch'era da dimostrarsi.

V I.

Se due rette linee vguali, come A B, C D, sono in vn medesimo piano, e fanno angoli retti con qualch'altra linea retta BD, tirata la retta AC, se dalla retta AC cade qualche retta linea E F perpendicolare à BD, ed vguale ad AB, ouero CD. Dico che ogn'vna delle altre rette, che dalla linea A C cadono perpendicolari alla retta BD, sarà vguale ad AB, ouero CD.

Si prenda nella retta AC qualunque punto G, dal quale si faccia cadere la retta G H perpendicolare alla retta B D. Dico che G H è vguale ad A B, ouero CD. a 12. Prop.

Perche le rette AB, CD sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con BD per la seconda delle antecedenti dimostrationi, gli angoli A & C sono frà di loro vguali: nel quadrilatero ABFE i lati opposti AB, EF sono, per ipotesi, frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BD, per la citata seconda dimostratione, gli angoli F E A, B A E sono frà di loro vguali: similmente nel quadrilatero EFDC i lati opposti E F, C D sono, per ipotesi, frà di loro vguali, gli angoli in F, & D sono retti, e per la seconda dimostratione, gli angoli FEC, DCE sono frà di loro vguali; ma l'angolo C è dimostrato vguale all'angolo A, e l'angolo A vguale all'angolo F E A, sarà l'angolo F E A vguale all'angolo F E C, dal che gli angoli in E sono retti; ma l'angolo FEC è dimostrato vguale all'angolo C, e l'angolo F E A è dimostrato vguale all'angolo A, gli angoli dunque A, & C sono retti.

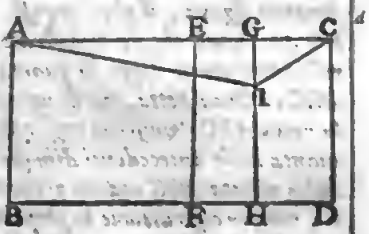


b 1. Assiom.

Se la retta GH non è vguale ad AB, vna delle due sarà maggiore; supposto che la retta GH sia maggiore di AB, si faccia HI c vguale ad AB, si tirino le rette d AI, CI; essendo gli angoli D C A, BAC retti, sarà l'ãgolo BAI minore del retto, e l'angolo ancora DCI sarà minore d'vn angolo retto: nel quadrilatero ABHI i lati opposti AB, HI sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BD, per la seconda dimostratione l'angolo B A I sarà vguale all'angolo HIA, ma l'angolo BAI è minore del retto, l'angolo dunque H I A sarà minore del retto, ed il supplemento AIG e sarà maggiore d'vn angolo retto; similmente nel quadrilatero I H D C il lato I H, per costruttione è vguale al lato CD, gli angoli in H, & D sono retti, e per la seconda dimostratione, gli angoli DCI, HIC sono frà di loro vguali; ma l'angolo DCI è minore del retto,

c 3. Prop.

d 1. Postul.



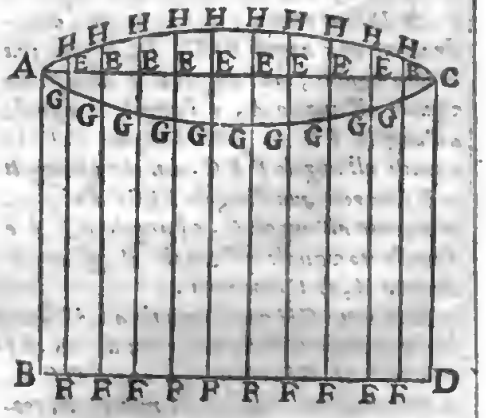
e 23. prop.

f 13. prop. *ſarà l'angolo H I C minore del retto, ed il ſupplemento à due retti, cioè l'angolo G I C ſarà maggiore d'vn'angolo retto: fù dimoſtrato l'angolo A I G maggiore d'vn retto, tutto l'angolo A I C ſarà maggiore di due angoli retti. Nel triangolo A I C i due angoli A I C, A C I, giunti inſieme, ſono molto maggiori di due angoli retti, ch'è contro alla decimaſettima propoſitione: non dunque la retta G H è maggiore di A B; e perciò le rette G H, A B ſono frà di loro vguali; e perche il punto G è preſo ad arbitrio, perciò ogn'vna dell'altre rette, che dal lato A C cade perpendicolare al lato B D, ſarà vguale ad A B, ouero C D, ed in conſeguenza ſaranno tutte frà di loro vguali, come fù propoſto dimoſtrare.*

V I I.

Se due rette linee vguali, come A B, C D, ſono in vn medeſimo piano, e fanno angoli retti con qualch'altra linea retta B D, tirata la retta A C, dagl'infiniti punti E immaginati in A C, s'intendano cadere le innumerabili rette linee E F ad angoli retti ſopra la retta B D. Dico che ogni retta linea E F è vguale alla retta A B, ouero C D.

Se ogni retta E F non è vguale alla retta A B, ouero C D, niuna di quelle ſarà vguale ad A B, perche ſe qualche d'vna foſſe vguale ad A B, ouero C D per l'antecedente dimoſtratione, tutte ſarebbero vguali ad A B, ouero C D, ed vguali frà di loro; hor ſe niſſuna ſarà vguale ad A B, ouero C D, ogn'vna di quelle ò ſarà maggiore, ò pure ſarà minore di A B, ouero C D.



Sia nel primo luogo ogni retta E F maggiore di A B, da ciaſcheduna delle rette E F ſe ne tagli la parte F G vguale alla retta A B, ouero C D, e per gl'infiniti punti G, notati nelle innumerabili rette E F, ſi concepiſca paſſare la linea A G C, la quale ò ſarà linea retta, ò linea curua.

a 3. prop.

Suppoſto prima, che la linea A G C ſia linea retta; perche i punti G cadono fuori della retta A C, le due rette linee A E C, A G C, chiuderanno figura, il che è impoſſibile, per quel che s'è dimoſtrato nell'annotatione doppo la quarta propoſitione al numero terzo, non dunque A G C, è linea retta. Sia di nuouo A G C linea curua; perche la notata A G C, e la retta A E C s'vniſcono negl'eſtremi A, & C, perciò chiudono figura, e per la quinta delle antecedenti dimoſtrationi, non tutte le rette A B, G F, C D, che dalla notata A G C cadono perpendicolari alla retta B D, ſono frà di loro vguali; mà per coſtruttione le perpendicolari A B, G F, C D ſono tutte frà di loro vguali, ſarebbero, e non ſarebbero frà di loro vguali, ch'è impoſſibile, non dunque ciaſcuna retta E F è maggiore di A B, ouero C D.

Di nuouo ſuppoſto, ch'ogni retta E F ſia minore di A B, ouero C D, ſi prolungbino tutte le rette F E verſo H, e ſi faccia F H vguale ad A B, ouero C D; ſi dimo-

dimostri, come prima si fece, che AHC non è linea retta; mà ch'è linea curua, e per la quinta delle antecedenti dimostrationi, non tutte le rette AB, HF, CD, che dalla notata AHC cadono perpendicolari alla retta BD sono frà di loro vguali; mà per costruttione le perpendicolari AB, HF, CD, sono tutte frà di loro vguali, sarebbono e non sarebbero tutte frà di loro vguali, ch'è impossibile; non dunque ciascuna retta EF è minore di AB, ouero CD, ne meno, per quel che s'è dimostrato, è maggiore, ed in conseguenza tutte le rette AB, EF, CD sono frà di loro vguali, come fù proposto dimostrare.

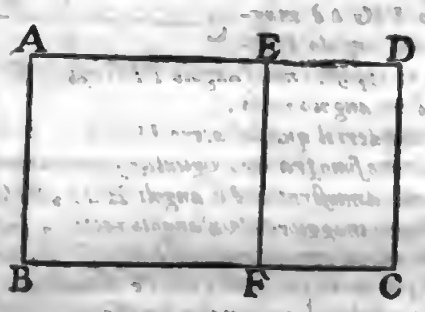
VIII.

Se due lati opposti d'vn quadrilatero sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con vno degl'altri lati, i due rimanenti angoli sono retti.

Sia il quadrilatero ABCD, del quale i due lati opposti AB, DC siano frà di loro vguali, e facciano angoli retti con la retta BC. Dico che gli angoli BAD, CDA sono angoli retti.

Perche nel quadrilatero ABCD i lati opposti AB, DC, sono frà di loro vguali, e fanno angoli vguali con la retta BC, per la seconda delle antecedenti dimostrationi gli angoli in A, & D sono frà di loro vguali.

Si prenda in AD qualunque pũto E, dal quale si faccia cadere la retta EF a perpendicolare à la retta BC, sarà EF, per l'antecedente dimostratione, vguale ad AB, ouero CD, e considerando il quadrilatero ABFE, i di cui lati opposti AB, EF sono frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta BC, per la seconda dimostratione, gli angoli FEA, BAE sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo, considerando il quadrilatere EFCD si dimostrerà, che l'angolo FED è vguale all'angolo CDE; è perche gli angoli in A, & D, furono dimostrati vguali, sarà l'angolo FEA vguale all'angolo FED, e per la decima definitione, gli angoli FED, FEA sono retti; mà l'angolo FED è dimostrato vguale all'angolo CDE, e l'angolo FEA vguale all'angolo BAE, in conseguenza gli angoli in A, & D sono retti, come fù proposto dimostrare.



a 32. prop.

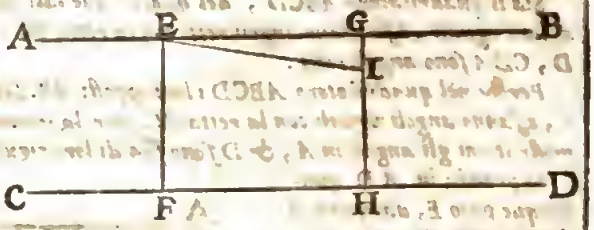
IX.

Se due rette linee in vn medesimo piano sono segate da vn altra retta linea ad angoli retti, quelle continuate in infinito dall'vna, e l'altra parte mai s'auuicinano, ò s'allontanano scambieuolmente in luogo alcuno della loro estensione, e perciò mai concorreranno insieme, e queste sono quelle rette, che nella 34. definitione habbiamo chiamate, e per l'auuenire chiamaremo rette linee parallele; ouero vgualmente distanti.

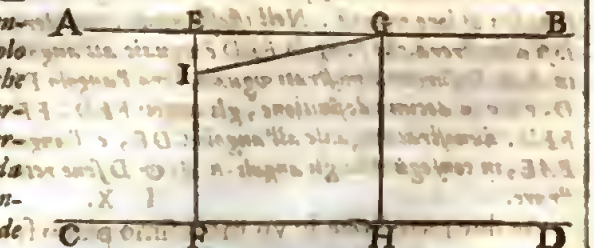
Siano le rette linee AB, CD in vn medesimo piano, segate dalla retta EF ad angoli retti, come in E, ed F. Dico che continuate le rette AB, CD dall'vna, e l'altra parte in infinito, mai in luogo alcuno della loro estensione s'auuicineranno, ò allontaneranno scambieuolmente.

Nella retta AB si prenda qualunque punto G, fuori del punto E, dal quale si faccia cadere la retta GH [a] *perpendicolare alla retta CD; se la retta GH non è vguale alla retta EF, ò sarà maggiore, ouero minore di EF; sia prima GH maggiore di EF, si faccia IH* [b] *vguale ad EF, e si tiri* [c] *la retta EI. Si consideri il quadrilatero EFHI, del quale i due lati oppositi EF, IH sono per costruttione, frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, e per l'antecedente dimostratione, gli angoli HIE, FEI sono retti, mà l'angolo FEG è supposto retto, sarà l'angolo FEI* [d] *vguale all'angolo FEG, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile, non dunque la retta GH è maggiore della retta EF.*

Di nuouo supposto, che la retta GH sia minore di EF, si faccia FI vguale ad HG, si tiri [e] *la retta GI. Nel triangolo GEI l'angolo esterno FIG* [f] *è maggiore dell'angolo E interno, ed opposto; mà l'angolo FEG è supposto retto, sarà l'angolo FIG* [g] *maggiore d'vn angolo retto.*



Si consideri il quadrilatero IFHG del quale i due lati oppositi IF, GH per costruttione sono frà loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, per l'antecedente dimostratione li angoli HGI, FIG sono retti, ma l'angolo FIG fù dimostrato maggiore d'vn'angolo retto, sarebbe l'angolo FIG maggiore ed vguale ad vn'angolo retto ch'è impossibile, non dunque la retta GH è minore di EF, ne meno per quel, che s'è dimostrato è maggiore, e perciò le rette EF, GH sono frà di loro vguali: hor essendo le rette GH, EF frà di loro vguali, e fanno angoli retti con la retta CD, per l'antecedente dimostratione l'angolo HGE sarà retto; e perche il punto G è preso ad arbitrio nella retta AB, perciò ogni retta linea, che da ciascuno degl'infiniti punti immaginati in AB cade perpendicolare alla retta CD fà angoli retti con la retta AB, ed è vguale alla retta EF, dal che tutte sono frà di loro vguali, e perciò continuate le rette AB, CD in infinito, in nissun luogo della loro estensione s'auuicinaranno, ne si scostaranno. Per la qual cosa le rette AB, CD segate dalla retta EF ad angoli retti continuate dall'vna, e l'altra parte in infinito in nissun luogo della loro estensione s'auuicinaranno, ò scostaranno, che era da dimostrarsi. Si chiameranno le rette AB, CD come si disse nella 34. definitione rettè; linee parallele, ouero vgualmente distanti.

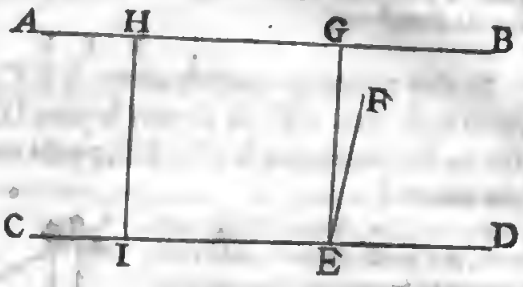


Se

X.

Se due rette linee ſono frà di loro parallele, quella retta linea, che ſega vna di quelle ad angoli retti, continuata ſegarà l'altra ad angoli retti.

Siano le rette linee AB, CD fra di loro parallele, ed in qualche punto E ſopra la retta CD ſia eleuata la retta EF ad angoli retti con la retta CD: Dico che continuata la retta EF ſegarà la retta AB ad angoli retti.



S'intẽdano ſegate le parallele AB, CD, ad angoli retti da qualche retta H I, ſi faccia H G [a] vguale ad I E, e dal punto G, al punto E, [b] ſi tiri la retta GE; perche le rette G H, EI ſono fra di loro vguali e fanno angoli retti con H I, per l'ottaua delle antecedenti dimoſtrationi, gli angoli I E G, H G E ſono retti; ſe dunque la retta EF non paſſa per la retta EG, eſſendo l'angolo FEI retto, ſarà l'angolo GEI vguale all'angolo FEI, la parte vguale al tutto ch'è impoſſibile; e perciò la retta EF paſſa per la retta EG, e concorre con AB nel punto G, ad angoli retti, come ſù propoſto dimoſtrare.

[a] 3. prop.

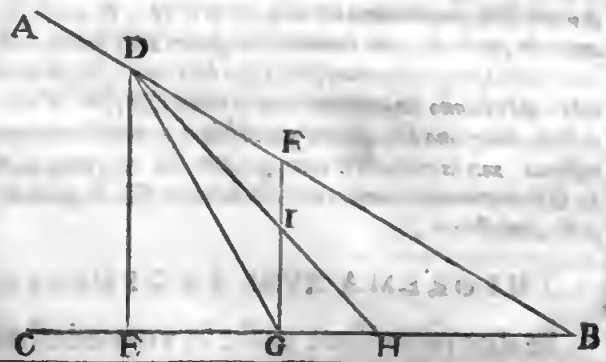
[b] 1. poſt.

XI.

Se ſarà qualunque angolo acuto rettilineo ABC, e da gl'infiniti punti immaginati nella retta AB continuata verſo A in infinito, cadano infinite perpendicolari alla retta CD: Dico che quanto il punto preſo in AB ſarà più lontano dal punto B, tanto la perpendicolare ſegarà la retta CB nel punto più remoto dal punto B.

Cadano da varij punti preſi in AB le rette DE, FG [a] perpendicolari alla retta CB, e ſia il punto D più lontano dal punto B di quello, ch'è il punto F. Dico che il punto E ſarà più lontano dal punto B, che il punto G; ſe il punto E non è più lontano dal punto B, che il punto G, ò la retta DE caderà nel punto G, come fà la retta DG, ouero caderà frà li punti G B, come fà la retta DH, la quale ſega la retta FG in qualche punto I; ſe cade nel punto G, eſſendo gl'angoli DGE FGE retti, ſaranno [b] frà di loro vguali, dal che la parte [c] ſarà vguale al tutto ch'è impoſſibile, non dunque la retta DE cade nel punto G. ſe cade frà i punti G, B, come in H, eſſendo gli angoli I H G, I G H retti, nel triangolo

[a] 12. prop.



[b] 10. aſſiom.

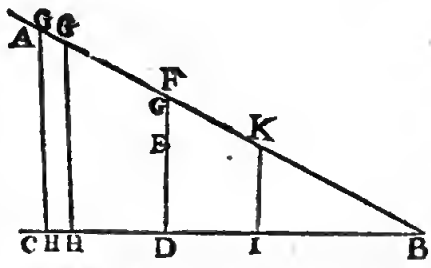
[c] 9. aſſiom.

IGH

IGH i due angoli IHG, IGH nõ ſaranno minori di due angoli retti, ch'è contro alla decimaſettima propoſitione, nõ dunque la retta DE cade frà li punti GB; fù dimoſtrato che ne meno cade nel punto G, in conſeguenza caderà nella retta GC, dalche ſarà EB maggiore di GB; ſe dunque concepiremo continuate le rette BA, BC in infinito verſo A, & C; e da gl'infiniti pũti immaginati nella retta DA infinita verſo A, ſi faranno cadere perpendicolari alla retta CE, nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrarà, che quella ſegarà la retta CE nel punto più lontano dal punto B, la quale caderà dal punto in AD più lontano da eſſo punto B, che era da dimoſtrarſi.

XII.

Se ſarà qualunque angolo acuto A B C, ed in qualche punto D, preſo nella retta CB, ſia eleuata la retta DE ad angoli retti con CB. Dico che continuata la retta DE, quella concorrerà con AB in qualche punto F.



Si prenda in AB qualunque punto G, dal quale ſi faccia cadere la retta GH [a] *perpendicolare alla retta CD; ſe la retta GH cade nel punto D quella paſſerà per la retta DE; e perciò continuata DE paſſerà per il punto G, e ſegarà la retta AB.*

a 12. propoſ.

Se la retta GH cade fra li punti C, D, eſſendo le rette ED, GH perpendicolari alla retta CB, per la nona dimoſtratione, le rette DE, HG ſono fra di loro parallele, dal che continuate, mai concorreranno ſcambieuolmente inſieme, e perciò continuata la retta DE neceſſariamente ſegarà la retta GB.

Se la retta GH cade fra li punti D, B, come fà la retta KI, s'intendano le rette BA, BC [b] *continuate in infinito verſo A, & C, e per l'antecedente dimoſtratione infinite rette linee poſſono cadere dalla retta AK perpendicolari alla retta CI, delle quali quella ſegarà CB in luogo più lontano dal punto B, la quale verrà da quel punto in AB, che ſarà più lontano da eſſo punto B, e perche la retta DB è terminata, e le rette BA, BC s'intendono continuate in infinito verſo A, & C; perciò da gl'infiniti punti G, imaginati nella indeterminata retta GA, poſſono cadere innumerabili rette GH perpendicolari alla retta CD, le quali ſeghino la retta CD in qualche punto H, più lontano dal punto B di quello, ch'è il punto D; ſia dunque quella perpendicolare, che ſega la retta CD, la notata GH; perche le rette GH, ED fanno angoli retti con la retta CD; per la nona dimoſtratione, le rette DE, HG ſono fra di loro parallele, e perciò continuate mai concorreranno inſieme, ma la retta HG concorre con AB nel punto G, neceſſariamente la retta DE continuata concorrerà con la retta GB in qualche punto F, come fù propoſto dimoſtrare.*

b 2. poſt.

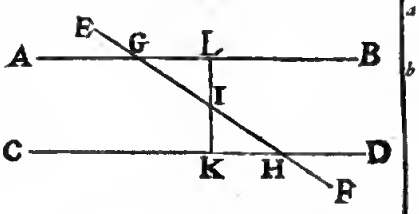
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXVII.

Se due rette linee poſte in vn medeſimo piano ſono ſe-

gate

gate da vn'altra linea retta, e gli angoli alterni ſono frà di loro vguali, quelle rette linee ſono frà di loro parallele.

Siano le rette linee AB, CD in vn medeſimo piano, ſegate dalla retta EF, e gli angoli alterni BGH, CHG, ſiano frà di loro vguali: Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele. Si diuida la retta GH [a] in due parti vguali nel pũto I, dal punto I ſi facciano cadere le rette IK, IL [b] che facciano angoli retti con le rette CD, AB, e ſi conſiderino i due triangoli IKH, ILG; perche l'angolo IHK, per ipoteſi è vguale all'angolo IGL; e l'angolo IKH, per coſtruttione è vguale all'angolo ILG, ſaranno i due angoli IHK, IKH vguali [c] alli due angoli IGL, ILG; il lato IH, per coſtruttione, è vguale al lato IG, ſaranno li rimanenti due lati HK, KI [d] vguali alli reſtanti due lati GL, LI, ed il rimanente angolo KIH vguale al rimanente angolo GIL; ſe le aggiunga vgualmente l'angolo HIL, i due angoli KIH, HIL [e] ſaranno vguali alli due angoli GIL, LIH; ma li due angoli GIL, LIH [f] ſono vguali à due angoli retti, ſaranno li due angoli KIH, HIL vguali à due angoli retti; e perciò le due rette KI, IL [g] coſtituiſcono vna ſola retta linea; e perche gli angoli in K, ed L ſono per coſtruttione retti, le due rette AB, CD ſaranno ſegate dalla retta KL ad angoli retti, e per la nona dimoſtratione le rette AB, CD ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.



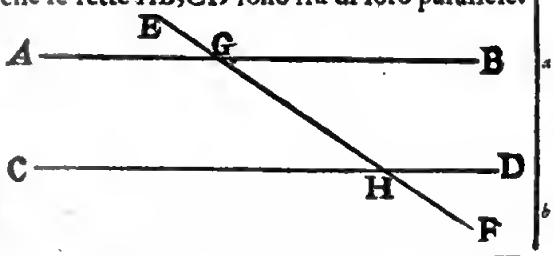
[a] 10. propoſ.
[b] 12. propoſ.
[c] 2. aſſiom.
[d] 26. prop.
[e] 2. aſſiom.
[f] 13. prop.
[g] 14. prop.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due rette linee poſte in vn medeſimo piano ſono ſegate da vn'altra linea retta, e l'angolo eſterno è vguale all'angolo interno, ed oppoſto dalla medeſima parte; ouero li due angoli interni, e dalla medeſima parte ſono vguali à due angoli retti, quelle due rette linee ſono frà di loro parallele.

Siano le due rette linee AB, CD in vn medeſimo piano, ſegate dalla retta EF, come in G, ed H, e l'angolo EGB eſterno, ſia vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto dalla mèdeſima parte B, & D; ouero li due angoli BGH, DHG interni, e dalla medeſima parte BD, ſiano vguali à due angoli retti: Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.

Perche l'angolo AGH [a] è vguale all'angolo al vertice EGB, e l'angolo DHG per ipoteſi è vguale al medeſimo angolo EGB, ſarà l'angolo AGH [b] vguale all'angolo alterno DHG, e

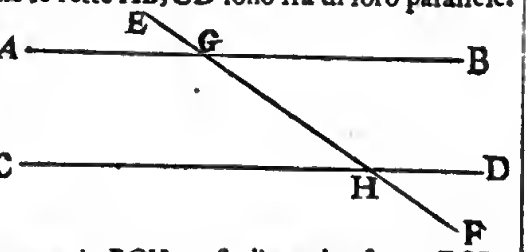


[a] 15. prop.
[b] 2. aſſiom.

per l'antecedéte propoſitione le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.

Di nuouo perche li due angoli BGE, BGH [c] ſono vguali à due angoli retti, e li due angoli BGH, DHG, per ipoteſi ſono vguali à due angoli retti, li due angoli BGE, BGH [d] ſaranno vguali alli due angoli BGH DHG; ſe ne leui il commune angolo BGH, reſta l'angolo eſterno EGB [e] vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, & per quel che ſi è dimoſtrato, le rette linee AB, CD ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 13.prop.
[d] 2.aſſioma
[e] 3.aſſioma.



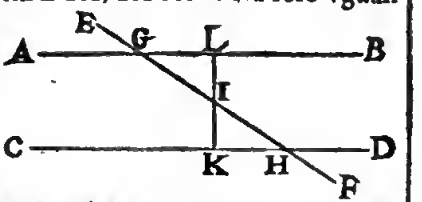
THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIX.

Se due rette linee parallele ſono ſegate da vn'altra linea retta, gli angoli alterni ſono frà di loro vguali; ogn'angolo eſterno è vguale al corriſpondente angolo interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, e li due angoli interni, & dalla medeſima parte ſono vguali à due angoli retti.

Siano le due rette linee parallele AB, CD, ſegate dalla retta EF, come in G ed H: Dico prima, che gl'angoli alterni BGH, CHG ſono frà loro vguali

Si diuida la retta GH [a] in due parti vguali nel punto I, dal punto I ſi faccia cadere la retta IK [b] perpendicolare alla retta CD, ſi prolũghi la retta KI [c] verſo L, e per l'annotatione antecedente al numero decimo, la retta KI continuata ſegarà la retta AB ad angoli retti. Si conſiderino li due triangoli IKH, ILG: perche gli angoli IKH, ILG ſono retti, e gli angoli al vertice KIH, LIG [K] ſono frà di loro vguali, i due angoli HKI, HIK [d] ſono vguali alli due GLI, GIL, il lato IH per coſtruttione è vguale al lato GI, ſarà il rimanente angolo IHK [e] vguale al rimanente angolo IGL; dal che gli angoli alterni BGH, CHG ſono frà di loro vguali, ed i ſupplementi à due retti, cioè gli angoli alterni AGH, DHG ſono frà di loro vguali; ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

[a] 10. prop.
[b] 12.prop.
[c] 2. poſt.
[K] 15.prop.
[d] 2.aſſiom.
[e] 26. prop.



Dico nel ſecondo luogo, che l'angolo eſterno EGB è vguale all'angolo DHG interno, ed oppoſto dalla medeſima parte BD.

Perche l'angolo EGB [f] è vguale all'angolo al vertice AGH, e l'angolo DHG è dimoſtrato vguale al medeſimo angolo AGH, ſarà l'angolo EGB [g] eſterno vguale all'angolo GHD interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, ed i ſupplemẽti à due angoli retti, [b] cioè l'angolo eſterno EGA, ſarà vguale all'angolo CHG, interno ed oppoſto dalla medeſima parte AC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà l'angolo eſterno CHF eſſere vguale all'angolo AGH interno, ed oppoſto, e che l'angolo FHD eſterno è vguale all'angolo BGH interno, ed oppoſto, il che era da dimoſttarſi nel 2. luogo.

[f] 15.prop.
[g] 1.aſſiom.
[b] 13.prop.

Dico

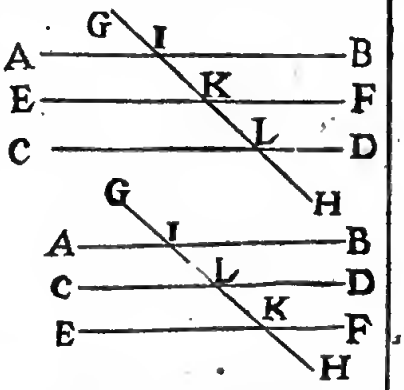
Dico finalmente che li due angoli B G H, DHG interni, e dalla medeſima parte BD ſono vguali à due angoli retti.

Perche l'angolo EGB è dimoſtrato vguale all'angolo D H G, vgualmente ſe gl'aggiunga l'angolo BGH, li due angoli B G E, B G H [k] ſaranno vguali alli due angoli DHG, BGH, ma li due angoli B G E, BG H [l] ſono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque B G H, D H G ſono vguali à due angoli retti, e li ſupplementi à due retti, cioè li due angoli AGH, CHG, [m] interni, e dalla medeſima parte, ſono vguali à due angoli retti, come fù propoſto dimoſtrare.

[k] K 2. aſſiom.
[l] l 13. propoſ.
[m] m 13. prop.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXX.

Quelle rette linee, che ſono parallele ad vna medeſima linea retta, ſe non coſtituiſcono vna ſola retta linea, ſono frà di loro parallele.



Sia la retta AB parallela alla retta EF, e la retta CD parallela alla medeſima EF, e le rette A B, C D non coſtituiſcano vna ſola tetta linea. Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele.

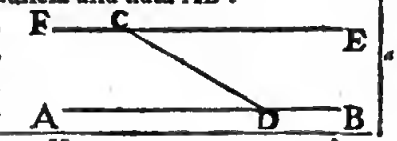
Si concepiſcano ſegate tutte da qualche retta linea GH, nelli punti, per eſempio, I, L, K; perche la retta AB è ſuppoſta parallela ad EF, l'angolo GIB [a] eſterno, è vguale all'angolo IKF interno, ed oppoſto dalla medeſima parte. Similmẽte eſſendo, per ipoteſi, CD parallela alla retta EF, ſarà l'angolo IKF [d] vguale all'angolo ILD, mà l'angolo IKF fù dimoſtrato vguale all'angolo GIB, ſarà l'angolo GIB [b] vguale all'angolo ILD: hor perche le rette A B, C D ſono ſegate dalla retta G H, e l'angolo eſterno GIB è dimoſtrato vguale all'angolo ILD interno, ed oppoſto dalla medeſima parte, ſarà la retta AB [c] parallela alla retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.

[a] a 29. prop.
[d] d 29. prop.
[b] b 1. aſſiom.
[c] c 28. prop.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXI.

Data vna retta linea infinita, ed vn punto fuori di eſſa, per il dato punto far paſſare vna retta linea parallela alla data.

Sia data la retta linea infinita A B, ed il punto fuori C, per il dato punto C ſi vuole far paſſare vna retta parallela alla data AB.



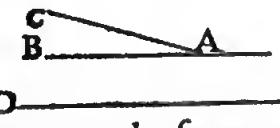
Si prenda in AB qualunque punto D, dal dato punto C al punto D [a] ſi tiri la retta C D, nel punto C, ſopra la retta CD, ſi coſtituiſca l'angolo ECD vgua-

[a] 1. poſt.

b 23.prop. le b all'angolo A D C. Dico che la retta EC continuata ſe ſi vuole verſo F, ed E, è parallela alla data retta AB.

Perche le rette FE, AB ſono ſegate dalla retta CD, e gli angoli alterni ECD, ADC, per coſtruttione, ſono frà di loro vguali, ſarà la retta c 27.prop. FE parallela alla data retta AB; ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

COROLLARIO.



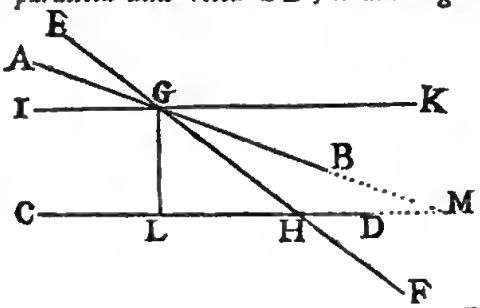
Da quel che s'è detto è manifeſto, che per vn medeſimo punto non poſſono paſſare due rette parallele ad vna medeſima retta linea, perche ſe per qualche punto A paſſino le rette A B, A C parallele alla retta DE, le due A B, A C, per l'antecedente propoſitione ſarebbero frà di loro parallele; dal che le due A B, A C, ſarebbero frà di loro parallele, e concorrerebbero nel punto A, ch'è impoſſibile, non dunque per vn medeſimo punto poſſono paſſare due rette linee parallele ad vn altra retta linea.

SCOLIO I.

Qui facilmente ſi può dimoſtrare l'vndecimo aſſioma d'Euclide nel modo ſeguente.

Se due linee rette in vn medeſimo piano ſono ſegate da vn'altra linea retta, e li due angoli interni dalla medeſima parte ſono minori di due angoli retti, quelle due rette linee prolongate concorreranno inſieme da quella parte, doue ſono li due angoli minori de' due angoli retti.

Siano le due rette linee AB, CD in vn medeſimo piano ſegate dalla retta EF, come in G, ed H, e gli angoli BGH, D H G interni, dalla medeſima parte BD, ſiano minori di due angoli retti: Dico che le rette AB, CD continuate concorreranno verſo M; per l'antecedente propoſitione ſi faccia paſſare per il punto G la retta I G K parallela alla retta C D, li due angoli a 29.prop. *K G H, D H G a ſaranno vguali à due angoli retti, ma li due angoli B G H D H G, per ipoteſi ſono minori di due angoli retti, perciò li due angoli KGH D H G ſono maggiori de' i due angoli BGH DHG; ſe ne leui il commune angolo DHG, reſta l'angolo KGH b maggiore dell'angolo* b 5.aſſiom.



BGH,

BGH, dal che la retta BG ſega l'angolo KGH, e la retta AB ſega la retta IK. Dal punto G c ſi faccia cadere la retta GL perpendicolare alla retta CD, perche le rette IK, CD, per coſtruttione ſono parallele, e la retta GL fà angoli retti con la retta CD, per il numero decimo all'annotatione antecedente, la retta L G fà angoli retti con la retta IK, dalche l'angolo LGB ſarà acuto; finalmente eſſendo l'angolo BGL acuto, e la retta LD fà angoli retti con la retta GL, per il numero duodecimo dell'antecedente annotatione, la retta LD concorrerà con la retta GB in qualche punto M, come fù propoſto dimoſtrare. c 12. p rop.

COROLLARIO.

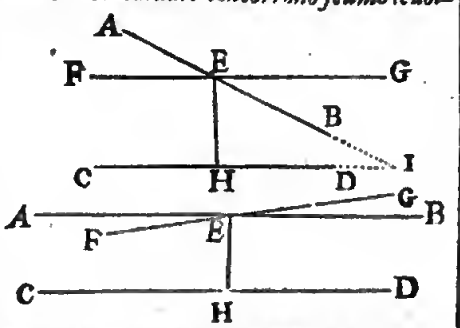
Da quel che s'è detto è manifeſto, che ſe vna retta ſega vna di due rette parallele, quella continuata ſega l'altra delle parallele: poiche eſſendo IK, CD frà di loro parallele, s'è dimoſtrato, che la retta AB, la quale ſega la parallela IK continuata, concorre con l'altra parallela CD.

SCOLIO II.

Perche queſt'opera non ſia mancante in coſa alcuna m'è parſo bene aggiungere la ſeguente dimoſtratione.

Se due rette linee in vn medeſimo piano non ſono frà di loro parallele, quelle continuate concorrono ſcambieuolmente in qualche punto: e ſe due rette linee in vn medeſimo piano continuate non concorrono, quelle ſono frà di loro parallele.

Siano le due rette linee A B, C D in vn medeſimo piano, e ſuppoſto prima, che non ſiano frà di loro parallele: Dico che continuate concorrono ſcambieuolmente in qualche punto.



Nella retta AB ſia preſo qualunque punto E, per il quale ſi faccia paſſare la retta FG a parallela alla retta CD, quella per l'annotatione dopo la quarta propoſitione, ſegarà la retta AB; perche ſe non la ſega, paſſerà per la retta AB, ed in tal caſo la retta AB, ſarà parallela alla retta CD, ch'è contro all'ipoteſi: ſi ſeghino dunque, e la parte EG cada ſopra la retta EB, dal punto E ſi faccia cadere la retta EH b perpendicolare alla retta CD, per l'annotatione dopo la 26. propoſitione numero decimo, la retta EH ſarà angoli retti con la retta FG; a 31. del. b 12. del.

dal

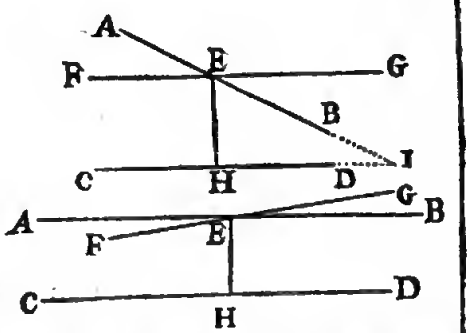
dal che l'angolo BEH ſarà minore d'vn'angolo retto, l'angolo DHE per coſtruttione è retto, i due angoli dunque BEH, DHE ſono minori di due angoli retti, e per lo Scolio antecedente, le rette AB, CD continuate concorrono in qualche punto I, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Dico di nuouo, che ſe le rette AB, CD, poſte in vn medeſimo piano, e continuate non concorrono, ſono frà di loro parallele.

Se le rette AB, CD non ſono fra di loro parallele, ſi prenda in AB qualunque punto E, per il quale ſi faccia paſſare la retta FG [c] *parallela alla retta CD; ſe la retta FG paſſa per la retta AB, ſarà la retta AB parallela, ma ſe non paſſa per la retta AB, quelle ſi ſegaranno ſcambieuolmente nel punto E; cada dũque la parte EG ſopra la retta AB, e la parte FE ſotto: Dal punto E ſopra la retta CD,* [d] *ſi faccia cadere la perpẽdicolare EH, e per l'annotatione dopò la 26. propoſitione numero decimo, la retta EH farà angoli retti con la parallela FG; dal che l'angolo HEG ſarà retto, ma l'angolo BEH è minore dell'angolo GEH, ſarà l'angolo BEH minore del retto; e perche l'angolo DHE, per coſtruttione, è retto, i due angoli BEH, DHE ſaranno minori di due angoli retti, e per l'antecedente Scolio le rette EB, HD continuate concorrono, che è contro all'ipoteſi, mentre fù ſuppoſto, che non concorrono; per la qual coſa le rette AB, CD ſono fra di loro parallele, come fù propoſto dimoſtrare.*

c 31.del.

d 12.del.



COROLLARIO.

Da quel che s'è dimoſtrato è manifeſto, che ſe due rette linee ſono in vn medeſimo piano, le quali continuate non concorrono, quelle in niſſun luogo della loro eſtenſione s'auicinano, ò s'allontanano, ſtante che s'è dimoſtrato, che quando non concorrono ſono frà di loro parallele.

SCOLIO III.

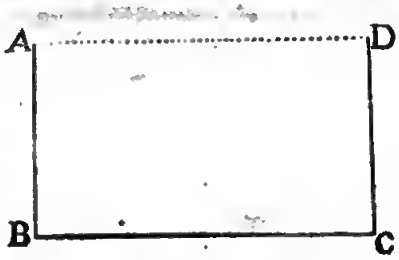
Con tutto ch'Euclide habbia diſpoſto queſti Elementi con ordine intieramente perfetto, non hà però dimoſtrato gli elementi delle parallele con metodo corriſpondente alla perfettione dell'ordine; il che oſſeruato da noſtri Maggiori, per non laſciare mancante in queſta parte vn opera di tanta importanza, cercarono con varij mezzi ſupplire à quello, ch'Euclide ò perche non auuertiſſe all'equiuoco, ò perche ſtimaſſe ſecondo il ſuo metodo il tutto ben dimoſtrato, non hebbe in molta conſideratione; e perche la mancanza non è nelle dimoſtrationi, ma bensì nella certezza de' principij hanno creduto alcuni, che i noſtri Antichi prendeſſero nuoui principij, con i quali poi dimoſtraſſero le paſſioni

delle

delle parallele, ma perche queſte dimoſtrationi in modo alcuno non ſi trouano, cõgetturano, che forſe queſte non foſſero più ſtabili di quelle, che porta Proclo nel ſuo commento, perche ſe foſſero migliori eſſo Proclo non le haurebbe traſcurate, come hà fatto dell'altre, delle quali appreſſo ſi parlerà.

Di due principij ſi ſerue Euclide nel dimoſtrare le paſſioni delle parallele, il primo de' quali (ch'è la definitione delle rette parallele) è ſtimato manеante, per le ragioni da me addotte nella 34. definitione, cioè che chiamando Euclide rette linee parallele quelle, che poſte in vn medeſimo piano, e coutinuate in infinito mai ſcambieuolmente concorrono, e non eſſendoſi dimoſtrato come due rette linee in vn medeſimo piano non concorrendo, ne meno nella loro infinita eſtenſione s'auuicinano, ne ſi ſcoſtano, mentre ſi trouano in natura varie linee, le quali poſte in vn medeſimo piano, e continuate non concorno, e ſempre ſcambieuolmente s'auuicinano; perciò tal definitione è ſtimata mancante, ed inſufficiente à ſpiegare la propria natura delle rette parallele: ond'io, ſeguendo la ſentenza di Poſſidonio, e Gemini, hò definito le rette parallele, non per la negatiua del ſemplice loro ſcambieuole concorſo, come fà Euclide, mà per la negatiua del ſcambieuole auuicinamento, e ſcoſtamento nella loro infinita eſtenſione, il che tutto hò dimoſtrato nell'annotatione dopo la 26. propoſitione, e ſecondo tal definitione, ſenza turbare in coſa alcuna il bell'ordine dato da Euclide à queſti elementi, dimoſtro tutte le paſſioni delle parallele, come ogn'vno da sè può vedere, ſenza auualermi d'altro principio, ma con le ſole coſe prima dimoſtrate. Proclo lib. 2 cap. 11.

Conoſciuta ancora da graui Autori de noſtri tempi l'inſufficienza dell'antedetta definitione d'Euclide, ſtimarono neceſſario abbracciare la ſentenza di Poſsidonio, e Gemini, e dimoſtrare le paſsioni delle parallele con metodo diuerſo da quello tenuto da Euclide, e perciò fare s'auualſero d'vn nuouo principio riceuuto dal P. Clauio nel ſuo Commento ad Euclide cioè che vna retta linea come A B, muouendoſi tranſuerſalmente ſempre perpendicolare, cioè ad angoli retti, ſopra la retta B C, con l'altro eſtremo A deſcriua la retta linea AD. Dopo la 28. propoſ. del primo lib.



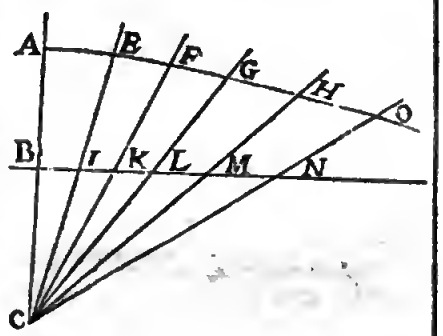
Con pace di così Illuſtri Autori non sò vedere qual certezza maggiore ſia in queſto principio, che in quello d'Euclide quando chiama rettelinee parallele quelle due, ch'eſſendo in vn medeſimo piano, e cõtinuate in infinito mai concorrono: certo è che ſe faremo eſatta riſleſſione all'vno, ed all'altro principio, ſenza dubio trouaremo, ò che la definitione d'Euclide è totalmente perfetta, ed in tal caſo gl'Antichi ſopranominati hanno errato, e con eſſi ancora noi, ò pure non è perfetta, e per vna ſimile ragione, per la quale quella è manеante, e anco imperfetto, è mancante l'antecedente principio. E per chiarezza di quanto s'è detto, mi ſi permetta, che io faccia vna breue repetitione circa à quello, che rende inſufficiente la definitione d'Euclide, ed è, che trouandoſi in natura due linee curue, come ſono le Parabole congruenti, ò le hyperbole congruenti, le quali ſono in vn medeſimo piano, e continuate in infinito ſempre s'auuicinano, e mai concorrono: ſimilmente trouandoſi in natura Viuiano de maximis & minimis lib. 1.

due

Apoll. 14. propoſ. del lib. 2. che corriſponde alla ... propoſ. degl'Elementi Conici poſti nel fine di queſto tomo

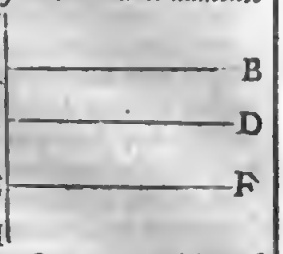
due altre linee, cioè vna curua, e l'altra retta, come è l'hyperbole, e l'Aſyntote, ouero com'è la concoide di Nicomede, e la retta riſpetto la quale ſi genera eſſa concoide, le quali ſono in vn medeſimo piano, e continuate in infinito ſempre s'auuicinano, e mai concorrono: Benche Euclide nella ſua definitione parli ſemplicemente di due linee rette, e non di due curue, ne d'vna retta, ed vna curua, con tutto ciò dandoſi tal'auuicinamento in due linee curue, come anco in vna retta, ed vna curua, cade in dubio ſe queſto auuicinamento ſi dia ancora in due linee rette; e perciò, non hauendo Euclide dimoſtrato come due rette continuate in vn medeſimo piano, non concorrendo, ne meno ſcambieuolte s'auuicinino, tal diſſinitione è ſtimata inſufficiente à ſpiegare la natura delle rette parallele, ed in conſeguenza tutte le paſſioni delle parallele reſtano indimoſtrate. Suppoſto queſto.

Veniamo alla generatione della Concoide di Nicomede. S'intenda la retta BN ſegata dalla retta CA ad angoli retti in qualche punto B, e preſo nella retta AC qualunque punto C, dal quale s'intendano tirate infinite rette linee come CE, CF, CG, CH che ſeghino la retta B N come ne i punti I, K, L, M, &c. preſo poi in AB qualunque punto A, ſi facciano le rette I E, K F, LG, MH ogn'vna vguale ad AB quelle ſaranno frà di loro vguali, e la linea curua, che paſſa per gl'infiniti punti A, E, F, G, H, &c. ſi chiama linea Concoide, la quale continuata in infinito, e continuata ancora la retta BN in infinito, queſte due ſempre s'auuicinano, e mai concorrono inſieme come à ſuo luogo ſi dimoſtrerà: hor perche le infinite reſte AB, EI, FK, GL, HM &c. ſono frà di loro vguali, ſe concepiremo la retta linea AB muouerſi tranſuerſalmente ſopra la retta B N con vna continuata diminutione d'angolo, quella con l'eſtremo A diſegnarà la linea curua AEFGH, ſe dunque la retta AB muouendoſi tranſuerſalmente ſopra la retta B N con vna continuata diminutione d'angolo con l'eſtremo A diſegna la curua AEFGH, cade in dubio ſe la medeſima, ò altra retta linea AB muouẽdoſi tranſuerſalmente ſempre ad angoli retti ſopra la retta BN ſe con l'eſtremo A poſſa deſcriuere qualch' altra linea curua, la quale continuata s'auuicini alla retta B N, e perciò l'antecedente principio preſo dal P. Clauio è tanto imperfetto per quanto è imperfetta la definitione d'Euclide. E ſe qualch'vno diceſſe non poter concepire come la retta AB muouendoſi tranſuerſalmente ſopra la retta BN ſempre ad angoli retti poſſa con l'eſtremo A deſcriuere altro che vna linea retta, ſe gli riſponde, che ne meno potrà concepire, quando le rette AB, CD, EF ſegate dalla retta GH ad angoli retti in A, C, E, come la retta BA può inclinarſi più verſo D, che altroue, e la retta CD poſſa più inclinarſi verſo B, che verſo F, o pure inclinandoſi le due AB, CD ſcambieuolmente in modo, che l'vna s'auuicini all'altra, ed inclinandoſi le due CD, EF in modo, che l'vna s'auuicini all'altra, poſta la retta CD nel medeſimo



tranſi-

transito inclinarsi ad F, ed inclinarsi verso B, mentre solo tale auuicinamento si darebbe, quando li due angoli BAC, FEC fossero acuti, nel qual caso non la retta CD sarebbe inclinata all'vna, ed all'altra parte, mà procederebbe dalle inclinationi delle rette BA, EF, e pure tutte queste ragioni non vagliono cos'alcuna à fauore d'Euclide, mà procedendosi col solito rigore del Geometra si dubita, che non solo le due AB, CD, ouero le due CD, EF, mà



infinite altre perpendicolari alla retta GH continuate siano per auuicinarsi scambieuolmente, e perciò la detta definitione d'Euclide è stimata imperfetta si che fatta la comparatione anco il detto principio preso dal Clauio deue esser stimato imperfetto, ed in conseguenza tutte le passioni delle parallele appoggiate à questo principio si deuono riputare non dimostrate, ò pure se tal principio non è mancante, ne meno è mancante la definitione d'Euclide.

L'altro principio preso da Euclide, è l'vndecima notione nel testo greco, ouero la quinta petitione appresso Proclo, Campano, e Commandino, ed il decimoterzo assioma appresso il P. Clauio, cioè che quando due rette linee in vn medesimo piano sono segate da vn'altra retta linea, e gli angoli interni dalla medesima parte sono minori di due angoli retti, quelle due rette linee continuate concorreranno da quella parte, doue sono gli angoli minori di due retti; e perche questo principio non è niente diuerso dalla conuersa della 17. propositione, alcuni seguendo l'orme di Proclo, Gemini, Possidonio, e Tolomeo, la rimuouono dal numero de' principij, e la pongono frà i Theoremi da dimostrarsi. Procl. lib. 4.

Riferisce Proclo, che Tolomeo ritenendo la definitione d'Euclide, e tutte l'altre cose, solamente rimosse da i principij l'antedetta vndecima notione, la quale prese come Theorema, ed in due modi dimostrò in vn suo libro intitolato, Le rette linee continuate dalle parti, doue gli angoli sono minori di due retti, concorrono; mà perche esso Proclo ne parla con qualche liuore, mentre dice, ch'il progresso tenuto da Tolomeo nell'vna, e l'altra dimostratione è peruerso, ed inganneuole, il che in modo alcuno non può addattarsi nella persona d'vn si grand' huomo come Tolomeo, probabilmente si può credere, che tali dimostrationi possano essere apocrafe.

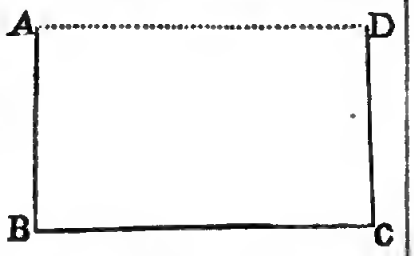
Controuerse da Proclo l'vna, e l'altra dimostratione, che dice essere di Tolomeo, si sforza egli in dimostrare la medesima notione vndecima d'Euclide, con auualersi di quell'antico pronunciato riceuuto da Aristotile, cioè che due rette linee, che fanno angolo in qualche punto, continuate da quella parte doue non fanno angolo, la loro distanza supera ogni finita grandezza. Procl. lib. 4. lib. primo de Cœlo.

Rigetta il P. Clauio nel suo commento ad Euclide la dimostratione fatta da Proclo, allegando che questo pronunciato d'Aristotele è tanto incerto, per quanto è incerta l'vndecima notione d'Euclide, e vi è chi dottissimamente rigetta la medesima dimostratione di Proclo ancora col concedergli il pronunciato del Peripatetico, dimostrando ch'esso Proclo nella sua dimostratione viene à supporre per vero quello, che deue dimostrarsi, cioè che due rette in vn medesimo piano segate da vn'altra retta ad angoli retti, quelle continuate in infinito in nissun luogo della loro estensione s'auuicinano, ò si scostano, Scol. alla prop. 28. del lib. primo.

mà da per tutto ritengono il medesimo interuallo.

Scol. alla propos. 28. lib. primo.

Finalmente il P. Clauio, ritenendo la medesima definitione d'Euclide, cerca supplire alla mancanza di Proclo con dimostrare per altra via l'vndecima notione d'Euclide, e perciò fare s'auuale del sopradetto principio, cioè, che muouendosi la retta AB transuersalmente, & ad angoli retti, sopra la retta BC, con l'estremo A disegna la retta linea AD, il che sopra fù riprouato, per essere questo principio tanto imperfetto per quanto è stimata imperfetta la definitione sopra nominata d'Euclide e perciò il P. Clauio ne meno potè conseguirne l'intento.

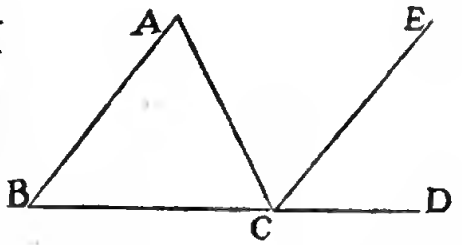


Hauendo io dunque osseruato, che per l'insufficienza de' principij presi, tanti huomini Illustri non hanno potuto conseguire l'intento di rendere ben dimostrate le passioni delle parallele, sopra le quali è fabricata poi tutta la machina composta di varie scienze, chè si numerano nella Matematica, pensai rimuouere affatto dalla Geometria quei principij, che non erano per se noti, e ne meno si poteuano dimostrare, e ricorrendo alla comparatione della linea retta, e la curua, conobbi essere impossibile, che la retta linea possa esser parallela alla curua, cioè essere impossibile, che tutte le rette, le quali cadono dalla curua perpendicolari alla retta linea, siano frà di loro vguali; e benche questo sia noto dalla sola definitione della retta linea, e della curua, con tutto ciò mi parue bene farui sopra qualche picciola dimostratione, come si vede nel numero settimo dell' annotatione dopo la 26. propositione, e da quella feci il passaggio ad altre dimostrationi, mediante le quali facilmente potei dimostrare la 34. definitione: si che con questa, e con altre dimostrationi, che gli seguono, non hebbi difficoltà à dimostrare l'vndecima notione d'Euclide, e successiuamente tutte l'altre passioni delle parallele, come si può vedere nelle propositioni seguenti.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Continuato qualunque lato d'vn triangolo rettilineo, l'angolo esterno è vguale alli due angoli interni, ed opposti, insieme giunti, e li trè angoli del triangolo sono vguali à due angoli retti.

Sia qualsiuoglia triangolo rettilineo ABC, del quale sia continuato qualunque lato B C verso D. Dico che l'angolo D C A esterno è vguale alli due angoli CAB, CBA interni, ed opposti.



a 31. prop. Dal pũto C si tiri la retta CE a parallela al lato AB.

Perche le rette parallele AB, EC sono segate dalla retta B D

l'angolo eſterno ECD [b] ſarà vguale all'angolo ABC interno, ed oppoſto dalla medeſima parte. Similmente perche le parallele AB, EC ſono ſegate dalla retta AC, gli angoli ECA, BAC alterni, ſono frà di loro vguali, dal che li due angoli DCE, ECA, cioè tutto l'angolo eſterno DCA, [c] è vguale alli due angoli CAB, CBA, interni, ed oppoſti, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

[b] 29. prop.

[c] 2. aſſiom.

Di nuouo eſſendoſi dimoſtrato l'angolo D C A vguale alli due angoli C A B, C B A, giunti inſieme, all'vna, ed all'altra parte s'aggiunga vgualmente l'angolo ACB, li trè angoli CAB, CBA, A C B [c] ſaranno vguali alli due angoli DCA, ACB, mà li due angoli DCA, A C B, [d] ſono vguali à due angoli retti; li tre angoli dunque CAB, CBA, ACB, del triangolo A B C, ſono vguali à due angoli retti, ch'era da dimoſtrarſi.

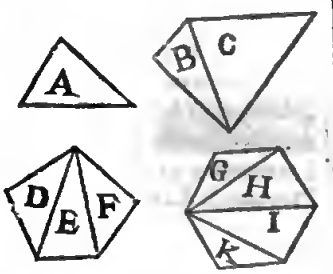
[c] 2. aſſioma

[d] 13. prop.

S C O L I O

Da quel, che s'è detto, facilmente ſi viene in cognitione à quanti angoli retti ſiano vguali gli angoli d'ogni figura rettilinea.

Tutti gli angoli di qualunque figura rettilinea ſono vguali à tanti angoli retti, per quanto è il duplo numero de' lati, che reſtano, detrattone due.



Per eſſempio, il triangolo A hà tre lati, detrattone due, reſta vno, il di cui duplo ſarà due, e coſi diremo, che trè angoli d'vn triangolo ſono vguali à due retti, come s'è dimoſtrato nell'antecedente propoſitione.

Il quadrilatero B C ſi diuide nè i due triangoli B, & C; e perche li tre angoli d'vn triangolo [a] ſono vguali à due retti, li ſei angoli dunque delli due triangoli B, & C, ſono vguali à quattro retti; mà li ſei angoli dei triangoli B, & C ſono vguali à i quattro angoli del quadrilatero BC, ſaranno i quattro angoli del quadrilatero BC, [b] vguali à quattro retti, cioè, leuato due dal numero de' lati, reſta due, il di cui duplo è quattro, e coſi diremo, che i quattro angoli della figura quadrilatera ſono vguali à quattro angoli retti.

[a] 32. prop.

[b] 1. aſſiom.

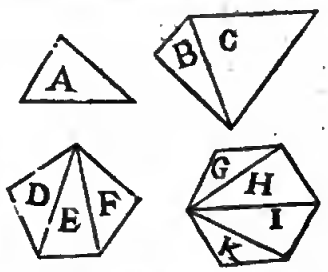
Similmente la figura di cinque lati DEF ſi diuide in trè triangoli, gli angoli d'ogni triangolo [c] ſono vguali à due retti, ſaranno tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F vguali à ſei angoli retti, ma tutti gli angoli delli trè triangoli D, E, F, ſono vguali alli cinque angoli della figura di cinque lati, perciò tutti gli angoli della figura di cinque lati, [d] ſono vguali à ſei retti, cioè, leuato due dal numero de' lati della figura di cinque lati, reſta trè, il di cui duplo è ſei, e così diremo, che i cinque angoli della figura di cinque lati ſono vguali à ſei angoli retti.

[c] 32. prop.

[d] 1. aſſiom.

Di nuouo la figura di ſei lati G H I K, ſi diuide ne' i quattro triangoli

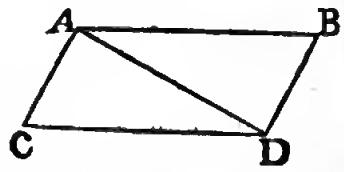
G, H, I, K; e perche trè angoli d'vn triangolo [e] *ſono vguali à due retti, tutti gli angoli de'i quattro triangoli G, H, I, K, ſono vguali ad otto angoli retti, mà tutti gli angoli delli quattro triangoli G, H, I, K ſono vguali alli ſei angoli della figura di ſei lati GHIK, gli angoli dunque della figura di ſei lati ſono vguali ad otto angoli retti, cioè leuato due dal numero de' lati, che ſono ſei, reſta quattro, il di cui duplo è otto, e coſi diremo, che gli angoli della figura di ſei lati ſono vguali ad otto angoli retti, e con queſt'ordine ſi procederà in tutte le altre figure rettilinee.*



e 32. prop.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se due rette linee ſono vguali, e parallele, quelle, che che congiungono gl'eſtremi dalle medeſime parti, ſono frà di loro vguali, e parallele.



Siano le rette linee A B, C D, frà di loro vguali, e patallele; tirate le rette AC, BD, Dico che le rette AC, B D. ſono frà di loro vguali, e parallele. Si tiri [a] la retta AD.

a 1. poſtul.

Perche le rette AB, CD, per ipoteſi, ſono frà di loro parallele, ſegate dalla tetta AD, gli angoli alterni BAD, CDA [b] ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i triangoli ADB, ADC, eſſendo il lato AB, per ipoteſi vguale al lato CD, ed il lato A D è commune, i due lati BA, A D, [c] ſono vguali alli due lati C D, D A, l'angolo BAD, è dimoſtrato vguale all'angolo CDA, ſarà la baſe B D [d] vguale alla baſe AC, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD. Finalmente petche le rette AC, BD ſono ſegate dalla retta AD, e gli angoli alterni BDA, CAD, ſono frà di loro vguali, le rette AC, BD [e] ſaranno frà di loro parallele. Per la qual coſa le rette AC, BD, ſono frà di loto vguali, e parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

b 27. prop.
c 2. aſſiom.
d 4. prop.
e 27. prop.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

In ogni parallelogrammo i lati oppoſti ſono frà di loro vguali, gli angoli oppoſti ſono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali.

Sia qualunque parallelogrammo A B D C, il di cui diametto A D, come nella figura dellapropoſitione antecedente. Dico che il lato A B è vguale al lato oppoſto CD, il lato AC è vguale all'oppoſto BD, l'angolo B è vguale all'angolo oppoſto C, l'angolo B A C è vguale all'angolo op-

poſto

posto BDC,ed il diametro AD diuide il parallelogrammo ABDC in due parti vguali.

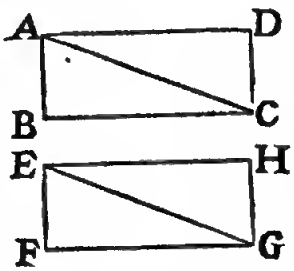
Perche il quadrilatero ABDC è suppoſto parallelogrammo, illato AB [a] sarà parallelo al lato D C, ed il lato A C sarà parallelo al oppoſto DB,ed essendo i lati AB, DC frà di loro paralleli segati dalla retta A D, gli angoli alterni BAD,CDA [b] sono frà di loro vguali.Similmẽte perche la retta AD sega le parallele AC, BD, gli angoli C A D, BDA alterni [b] sono frà di loro vguali. Si considerino i triangoli BAD, DCA, de' quali i due angoli B A D, B D A, dell'vno, sono vguali alli due angoli CAD, C D A, dell'altro, il lato AD è commune à tutti due, saranno i rimanenti due lati BD, BA [c] dell'vno,vguali à i rimanenti due lati AC, DC dell'altro, cioè il lato AB vguale al lato DC, ed il lato AC vguale al lato D B, ed il restante angolo B sarà vguale al restante angolo C; e perche l'angolo BAD è mostrato vguale all'angolo C D A, e l'angolo BDA vguale all'angolo CAD, sarà tutto l'angolo BAC [d] vguale all'oppoſto angolo B D C. Finalmente perche i due lati AB, B D, del triangolo BAD, sono mostrati vguali à i due lati A C, D C del triangolo A DC, e l'angolo B è mostrato vguale all'angolo C, sarà il triangolo A B D [e] vguale al triangolo ACD: per la qual cosa i lati oppoſti d'ogni parallelogrammo sono vguali, gli angoli oppoſti sono frà di loro vguali, ed il diametro diuide il parallelogrammo in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi.

[a] 35.defin.
[b] 29.prop.
[b] 29.prop.
[c] 26.prop.
[d] 2.assiom.
[e] 4.prop.

SCOLIO.

Li rettangoli contenuti da linee rette vguali sono frà di loro vguali.

Siano li rettangoli BD, FH, e sia AB vguale ad EF, ed il lato BC vguale ad FG. Dico che li rettangoli BD, FH sono frà di loro vguali; si tirino li diametri AC, EG, perche li lati AB, BC sono vguali à i lati EF, FG, e li angoli in B ed F sono vguali, stante che sono retti, sarà il triangolo ABC [a] vguale al triangolo EFG ed i loro dupli,cioè li rettangoli BD, FH [b] sono frà di loro vguali,ch'era da dimostrarsi.

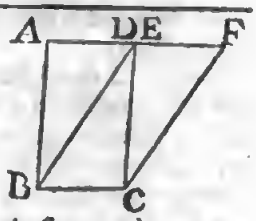


[a] 4.prop.
[b] 34.prop.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXV.

I Parallelogrammi costituiti sopra d'vna medesima base, e frà le medesime parallele, sono frà di loro vguali.

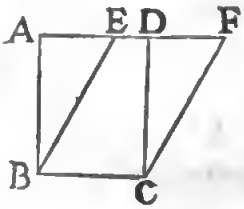
Sia-



Siano i parallelogrammi ABCD, EBCF, ſopra la medeſima baſe BC, e collocati frà le medeſime parallele AF, BC; dico che la ſuperficie parallelogramma A B C D è vguale alla ſuperficie parallelogramma EBCF.

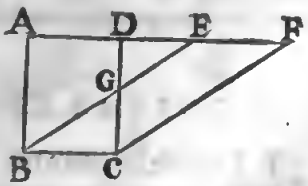
O' gli angoli ADC, FEB terminano in vn ſolo punto come appariſce nella prima figura, ò l'angolo FEB cade nel lato AD, come nella ſeconda figura; ò pure cade fuori del lato AD nella continuatione DF, come nella terza figura. Suppoſto prima che l'angolo FEB, termini nel punto D, perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [a] è vguale all'oppoſto lato BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato E F, è vguale all'oppoſto lato B C, ſarà il lato AD vguale al lato EF. Similmente nel parallelogrammo ABCD il lato AB è vguale all'oppoſto lato D C, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale al lato oppoſto FC, però i due lati AB, BD del triãgolo ABD, [b] ſono vguali à i due lati EC, CF del triangolo ECF; la baſe AD fù moſtrata vguale alla baſe EF, ſarà l'angolo ABD [c] vguale all'angolo ECF, ed il triangolo ABD [d] vguale al triangolo ECF, vgualmente ſe gl'aggiunga il commune triangolo EBC, ne verrà il parallelogrammo ABCD, [e] vguale al parallelogrammo EBCF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 34. prop.
b 2. aſſiom.
c 8. prop.
d 4. prop.
e 2. aſſiom.



Cada il punto E frà i punti A, & D, come nella ſeconda figura. Perche nel parallelogrammo ABCD il lato A D [f] è vguale all'oppoſto BC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EF è vguale all'oppoſto BC, ſarà il lato A D [m] vguale al lato EF, ſe ne leui la commune parte E D, reſta A E [g] vguale alla retta D F. In oltre perche nel parallelogrãmo ABCD il lato AB [h] è vguale all'oppoſto DC, e nel parallelogrammo EBCF il lato EB è vguale all'oppoſto FC, i due lati AB, BE, del triangolo ABE, ſaranno vguali a i due lati DC, CF del triangolo DCF, la baſe AE è dimoſtrata vguale alla baſe D F, ſarà l'angolo A B E [i] vguale all'angolo D CF, ed il triangolo A B E [k] vguale al triangolo D C F; vgualmente ſe gl'aggiunga il trapetio EBCD, ne viene il parallelogrammo A B C D [l] vguale al parallelogrammo E B C F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo caſo.

f 34. prop.
m 1. aſſiom.
g 3. aſſiom.
h 34. prop.
i 8. prop.
k 4. prop.
l 2. aſſiom.



Finalmente cada il punto E nella cõtinuatione D F, come nella terza figura. Perche il lato A D [m] è vguale all'oppoſto BC, ed il lato E F è vguale all'oppoſto BC, ſarà il lato A D [n] vguale al lato EF; vgualmente ſe gli aggiunga la retta D E, ne viene la retta A E [o] vguale alla retta D F. Nel paralellogrammo B D il lato A B [p] è vguale all'oppoſto D C, e nel parallelogrammo E B CF il lato E B è vguale all'oppoſto F C; però i due lati AB, BE, del triangolo ABE, ſono vguali à i due lati DC, CF, del

m 34. prop.
n 1. aſſiom.
o 2. aſſiom.
p 34. prop.

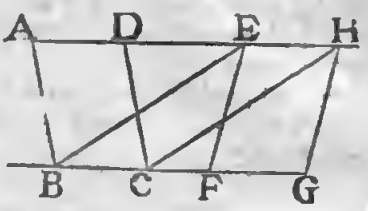
trian-

triangolo D C F; la baſe AE è moſtrata vguale alla baſe DF, ſarà l'angolo A B E [g] vguale all'angolo D C F, ed il triangolo A B E [r] vguale al triangolo DCF; da i quali ſe ne leui il commune triangolo D G E, reſta il trapetio ABGD [ſ] vguale al trapetio GCFE, à i quali s'aggiunga vgualmente il triangolo GBC, ne viene il parallelogrammo A B C D [t] vguale al parallelogrammo EBCF. Per la qual coſa i parallelogrammi, che hanno vna medeſima baſe, e ſono frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

g 28. propoſ.
r 4. propoſ.
ſ 3. aſſiom.
t 2. aſſiom.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVI.

I Parallelogrammi, che hanno vguali baſi, e ſono collocati frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali.



Siano li parallelogrammi A B C D, E F G H, i quali habbiano le baſi B C, FG vguali, e ſiano collocati frà le medeſime parallele A H, BG. Dico che ſono frà di loro vguali.

Per dimoſtrar queſto dal punto B al punto E [a] ſi tiri la retta BE, e dal punto C al punto H ſi tiri la retta CH.

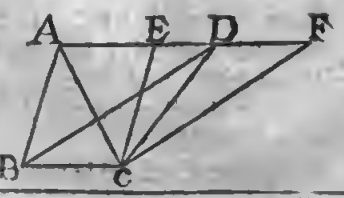
a 1. poſt.

Perche la baſe B C è ſuppoſta vguale alla baſe F G, ed il lato F G [b] è vguale all'oppoſto EH, ſarà la retta BC [c] vguale alla retta EH; e perche la retta AH è parallela, per ipoteſi, alla retta BG, ſaranno le rette EH, C B, frà di loro vguali è parallele, dal che le rette linee E B, H C, che congiungono gli eſtremi, [d] ſaranno vguali, e parallele; ed il quadrilatero EBCH [e] ſarà parallelogrammo. Si conſiderino li due parallelogrammi ABCD, EBCH, i quali hanno la medeſima baſe BC, e ſono coſtituiti frà le medeſime parallele AH, BG, e perciò ſaranno, [f] frà di loro vguali. Similmente i due parallelogrammi E B C H, EFGH, hanno la medeſima baſe EH, e ſono coſtituiti frà le medeſime parallele A H, B G inconſeguenza ſono frà di loro vguali; ma il parallelogrammo A B C D fù moſtrato vguale al parallelogrammo EBCH; il parallelogrammo dunque ABCD [g] ſarà vguale al parallelogrammo E F G H, ch'era da dimoſtrarſi.

b 34. prop.
c 1. aſſiom.
d 33. prop.
e 35. defin.
f 35. prop.
g 1. aſſiom.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXVII.

I triangoli, che hanno la medeſima baſe, e ſono collocati frà le medeſime parallele, ſono frà di loro vguali.

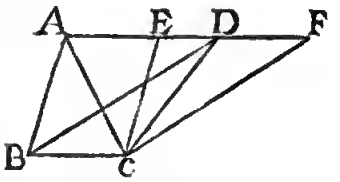


Siano i triangoli A B C, D B C, i quali habbiano la medeſima baſe BC, e ſiano collocati frà le medeſime parallele AF, BC. Dico che ſono frà di loro vguali.

Dal punto C [a] ſi tiri la retta CE pa-

a 31. prop.

rallela alla retta A B, che concorra con E F in qualche punto E ; e dal medesimo punto C si tiri la retta CF parallela alla retta B D , la quale concorrerà con la retta AD continuata in qualche punto F .

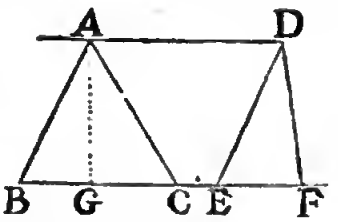


Perche le rette AF, BC, per ipotesi, sono parallele , e la retta C E per costruttione è parallela ad A B , come anco la retta C F è parallela al lato B D ; i quadrilateri ABCE , D B C F, [b] saranno parallelogrammi , i quali, hauendo la medesima base BC, ed essendo collocati frà le medesime parallele AF, BC, [c] saranno frà di loro vguali; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo ABCE in due parti vguali, ed il diametro DC, diuide il parallelogrammo DB CF in due parti vguali , essendo essi parallelogrammi frà di loro vguali, le loro metà saranno ancora frà di loro vguali: mà il triangolo A B C è la metà del parallelogrammo A B C E, ed il triangolo D B C è la metà del parallelogrammo DBCF, perciò il triangolo ABC sarà vguale al triangolo DBC , come fù proposto dimostrare .

[b] 35. defin.
[c] 35. prop.
[d] 34. prop.

COROLLARIO.

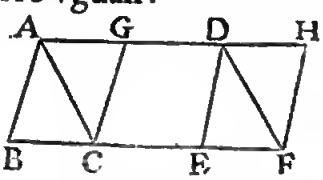
Da qui è manifesto , che se li triangoli posti frà le medesime parallele hanno ineguali basi, quello sarà maggiore, che haurà la base maggiore .



Per essempio siano li triangoli ABC , D EF , frà le medesime parallele A D , BF , e sia la base B C maggiore della base E F . Dico che il triangolo ABC sarà maggiore del triangolo D E F . Si faccia CG vguale ad EF, e si tiri la retta GA, sarà BC maggiore di GC, ed il triangolo A B C maggiore del triangolo AGC , mà per l'antecedente propositione il triangolo A G C è vguale al triangolo D E F , sarà il triangolo ABC maggiore del triangolo DEF , come si disse .

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

I triangoli , che hanno vguali basi , e sono collocati frà le medesime parallele , sono frà di loro vguali .



Siano i triangoli ABC , D E F , i quali habbiano le basi BC , EF vguali , e siano collocati frà le medesime parallele A H , BF . Dico che il triangolo ABC è vguale al triangolo DEF .

Dal punto C [a] si tiri la retta CG paral-

[a] 31. prop.

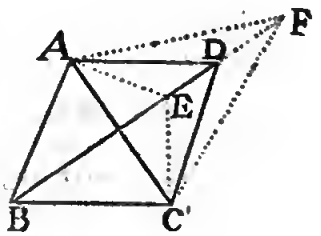
lela

lela alla retta BA, e dal punto F ſi tiri la retta FH parallela al lato E D; eſſendo, per ipoteſi, AH parallela à BF, i quadrilateri BG, EH [b] ſaranno parallelogrammi, i quali, hauendo le baſi BC, EF vguali, ed eſſendo collocati frà le medeſime parallele AH, B F, ſono [c] frà di loro vguali; e perche il diametro AC [d] diuide il parallelogrammo BG in due parti vguali, ed il diametro D F diuide il parallelogrammo E H in due parti vguali, eſſendo i parallelogrammi BG, EH vguali, le loro metà, cioè li triangoli ABC, DEF, [e] ſaranno frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi

[b] 35. defin.
[c] 36. prop.
[d] 34. prop.
[e] 3. aſſiom.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIX.

I triangoli vguali coſtituiti in vna medeſima baſe, e collocati dalla medeſima parte; ſono frà le medeſime parallele.



Siano gli vguali triangoli A B C, DBC, i quali habbiano la medeſima baſe B C, e ſiano collocati dalla medeſima parte AD. Dico che ſono frà le medeſime parallele, cioè che la retta AD è parallela alla retta B C.

Se la retta AD non è parallela alla retta B C, ſi può dal punto A [a] tirare vna retta linea parallela alla retta BC; ò quella paſſerà ſotto, ò ſopra la retta AD; paſſi prima ſotto la retta A D, e ſia AE, la quale concorra col lato BD in qualche punto E, ſi tiri [b] la retta CE; e ſi conſiderino i due triangoli ABC, EBC, che hanno la medeſima baſe BC, e ſono collocati frà le medeſime parallele AE, BC, [c] ſarà il triangolo EBC vguale al triangolo ABC, mà per ipoteſi, il triangolo DBC è vguale al medeſimo triangolo ABC, ſarà il triangolo EBC [f] vguale al triangolo DBC, la parte vguale al tutto, ch'è [g] impoſſibile, non dunque la retta AE è parallela alla retta BC.

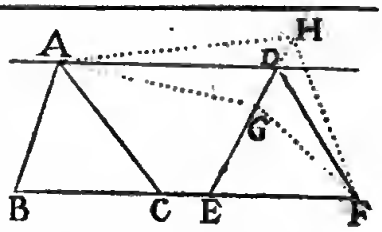
Di nuouo paſſi la tirata parallela ſopra la retta AD, e ſia la notata AF; ſi continui il lato BD [b] ſino che concorra con AF in qualche punto F, ſi tiri [i] la retta CF. Hauremo i triangoli ABC, FBC coſtituiti ſopra la medeſima baſe BC, e frà le medeſime parallele AF, BC, [k] dal che il triangolo FBC ſarà vguale al triangolo ABC; ma il triangolo DBC, per ipoteſi, è vguale al triangolo ABC, ſarà il triangolo DBC [l] vguale al triangolo FBC, la parte vguale al tutto, ch'è [m] impoſſibile, non dunque la retta AF è parallela alla retta BC; ſù dimoſtrato, che ne meno la retta AE è parallela alla retta BC, in conſeguenza ſarà la retta AD parallela alla retta BC, come ſù propoſto dimoſtrare.

[a] 31. prop.
[b] 1. poſt.
[c] 37. prop.
[f] 1. aſſiom.
[g] 9. aſſiom.
[b] 2. poſt.
[i] 1. poſt.
[k] 37. prop.
[l] 1. aſſiom.
[m] 9. aſſiom.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XL.

I triangoli vguali, che hanno vguali baſi poſte nella medeſima dirittura, e collocati dalla medeſima parte, ſono frà le medeſime parallele.

Siano gli vguali triangoli A B C, D E F, e ſia la baſe BC vguale alla baſe EF, nella medeſima dirittura BF, ed i triangoli ſiano collocati dalla medeſima parte AD. Dico che ſono frà le medeſime parallele, cioè che la retta A D è parallela alla retta BF.



[a] 31. prop. Se la retta AD non è parallela alla retta BF, ſi tiri dal punto A [a] vna retta linea parallela alla retta B F, la quale ò paſſerà ſotto la retta A D, ouero ſopra. Paſſi prima, s'è poſsibile, ſotto la retta A D, quella

[b] 1. poſt. concorrerà col lato ED in qualche punto G, ſi tiri [b] la retta GF; ed hauremo i due triangoli ABC, GEF, ſopra le vguali baſi BC, EF, e frà le me-

[c] 38. prop. deſime parallele A G, B F, [c] e perciò ſarà il triangolo G E F vguale al triangolo ABC, ma il triangolo D E F, per ipoteſi, è vguale al medeſi-

[d] 1. aſſiom. mo triangolo ABC, ſarà il triangolo GEF [d] vguale al triangolo DEF, la

[e] 9. aſſiom. parte vguale al tutto, [e] ch'è impoſsibile, non dunque la retta A G è parallela alla retta BF.

Paſsi di nuouo la parallela ſopra la retta A D, che ſia la notata A H, la quale concorrerà col lato E D continuato in qualche punto H. Si tiri la retta HF, ed hauremo i triangoli ABC, HEF ſopra le vguali baſi BC,

[f] 38. prop. EF, e frà le medeſime parallele AH, BF, dal che il triangolo H E F ſarà vguale al triangolo ABC; ma il triangolo DEF è poſto vguale al me-

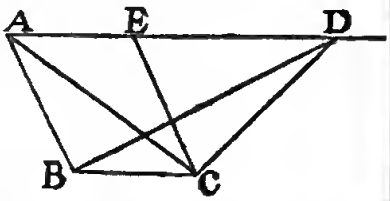
[g] 1. aſſiom. deſimo triangolo ABC, ſarà il triangolo DEF [g] vguale al triangolo HE

[b] 9. aſſiom. F, la parte vguale al tutto, ch'è [b] impoſsibile; non dunque la retta AH è parallela alla retta BF; ma ſi diſſe, che la retta AG ne meno è parallela alla retta BF, in conſeguenza la retta AD ſarà parallela alla retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLI.

Se vn triangolo, ed vn parallelogrammo, haueranno vna medeſima baſe, e ſaranno collocati frà le medeſime parallele il parallelogrammo ſarà il doppio del triangolo.

Sia il parallelogrammo A B C E, ed il triangolo D B C ſopra d'vna medeſima baſe BC, e frà le medeſime parallele AD, BC. Dico che il parallelogrammo ABCE è il doppio del triangolo DBC.



[a] 1. poſtula. Si tiri [a] la retta AC; ſarà il triangolo ABC [b] vguale al triangolo ACE, e perciò il parallelogrammo A B CE, ſarà il doppio del triangolo ABC. In oltre perche i triangoli ABC,

[b] 34. prop. DBC, hanno vna medeſima baſe BC, e ſono collocati frà le medeſime

[c] 37. prop. parallele AD, BC, ſarà il triangolo DBC [c] vguale al triangolo A B C;

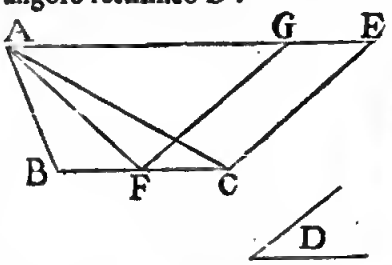
mà

mà il parallelogrammo ABCE, per quel, che s'è moſtrato, è il doppio del triangolo ABC, ſarà il parallelogrammo ABCE il doppio del triangolo DBC, come fù propoſto dimoſtrare.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XLII.

Dato vn triangolo, ed vn angolo rettilineo, deſcriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo, e che habbia vn angolo vguale ad vn angolo dato.

Sia il dato triangolo rettilineo ABC, e l'angolo D. Dico eſſer poſſibile deſcriuere vn parallelogrammo vguale al dato triangolo A B C, e che habbia vn angolo vguale al dato angolo rettilineo D.



Per il vertice A, del triangolo ABC, [a] ſi faccia paſſare la retta A E parallela alla baſe BC: ſi diuida la baſe BC [b] in due parti vguali in F, e nel punto F ſi coſtituiſca l'angolo CFG [c] vguale all'angolo D, ſi continui la retta GF, [d] che coſtituiſce l'angolo, fin che concorra con la retta AE in qualche punto G, dal punto C ſi tiri la retta CE, [e] parallela alla retta FG, la quale concorrerà con la retta AE in qualche punto E. Eſſendo per coſtruttione, la retta AE parallela alla baſe BC, e la retta EC parallela ad FG, il quadrilatero GFCE [f] ſarà parallelogrammo. Dico che il parallellogrammo GFCE è vguale al triangolo ABC, ed hà l'angolo GFC vguale all'angolo D.

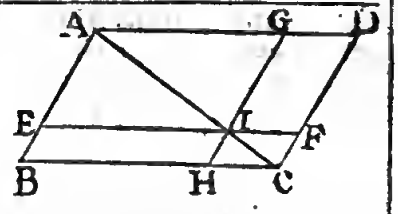
Si tiri [g] la retta FA, ed hauremo i due triangoli ABF, AFC, ſopra le vguali baſi BF, FC, e frà le medeſime parallele AE, BC, dalche i triangoli ABF, AFC [h] ſono frà di loro vguali, ed il triangolo ABC ſarà il doppio del triangolo AFC. In oltre il parallelogrammo GFCE, ed il triangolo AFC, hanno la medeſima baſe FC, e ſono frà le medeſime parallele AE, BC, ſarà il parallelogrammo GFCE [i] il doppio del triangolo AFC; ma il triangolo ABC fù moſtrato il doppio del medeſimo triangolo AFC, ſarà il parallelogrammo GFCE [k] vguale al triangolo ABC, e perche l'angolo GFC, per coſtruttione, è vguale all'angolo D, ſarà dunque coſtrutto il parallelogrammo GFCE vguale al dato triangolo ABC, ed haurà l'angolo GFC vguale all'angolo dato D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[a] 31. prop.
[b] 10. prop.
[c] 23. prop.
[d] 3. poſt.
[e] 31. prop.
[f] 35. defin.
[g] 1. poſt.
[h] 38. prop.
[i] 41. prop.
[k] 6. aſſiom.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIII.

Se vn parallelogrammo è diuiſo in quattro parallelogrammi, due de' quali ſiano intorno al diametro, i complementi ſono frà di loro vguali.

Sia il parallelogrammo ABCD, diuiſo ne' i quattro parallelogrammi AEIG, IHCF, EBHI, GIFD, e ſiano li due AEIG, IHCF intorno al diametro AC. Dico che li complementi EBHI, IFDG, ſono frà di loro vguali.



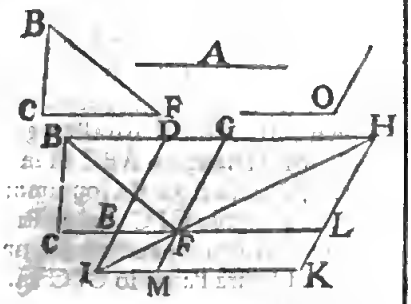
[a] 4. prop. Perche il diametro AC [a] diuide il parallelogrammo ABCD in due parti vguali, ſarà il triangolo ABC vguale al triangolo ACD: Similmente il diametro A I ſega il parallelogrammo AEIG in due parti vguali, ſarà il triangolo AEI vguale al triangolo AIG; finalmente il diametro IC diuide il parallelogrammo IHCF in due parti vguali, dalche il triangolo IHC è vguale al triangolo ICF: ſe dagl'vguali triangoli ABC [b] 3. aſſiom. ACD ſe ne leuano gli vguali triãgoli AEI, AIG, reſta il trapetio CIEB [b] vguale al trapetio CIGD, da i quali ſe ne leuino gli vguali triangoli IHC, ICF, reſtano i complementi EBHI, GIFD frà di loro vguali, che era da dimoſtrarſi.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XLIV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo, vguale ad vn dato triangolo rettilineo, ſecondo vn angolo rettilineo dato.

Sia data la retta linea A, il triangolo BCF, e l'angolo rettilineo O. Dico eſſer poſſibile deſcriuere vn parallelogrammo, vguale al dato triangolo BCF, che habbia vn angolo vguale all'angolo rettilineo O, e che habbia vn lato vguale alla retta linea data A.

Per la 42. propoſitione ſi deſcriua il parallelogrammo DEFG vguale al triangolo BCF, che habbia l'angolo GFE vguale al dato angolo O, poi [a] ſi prolunghi il lato DG verſo [a] 2. poſt. H, e ſi faccia la retta GH [b] vguale [b] 3. prop. alla data linea retta A; dal punto H [c] 1. poſt. al punto F [c] ſi tiri la retta HF, la [d] 2. poſtul. quale ſi continui [d] fin che concorra col lato DE, prolungato in qualche punto I; dal punto I ſi tiri la retta



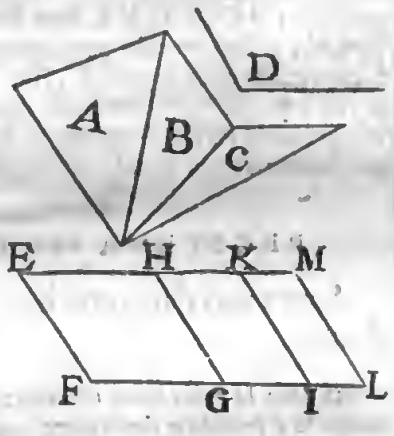
[e] 31. prop. IK [e] parallela alla retta DH, e dal punto H ſi tiri la retta HK [e] parallela alla retta DI, la quale concorrerà con la retta IK in qualche punto K; ſi [f] 2. poſt. prolunghi il lato EF [f] fin che concorra con HK in qualche punto L, e ſi prolunghi il lato GF, fin che concorra col lato IK in qualche punto M. Dico che il parallelogrammo FMKL è vguale al triangolo BCF, che hà vn angolo vguale all'angolo O, ed hà vn lato vguale alla data retta linea A.

Si conſideri il parallelogrammo DIKH diuiſo ne i quattro parallelogrammi DEFG, EIMF, FMKL, GFLK, de'quali i due IEFM, GFLH ſono inrorno al diametro IH, e per l'antecedente propoſitione, i complementi DEFG, FMKL ſono frà di loro vguali; ma il triangolo BCF per coſtruttione, è vguale al parallelogrammo DEFG, ſarà il parallelogrammo FMKL [f] vguale al triangolo BCF; e perche gli angoli al vertice LFM, GFE [b] ſono frà di loro vguali, e l'angolo O, per coſtruttione, è vguale all'angolo GFE, ſarà l'angolo MFL [i] vguale all'angolo O. Nel parallelogrammo GFLH, i lati oppoſti FL, GH, [k] ſono frà di loro vguali, ma la retta A, per coſtrutrione, è vguale alla retta GH, ſara la retta FL [l] vguale alla retta A. Per la qual coſa ſi è coſtrutto il parallelogrammo FMKL vguale al triangolo BCF, hà l'angolo MFL vguale al dato angolo O, ed il lato FL vguale alla retta data A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

f 1. aſſiom.
b 15. prop.
i 1. aſſiom.
k 34. prop.
l 1. aſſiom.

PROBLEMA XIII. PROPOSITONE XLV.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale à qualunque data figura rettilinea, ſecondo vn angolo dato.



Sia la figura rettilinea data ABC, l'angolo rettilineo D, e la data linea retta FE. Dico eſſer poſſibile coſtruire vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo ABC, che habbia vn angolo vguale all'angolo D, ed vn lato vguale alla retta FE.

Da vn angolo del rettilineo A B C [e] ſi tirino linee rette à gli angoli oppoſti in modo, che ſia diſtribuito il dato rettilineo ne i triangoli A, B, C, poi alla retta EF, per l'antecedente propoſitione, s'applichi il parallelogrammo EFGH, vguale al triangolo A, che habbia l'angolo F, vguale al dato angolo D; ſimilmẽte al lato HG s'applichi il parallelogrãmo HGIK vguale al triangolo B, che habbia l'angolo H G I vguale all'angolo D; ed al lato KI s'applichi il parallelogrammo KILM vguale al triangolo C, che habbia l'angolo KIL vguale all'angolo D. Dico che la figura FELM è vn ſolo parallelogrammo, vguale al rettilineo ABC, che hà vn angolo vguale all'angolo D.

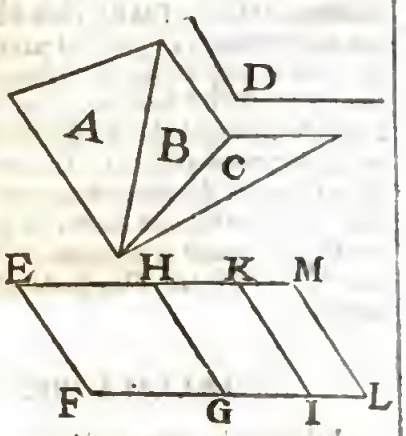
e 1. Poſtul.

Perche l'angolo F, per coſtruttione è vguale all'angolo D, e l'angolo H G I è fatto vguale all'angolo D, ſarà l'angolo F [b] vguale all'angolo HGI, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo HGF, ne viene l'angolo F coll'angolo HGI, [c] vguale alli due angoli HGF, HGI,

b 1. aſſiom.
c 2. aſſiom.

mà

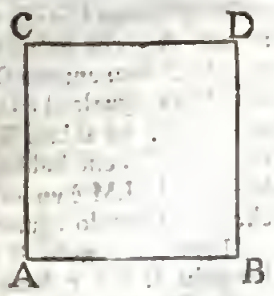
ma gli angoli F, & HGF [d] sono vguali à due angoli retti, gli angoli dunque HGF, HGI [e] sono vguali à due angoli retti, e per la 14. propositione, le rette G F, G I, costituiscono vna sola retta linea. Similmente perche l'angolo KIL è fatto vguale all'angolo D, sarà [e] anco vguale all'angolo HGI, vgualmente s'aggiunga l'angolo KIG, i due angoli H G I, KIG, [f] saranno vguali alli due angoli KIG, KIL; mà i due angoli HGI, KIG [g] sono vguali à due angoli retti; gli angoli dunque K I G, K I L saranno vguali à due angoli retti, e le rette GI, IL [b] costituiscono vna sola retta linea: dal che le tre rette F G, G I, I L, costituiscono la sola retta FL. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le tre rette E H, H K, K M, costituiscono la sola retta linea EM. Perche le rette E H, H K, K M sono parallele alle rette F G, G I, I L, stante che sono lati opposti de i parallelogrammi EG, HI, K L, perciò tutta la retta E M è parallela à tutta la retta FL. Di più, ne'i parallelogrammi E G, H I, K L i lati opposti EF, H G, K I, M L sono frà di loro paralleli; onde tutta la figura EFLM, [i] sarà vn solo parallelogrammo: mà il parallelogrammo E G è fatto vguale al triangolo A, il parallelogrammo H I vguale al triangolo B, ed il parallelogrammo KL vguale al triangolo C, sarà tutto il parallelogrammo EFLM [k] vguale al dato rettilineo ABC, & haurà l'angolo F, per costruttione, vguale all'angolo D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



d 29. prop.
e 1. assioma.
f 2. assioma.
g 29. prop.
b 14. prop.
i 35. defin.
k 2. assioma

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XLVI.

Sopra vna data retta linea terminata descriuere vn quadrato.



Sia data la retta linea terminata A B, sopra la quale è possibile descriuere vna figura quadrata.

Negli estremi A, & B [a] si erigano le rette A C, B D, perpendicolari alla retta A B, tanto A C [b] quanto D B si faccia vguale alla retta A B, si tiri [c] la retta C D. Dico che il quadrilatero ABDC è quadrato.

Perche gli angoli in A, & B sono retti, perciò le rette AC, BD [d] sono frà di loro parallele, mà per costruttione sono frà di loro vguali, perciò i lati A C, B D sono frà di loro vguali, e paralleli, e le rette CD, A B, che congiungo-

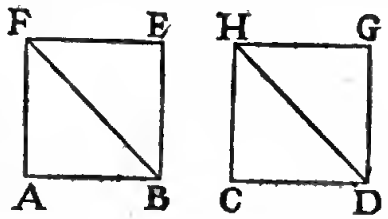
a 11. prop.
b 3. prop.
c 1. postulat.
d 28. prop.

no gli estremi, [e] sono vguali, e parallele, ed il quadrilatero ABDC è parallelogrammo; mà il lato AB [f] è vguale, per costruttione al lato BD, ed al lato AC, perciò li quattro lati AB, BD, DC, CA [g] sono frà di loro vguali, e perche nelli parallelogrammi gli angoli opposti [h] sono frà di loro vguali, essendo gli angoli A, & B per costruttione retti, saranno gli angoli C, & D retti; ed il quadrilatero ABDC [i] sarà quadrato, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

[e] 33. prop.
[f] 35. defin.
[g] 1. assiom.
[h] 34. prop.
[i] 29. defin.

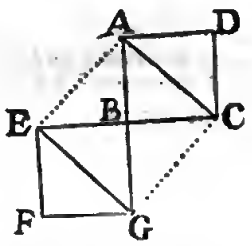
Di Proclo.

I quadrati delle rette linee vguali sono frà di loro vguali, ed i lati degli vguali quadrati sono frà di loro vguali.



Siano prima le rette AB, CD frà di loro vguali. Dico che li loro quadrati AE, CG sono frà di loro vguali. Si tirino li diametri FB, HD, per la definitione del quadrato sarà FA vguale ad AB, ed il lato HC vguale à CD, mà AB è posto vguale à CD, li due lati FA, AB [a] saranno vguali à i due lati HC, CD, li angoli in A & C sono retti, sarà la base FB [b] vguale alla base HD, ed il triangolo FAB, vguale al triangolo HCD, & i loro dupli, cioè li quadrati AE, CG [c] son frà di loro vguali ch'era da dimostrarsi.

[a] 2. assiom.
[b] 4. prop.
[c] 34. prop.



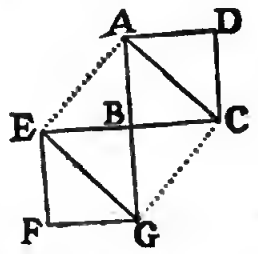
Di nuouo siano li quadrati ABCD, EBGF frà di loro vguali. Dico che i lati AB, BG sono fra di loro vguali. Si congiungano li proposti quadrati in modo che i lati EB, BC costituischino la sola retta EC, essendo gli angoli ABC, EBG vguali, se l'aggiunghi il commune angolo ABE, fa li due angoli GBE, EBA, [d] vguali alli due angoli CBA, ABE, ma li due angoli CBA, ABE [e] sono vguali à due angoli retti, saranno li due angoli GBE, EBA vguali à due angoli retti, e le rette GB, BA [f] costituiranno vna sola retta linea. Si tirino i diametri AC, EG, e si tirino le rette AE, CG, perche i quadrati BD, BF sono fra di loro vguali, le loro metà, cioè li triangoli ABC, EBG sono fra di loro vguali, se l'aggiunga il commune triangolo BGC, li triangoli AGC, EGC [g] saranno fra di loro vguali, hanno la medesima base GC, e sono costituiti dalla medesima parte, e perciò [h] sono fra le medesime parallele EA, GC; in oltre perche i lati BC, CA sono vguali à i lati DC, CA, e la base AB è vguale alla base AD sarà l'angolo DCA, [k] vguale all'angolo BCA, ma l'angolo DCB è retto sarà ognuno degli angoli DCA, BCA, la metà d'vn angolo retto; nell'istesso modo si dimostrerà che ognuno degli angoli DAC, BAC è la metà d'vn angolo retto, e perciò il diametro del quadrato diuide gli angoli opposti in due parti vguali, dalche il diametro EG del quadrato FB diuide gli angoli FEB, FGB in due parti vguali, ma gli angoli FGB, DAB sono fra di loro vguali, stante che

[d] 2. assiom.
[e] 13. prop.
[f] 14. prop.
[g] 2. assiom.
[h] 39. prop.
[k] 8. prop.

sono

ſono retti, perciò le loro metà, cioè gli angoli EGB, CAB ſono fra di loro vguali. Hor eſſendo le rette AC, EG ſegate dalla retta AG, e gli angoli alterni EGB, CAB ſono fra di loro vguali, ſarà EG [l] *parallela ad AC, ed il quadrilatero AEGC* [m] *ſarà parallelogrammo, dalche AC* [n] *ſarà vguale ad EG. Finalmente perche il diametro diuide gli angoli del quadrato in due parti vguali, perciò li diuide in due mezzi retti, e così ognuno delli angoli BGE, BEG, BCA, BAC, ſarà la metà d'vn angolo retto, e perciò li due angoli BGE, BEG ſono vguali alli due angoli BCA, BAC, il lato AC è dimoſtrato vguale al lato EG ſaranno li rimanenti due lati GB, BE vguali alli rimanenti due lati AB, BC, per la qual coſa il lato AB è vguale al lato BG, ch'era da dimoſtrarſi.*

l 27. prop.
m 35. defin.
n 34. prop.



THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLVII.

Nelli triangoli rettangoli, il quadrato del lato oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati de'i lati, che contengono l'angolo retto.

Sia il triangolo ABC, del quale l'angolo BAC ſia retto, e ſopra i lati BC, CA, AB, [a] ſiano deſcritti li quadrati BDEC, ACHI, BAGF. Dico ch'il quadrato BDEC, deſcritto ſopra il lato BC, ch'è oppoſto all'angolo retto, è vguale alli quadrati ACHI, BAGF, giunti inſieme, che ſono deſcritti ſopra i lati CA, AB, che contengono l'angolo retto BAC.

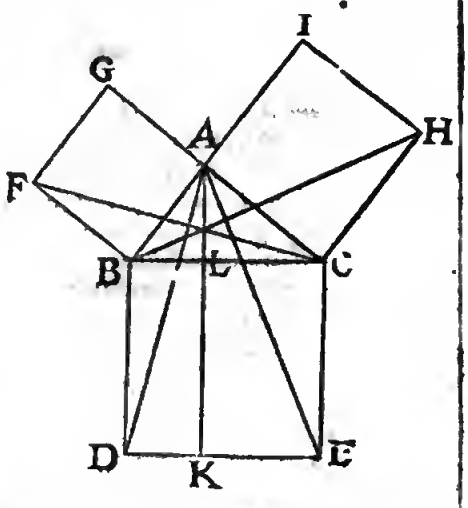
a 46. prop.

Dal punto A [b] ſi tiri la retta AK parallela al lato BD, ouero CE, la quale concorrerà col lato DE in qualche punto K, ſi tirino le rette [c] AD, AE, CF, BH.

b 31. prop.
c 1. poſt.

Perche l'angolo BAC, per ipoteſi, è retto, e l'angolo BAG (come angolo del quadrato) è retto, perciò i due angoli BAC, BAG, ſono vguali à due angoli retti, e le rette CA, AG [d] coſtituiſcono vna ſola retta linea; nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette BA, AI coſtituiſcono vna ſola retta linea: & eſſendo gli angoli in G, ed F retti, le due rette linee FB, GC [e] ſaranno frà di loro parallele, e nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che le due rette BI, HC ſono frà di loro parallele.

d 14. prop.
e 28. propoſ.



Di nuouo l'angolo F B A è retto, perche è angolo del quadrato G B, e ſimilmente l'angolo D B C è retto per eſſer angolo del quadrato B E; vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo ABC, ne viene l'angolo F B C, *f* vguale all'angolo A B D; e perche, nel quadrato BG, il lato F B *g* è vguale al lato BA, e nel quadrato D C il lato D B è vguale al lato B C; al lato B C s'aggiunga il lato BF, ed al lato DB s'aggiunga il lato BA, *i* due lati FB, BC, del triangolo FBC, *b* ſaranno vguali alli due lati AB, BD del triangolo ABD, l'angolo F B C è dimoſtrato vguale all'angolo A B D, ſarà la baſe F C *i* vguale alla baſe AD, ed il triangolo ABD, vguale al triangolo FBC.

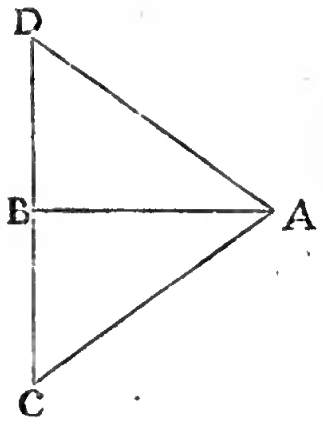
f 2. aſſioma.
g 29. defin.
b 2. aſſioma.
i 4 prop.

Si conſideri il parallelogrammo GB, ed il triangolo FBC, poſti ſopra la medeſima baſe FB, e frà le medeſime parallele GC, FB; il parallelogrammo GB *k* ſarà il doppio del triangolo FBC; ma il triangolo FBC è moſtrato vguale al triangolo ABD, ſarà il parallelogrammo GB *l* il doppio del triangolo ABD. Similmente il parallelogrammo LBDK, ed il triangolo ABD ſono ſopra la medeſima baſe BD, e frà le medeſime parallele AK, BD, il parallelogrammo LBDK *m* ſarà il doppio del triangolo ABD: ma il parallelogrammo GB, per quel che ſi è moſtrato, è il doppio del medeſimo triangolo ABD, ſarà il parallelogrammo GB, *n* vguale al parallelogrammo LBDK. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch' il parallelogrammo IC è vguale al parallelogrammo LKEC: perche eſſendo l'angolo HCA retto, e l'angolo ECB retto, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo BCA, ne verrà l'angolo HCB *o* vguale all'angolo ACE; e perche HC *p* è vguale ad AC, ed il lato EC vguale al lato CB, i due lati HC, CB, *q* ſaranno vguali alli due lati EC, CA, l'angolo HCB è moſtrato vguale all'angolo ACE, ſarà il triangolo HCB *r* vguale al triangolo ACE. In oltre il parallelogrammo IC, ed il triangolo HCB, hanno la medeſima baſe CH, e ſono frà le medeſime parallele, il parallelogrammo IC *ſ* ſarà il doppio del triangolo HCB: mà il triangolo HCB è vguale al triangolo ACE, il parallelogrammo IC ſarà il doppio del triangolo ACE. Di più il parallelogrammo LKEC, ed il triangolo ACE hanno la medeſima baſe CE, e ſono frà le medeſime parallele AK, CE, il parallelogramo LKEC ſarà il doppio del triangolo ACE: ma il parallelogrammo IC è moſtrato il doppio del medeſimo triangolo HCB, ſarà il parallelogrammo IC *t* vguale al parallelogrammo LKEC, e perche il quadrato GB fù moſtrato vguale al parallelogrammo LBKD, tutto il quadrato BDEC *u* ſarà vguale alli due quadrati IC, GB giunti inſieme, che era da dimoſtrarſi.

k 41. prop.
l 7. aſſiom.
m 41. prop.
n 6. aſſiom.
o 2. aſſiom.
p 29. defin.
q 2. aſſiom.
r 4. prop.
ſ 41. prop.
t 6. aſſiom.
u 2. aſſiom.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVIII.

Se il quadrato d'vn lato d'vn triangolo è vguale alli quadrati de i due rimanenti lati, l'angolo contenuto da quei lati ſarà retto.



Sia il triangolo ABC, ed il quadrato del lato AC sia vguale alli quadrati degl' altri due lati AB, BC. Dico che l'angolo ABC sarà retto.

a 11. prop. b 3. prop. c 1. postul.

Nel punto B sopra la retta AB [a] si erigga la perpendicolare DB, e si faccia DB [b] vguale alla retta BC, si tiri la retta [c] AD.

d 47. prop.

Perche l'angolo ABD, per costruttione è retto, il quadrato del lato AD [d] sarà vguale alli quadrati de i lati AB, BD. In oltre essendo DB, per costruttione, vguale alla retta CB, sarà il quadrato di BD vguale al quadrato di CB; vgualmente se gli aggiunga il quadrato della retta AB, i quadrati de' i due lati DB, BA [e] saranno vguali alli quadrati delli due lati CB, BA; ma i quadrati de' i due lati DB, BA si disse, che sono vguali al quadrato del lato AD, il quadrato dunque del lato AD [f] sarà vguale alli quadrati delli due lati CB, BA, ma li quadrati delli lati CB, BA, per iporesi, sono vguali al quadrato del lato AC, sarà il quadrato del lato AD [g] vguale al quadrato del lato AC, ed il lato AD vguale al lato AC. Finalmente perche i due lati DB, BA, sono vguali alli due lati CB, BA, e la base AD è mostrata vguale alla base AC, sarà l'angolo DBA [h] vguale all'angolo ABC, ma l'angolo DBA, per costruttione è retto, l'angolo dunque ABC sarà retto, come fù proposto dimostrare.

e 2. assioma. f 1. assioma. g 1. assioma. h 8. prop.

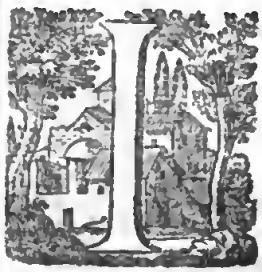
Fine del Primo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SECONDO.

DEFINITIONI.

I.

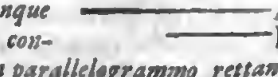
Ogni parallelogrammo rettangolo ſi dice eſſer contenuto da due rettelinee, che contengono l'angolo retto.



IL Parallelogrammo, che hà gli angoli retti, ſi chiama parallelogrammo rettangolo, e per l'auuenire ſi chiamerà ſemplicemente rettangolo. Hor, per ſpiegatione dell'antecedente definitione, deueſi auuertire, che ogni parallelogrammo rettangolo, benche ſia racchiuſo da quattro linee rette, con tutto ciò non ſi dice eſſere contenuto da tutte quattro, mà da due ſole, cioè da due di quelle, che contengono l'angolo retto, le quali, preſe in qualunque modo, ſempre ei rappreſentano la lunghezza, e larghezza di eſſo rettangolo, come, per eſſempio, il parallelogrammo ABCD, ſe hà tutti gli angoli retti, lo chiameremo ſemplicemente rettangolo, e diremo eſſer contenuto da'i due lati AB, BC; ouero dalli due BC, CD; o pure dalli due CD, DA; ò dalli due BA, AD eh'è ſempre la medeſima coſa, ſtante che, per la 34. propoſitione del primo libro, i lati oppoſti ſono frà di loro vguali.

Quando dunque diremo, ch'il rettangolo A B C D è contenuto dalli due lati AB, BC, non douremo concepir'altro, ſe non che il rettangolo ABCD, hà per lunghezza il lato BC, e per larghezza il lato AB; e ſe diremo eſſer contenuto dalle rette AD, DC, concepiremo eſſer contenuto dalla lunghezza AD, e dalla larghezza DC.

E da notarſi, che ſe ſaranno eſpoſte due qualunque linee rette, come A, & B, e ſi dirà il rettangolo contenuto dalle rette A, & B, ſi douerà concepire vn parallelogrammo rettangolo, del quale la lunghezza ſia vguale alla retta A, e la larghezza vguale alla retta B; ouero la larghezza vguale ad A, e la lunghezza vguale à B.



Di più quando qualche retta linea per essempio A C è diuisa come in B, e si dirà il

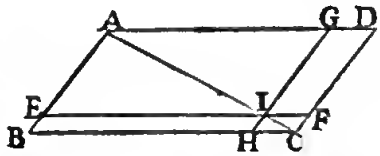
rettangolo contenuto dalle rette A B, B C, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de' lati, intorno all'angolo retto, è vguale ad AB, e l'altro vguale alla retta BC.

Quando poi si dirà, il rettangolo contenuto da tutta la retta AC, e dalla parte BC, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, del quale vno de'i lati intorno all'angolo retto è vguale à tutta la retta AC, e l'altro vguale alla parte BC.

Similmente se si dirà, il rettangolo contenuto dalle rette CA, AB, concepiremo vn parallelogrammo rettangolo, che habbia vno de' lati, intorno all'angolo retto, vguale à tutta la retta CA, e l'altro vguale alla parte AB.

II.

Se vn parallelogrammo è diuiso in quattro parallelogrammi, due de' quali siano intorno al diametro, i complementi con vno di quelli intorno al diametro si chiamerà Gnomone.

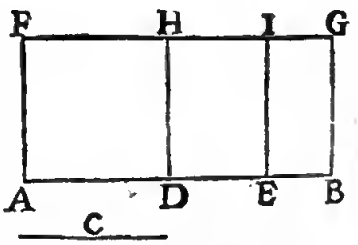


Sia il parallelogrammo A B C D, diuiso ne'i quattro parallelogrammi AEI G, IHCF, EBHI, GIFD, de' quali li due AEIG, IHCF siano intorno al diametro AC, i due complementi E B H I, IFDG, con vno di quelli intorno al diametro, come per essempio col parallelogrammo IHCF, cioè tutto il piano B C DGIE, si chiamerà Gnomone: e similmente, i due complementi BI, ID, col parallelogrammo EG, cioè tutto il piano BADFIH, si chiamerà Gnomone.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due rette linee vna è diuisa in quante parti si vuole, e l'altra non diuisa, i rettangoli contenuti dalle parti della diuisa, e dalla non diuisa, giunti insieme, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la diuisa, e dalla non diuisa.

Sia la retta linea AB diuisa in quante parti si vuole, come in D, ed E, e sia la retta C non diuisa. Dico, che i rettangoli contenuti da AD, e dalla retta C, da DE, e della retta C, e da EB, e dalla retta C, insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C.



a 11. del 1. Negl'estremi A, & B a si eriggano le rette AF, BG, perpendicolari alla

retta

retta AB, tanto AF, quanto BG, [b] ſi faccia vguale alla retta C, ſi tiri la retta FG. Perche gli angoli in A, & B ſono retti, le due AF, BG, [c] ſaranno frà di loro parallele; ma [d] ſono fra di loro vguali (per eſſerſi fatta ognuna vguale alla retta C) perciò ſono frà di loro vguali, e parallele; e la retta FG [e] ſarà vguale, è parallela ad AB, il quadrilatero ABGF ſarà parallelogrammo, e gli angoli F, & G [f] ſaranno retti, e perciò ſarà rettangolo. Dalli punti D, E ſi tirino le rette DH, EI [g] parallele al lato FA, ouero GB, gli angoli in D, ed E [h] ſaranno retti, ed il rettangolo AG, ſarà diuiſo ne'trè rettangoli FD, HE, IB, de'quali gli oppoſti lati FA, HD, IE, GB, [K] ſono frà di loro vguali; ma, per coſtruttione, il lato FA è vguale alla retta C, ſarà la retta C [l] vguale ad ognuno de i lati HD, IE.

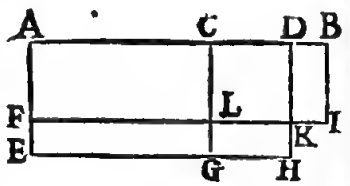
b 3. del 1.
c 28. del 1.
d 3. aſſioma.
e 33. del 1.
f 34. del 1.
g 31. del 1.
h 29. del 1.
K 34. del 1.
l 1. aſſioma.

Per la prima definitione di queſto, il rettangolo FB è contenuto da i due lati FA, AB; ma, per coſtruttione, la retta FA è vguale alla retta C, ſarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalla retta AB, e dalla retta C. Similmente il rettangolo FD è contenuto da FA, e dalla retta AD; ma FA è vguale alla retta C, ſarà il rettangolo FD, vguale al rettangolo contenuto dalla retta AD, e dalla retta C. Oltre à ciò, il rettangolo HE è contenuto dalla retta HD, e dalla retta DE; fù moſtrata la retta HD vguale alla retta C, ſarà il rettangolo HE vguale al rettangolo contenuto dalla retta DE, e dalla retta C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo IB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta EB, e dalla retta C. Per il che li tre rettangoli FD, HE, IB, ſono vguali à quelli contenuti dalle rette AD, DE, EB, e dalla retta C; ma i rettangoli FD, HE, IB compongono tutto il rettangolo FB; ſarà tutto il rettangolo FB, vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C. Si diſſe ch'il rettangolo FB è vguale à quello, ch'è contenuto dalla retta AB, e dalla retta C; il rettangolo dunque contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta C, è vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AD, DE, EB, e dalla retta C, ch'era da dimoſtrarſi.

SCOLIO.

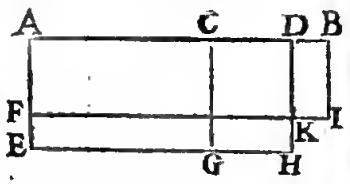
Qui ſi può aggiungere il ſeguente Theorema di Snellio nel ſuo Apollonio Batauo.

Se in qualche retta AB ſiano preſi due qualunque punti C, & D; il rettangolo contenuto dalle due AD, CB è vguale à i due rettangoli vno contenuto dalle due AB, CD, l'altro contenuto dalle due AC, DB, giunt'inſieme.



Nel

Nel punto A ſi erigga la retta A E [a] *perpendicolare ad A B; ſi faccia A E* [b] *vguale alla retta CB, e ſi tagli AF vguale à CD, ſarà FE* [c] *vguale à DB; da'i punti C, D, B ſi tirino le rette CG, DH, BI,* [d] *parallele ad AE, le quali* [e] *ſaranno frà di loro parallele; dalli punti F, ed E, ſi tirino le rette FI, EH* [f] *parallele ad AB, cioè FI ſi continui fin che concorre con BI in qualche punto I; e la retta EH fin che concorre con DH in qualche punto H; la retta FI ſegarà le rette CG, DH come in L, & K, e la retta EH ſegarà CG in qualche punto G. Tutti i quadrilateri, che ſono in queſta figura, ſaranno* [g] *parallelogrammi rettangoli, e ſarà AE* [h] *vguale à CG, e la retta CL vguale ad AF; mà AE è vguale, per coſtruttione, à CB, e la retta AF vguale à CD, ſarà CG* [k] *vguale à CB, ed LC vguale à DC; dal che il reſtante LG ſarà vguale à DB. Nel rettangolo CLKD, ſarà CL* [l] *vguale à DK, ed il lato CD vguale all LK; mà CL è vguale à CD, ſarà LK* [m] *vguale à KD, e tutti quattro i lati CL, LK, KD, DC ſono frà di loro vguali: hor eſſendo LK vguale à DK, ed il lato KH vguale à DB, ſarà il rettangolo GK* [n] *vguale al rettangolo KB; vgualmente s'aggiunga il rettangolo FD, ne viene il rettangolo FB* [o] *vguale al piano ADHGLF; vgualmente ſe gli aggiunga il rettangolo EL, ne viene il rettangolo ED* [p] *vguale al rettangolo FB, col rettangolo EL. Il rettangolo ED* [q] *è contenuto da'i due lati AD, AE, mà il lato AE è vguale, per coſtruttione à CB, perciò il rettangolo ED ſarà contenuto dalle due rette AD, CB, ed in conſeguenza i due rettangoli FB, EL ſono vguali à quello, ch'è contenuto dalle due AD, CB; e perche il rettangolo FB è contenuto dalle due BA, AF, cioè dalle due AB, CD, ed il rettangolo EL è contenuto dalle due FL, FE, cioè dalle due AC, DB, (ſtante che FL è vguale ad AC, ed il lato EF è vguale à DB) ſarà il rettangolo contenuto dalle due AD, CB, vguale à i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle due AB, CD, e l'altro dalle due AC, DB, ch'era da dimoſtrarſi.*

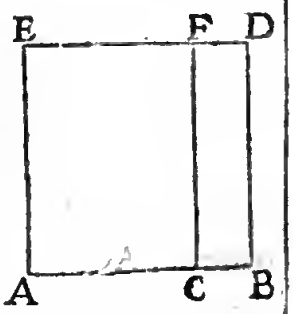


a 11 del 1.
b 3. del 1.
c 3. aſſiom.
d 31. del 1.
e 30. del 1.
f 31. del 1.
g 35. defin. del 1.
h 34. del 1.
k 1. aſſiom.
l 34. del 1.
m 1. aſſiom.
n Scolio antecedente
o 2. aſſiom.
p 2. aſſiom.
q 1. defin. del 2.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se vna retta linea è diuiſa come ſi vuole, il quadrato di tutta la retta è vguale alli rettangoli contenuti da tutta la retta, e dalle parti della medeſima.

Sia la retta linea AB, diuiſa in quante ſi voglia parti, come, per eſempio, nelle due AC, CB. Dico, che li due rettangoli, cioè vno contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto dalla medeſima retta AB, e dalla parte CB, giunt' inſieme, ſono vguali al quadrato di tutta la retta AB.



Sopra la retta AB [a] ſi deſcriua il quadrato AD, dal punto C ſi tiri la retta CF, [b] parallela ad AE, ouero DB; gli angoli in C, ed F [c] ſaranno retti, ed il quadrato AD ſarà diuiſo

a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 29. del 1.

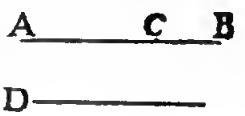
ne

ne i due rettangoli EC,FB. Perche il rettangolo EC [d] è contenuto dalle rette EA,AC,ed il lato EA,come lato del quadrato, è vguale ad AB, sarà il rettangolo EC vguale à quello, ch'è contenuto dalle due rette BA, AC. Similmente perche il rettangolo FB [e] è contenuto da i lati DB, BC, ed il lato DB è vguale al lato AB, sarà il rettangolo FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BC. Ma i due rettangoli EC, FB, giunti insieme, compongono il quadrato AD, cioè il quadrato della retta AB; saranno i due retrangoli, cioè il rettangolo contenuto da tutta la retta BA, e dalla parte AC, ed il rettangolo contenuto dalla medesima AB, e dalla parte BC, giunti insieme, vguali al quadrato di tutta la retta AB, ch'era da dimostrarsi.

d 1. definit. del 2.

e 1. definit.

In altro modo. S'esponga la retta D vguale alla retta AB. Perche la retta AB è diuisa nel punto C, e la retta D è indiuisa, sarà il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D [f], vguale à i due rettangoli, cioè vno conrenuto dalla retta D, e dalla parte AC; e l'altro contenuto dalla retta D, e dalla parte CB; ma la retta D è posta vguale ad AB, i due rettangoli dunque, cioè vno contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, l'altro contenuto da AB, e dalla parte BC, insieme giunti, saranno vguali al rettangolo contenuto dalle due AB, & D, cioè vguale al quadrato della retta AB. Il medesimo si dimostrerà, se la retta AB sarà diuisa in più di due parti, il che era da dimostrarsi.

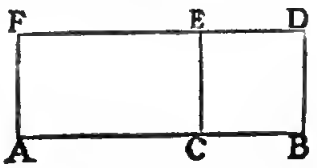


f 1. del 2.

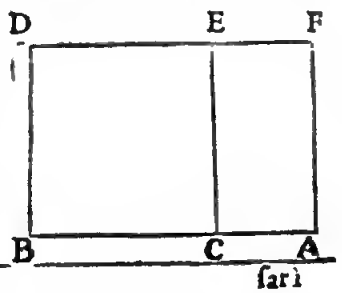
THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il rettangolo contenuto dalle parti, col quadrato di vna delle parti, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta, e da quella parte, sopra la quale si considera il quadrato.

Sia la retta AB, diuisa in due qualunque parti, come AC, CB. Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte BC, sopra la quale si considera il quadrato.



Sopra la retta CB, si descriua il quadrato BE, dal punto A si tiri la retta AF [b] parallela al lato CE, la quale concorrerà col lato DE continuato in qualche punto F, e saranno costrutti i due rettãgoli AD, AE. Perche il rettãgolo AD è contenuto da i lati AB, BD, ed il lato BD, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB,

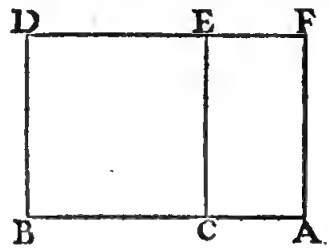


a 46. del 1.
b 31. del 1.

sarà

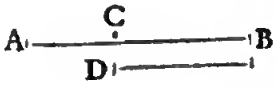
sarà il rettangolo AD vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Similmente il rettangolo AE, è contenuto dalle rette AC, CE; ma la retta EC, come lato del quadrato CD, è vguale alla retta CB, sarà il rettangolo AE, vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, vgualmente s'aggiunga il quadrato CD, cioè il quadrato della retta CB; ne viene il rettangolo AE, col quadrato CD, [c] cioè il rettangolo AD, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di CB. Ma si disse, che il rettangolo AD è contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB; il rettangolo dunque contenuto dalle parti AC, CB col quadrato della parte CB, è vguale al rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, sopra la quale fù descritto il quadrato, come fù proposto dimostrare.

c 2. assiom.



In altro modo. S'esponga la retta D, vguale alla parte CB; sarà [a] il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D vguale à i rettangoli contenuti dalle parti AC, CB, e dalla retta D; ma la retta D è posta vguale alla retta CB, sarà il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla retta D, cioè il rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte BC, vguale al rettangolo contenuto dalla parte AC, e dalla retta D, cioè dalle parti AC, CB, col rettangolo contenuto dalla parte CB, e dalla retta D, cioè col quadrato della retta CB, ch'era da dimostrarsi.

a 1. del 2.



THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

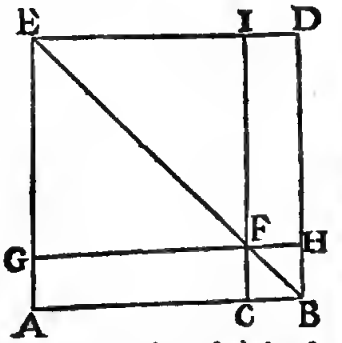
Se vna retta linea è diuisa in due qualunque parti, il quadrato di tutta è vguale à i quadrati delle parti, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti.

Sia la retta linea AB, diuisa in due parti come si vuole in C. Dico, che il quadrato di tutta la retta AB è vguale à i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime parti AC, CB.

Sopra la retta AB, [a] si descriua il quadrato AD, si tiri il diametro EB, dal pũto C si tiri la retta CI [b] parallela alla retta DB, ouero AE, la quale segarà il diametro EB in qualche punto F, e per il piano F si faccia passare la retta GH parallela al lato AB; sarà diuiso il

a 46. del 1.

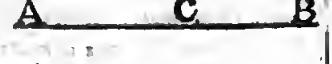
b 31. del 1.



qua-

quadrato AD in quattro parallelogrami, de'quali i due GI, CH, ſono intorno al diametro EB. Perche il quadrilatero AD, per coſtruttione, è quadrato, ſarà il lato AE vguale al lato AB, ed il triangolo ABE, ſarà iſoſcele, dal che gli angoli ABE, AEB [c] ſono frà di loro vguali; e perche li trè angoli d'ogni triangolo [d] ſono vguali à due angoli retti, e l'angolo A, come angolo del quadrato, è retto, gli altri due angoli AEB, ABE, inſieme giunti, ſaranno vguali ad vn angolo retto, ma gli habbiamo moſtrati frà di loro vguali, perciò ognuno delli angoli AEB, ABE ſarà la metà d'vn angolo retto. In oltre perche le rette GH, AB ſono parallele, e ſono ſegate dalla retta AE, l'angolo EGF [e] eſterno ſarà vguale all'angolo A interno ed oppoſto; ma l'angolo A è retto, ſarà l'angolo EGF retto. Nel triangolo GFE, eſſendo l'angolo EGF retto, e l'angolo GEF la metà d'vn angolo retto, ſarà il rimanente angolo GFE [f] la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli GEF, GFE [g] ſono frà di loro vguali, ed il lato GF [h] ſarà vguale al lato GE. Di nuouo perche in ogni parallelogrammo [K] i lati oppoſti ſono vguali, e gli angoli oppoſti ſono fra di loro vguali, ſarà nel parallelogrammo GI, il lato EG vguale all'oppoſto IF, ed il lato GF vguale all'oppoſto EI; ma s'è moſtrato il lato GF vguale al lato GE, ſarà il lato EI [l] vguale al lato IF, e tutti quattro i lati EG, GF, FI, IE, ſaranno fra di loro vguali. Oltre à ciò l'angolo EGF ſarà vguale all'angolo EIF, e l'angolo GEI, vguale all'angolo GFI; ma gli angoli FGE, GEI, ſono retti, gli angoli dunque EIF, IFG, ſaranno retti; per la qual coſa il parallelogrammo GI ſarà quadrato. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il parallelogrammo CH è quadrato. Di più nel parallelogrammo AF i lati oppoſti GF, AC [m] ſono fra di loro vguali; ma GI è il quadrato del lato GF, ſarà il quadrato GI vguale al quadrato di AC. Nel parallelogrammo AF, eſſendo gli angoli in A, & C retti, ſaranno gli angoli oppoſti in G, ed F [m] retti, dalche il parallelogrammo AF è rettangolo, il quale [n] è contenuto da i due lati AC, CF; ma il lato CF è vguale al lato CB, per eſſere lato del quadrato CH, ſarà il rettangolo AF, vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB: e perche i rettangoli AF, FD, ſono frà di loro vguali, i due rettangoli AF, FD ſaranno vguali al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB. S'aggiunga dall'vna, e l'altra parte il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene lo gnomone ABDIFG [o] vguale al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; à i quali s'aggiunga vgualmente il quadrato GI, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AD, [o] cioè il quadrato della retta AB, vguale à i quadrati delle parti AC, CB col doppio rettangolo contenuto dalle medeſime parti AC, CB, ch'era da dimoſtrarſi:

Più breue. Perche la retta AB è diuiſa in C, il quadrato di AB [p] è vguale al rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col rettangolo contenuto dalla medeſima AB, e dalla parte BC; ma il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC [q] è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB col quadrato di AC; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC è vguale al rettangolo con-



c 5. del 1.
d 32. del 1.
e 29. del 1.
f 32. del 1.
g 10. aſſiom.
h 6. del 1.
K 34. del 1.
l 2. aſſioma.
m 34. del 1.
n 1. defin. del 2.
o 2. aſſiom.
p 2. del 2.
q 3. del 2.

tenuto dalle parti AC, CB, col quadrato di CB; farà il quadrato di AB vguale à i quadrati delle parti AC, CB, & al doppio rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, ch'era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto è manifeſto, che quando vn quadrato è diuiſo in quattro parallelogrammi, de'quali due ſiano intorno al diametro, i due intorno al diametro ſono quadrati, ed i complementi ſono rettangoli.

COROLLARIO II.

Prima figura dell'antecedente propoſ.

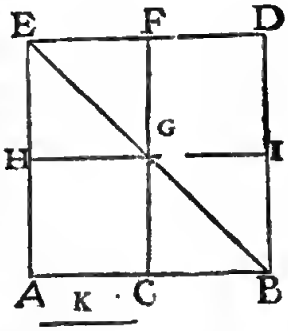
Quindi anco è manifeſto, ch'ogni diametro del quadrato diuide gli angoli del medeſimo quadrato in due parti vguali: poiche eſſendoſi dimoſtrato ognuno degli angoli ABE, AEB, eſſere la metà d'vn angolo retto, ſe dagli angoli retti ABD, AED, ſe ne detraggano gli angoli ABE, AEB, ognuno de' i rimanenti angoli DEB, DBE ſarà la metà d'vn angolo retto, e percio gli angoli retti AED, ABD, ſono diuiſi dal diametro EB in due parti vguali.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se la retta AB è il doppio della retta K, il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K; e ſe il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato di K, ancora la retta AB ſarà il doppio della retta K.

a 10.del 1.

Si diuida AB a in due parti vguali in C, e ſi faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione, ſaranno i due HF, CI, per il primo Corollario, quadrati; cioè CI ſarà il quadrato di CB, ed HF vguale al quadrato di AC: mà le rette CB, AC, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali; ſaranno i quadrati HF, CI frà di loro vguali. Similmente eſſendo AC vguale à CB, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, vguale al rettangolo contenuto dalle due GC, CB, cioè vguale al quadrato CI; mà il rettangolo AG è contenuto dalle due AC, CG: ſarà il rettangolo AG



b 43.del 1.

vguale al quadrato CI. E perche i complementi AG, GD, b ſono frà di loro vguali; i quattro rettangoli dunque AG, CI, GD, FH, ſono frà di loro vguali; e tutto il quadrato AD, ſarà il quadruplo del qua-

drato

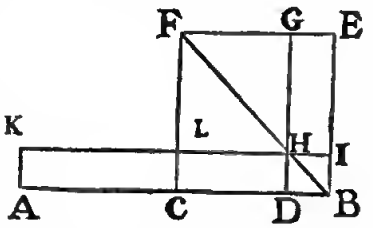
drato C I ; cioè il quadrato di A B, ſarà il quadruplo del quadrato di C B : ma la retta C B è vguale alla retta K , ſarà il quadrato di A B il quadruplo del quadrato della retta K, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo ſe il quadrato di AB è il quadruplo del quadrato della retta K. Dico che la retta AB, è il duplo della retta K.

Si diuida AB in due parti vguali, e ſi faccia la coſtruttione, e dimoſtratione di prima ; ſarà il quadrato di AB il quadruplo del quadrato di CB ; mà il quadrato di AB è ſuppoſto il quadruplo del quadrato di K, ſarà il quadrato di CB vguale al quadrato di K, e la retta CB vguale alla retta K : mà AB, per coſtruttione, è il doppio della retta CB ; ſarà AB il doppio della retta K ; come ſù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti vguali, e la medeſima è diuiſa in due parti ineguali ; il rettangolo contenuto dalle parti ineguali, col quadrato dell'intermedia portione, ſarà vguale al quadrato della metà della linea.



Sia la retta linea A B diuiſa in due parti vguali in C, e la medeſima retta AB ſia diuiſa in due parti ineguali in D, e ſia CD la portione intermedia frà l'vguale diuiſione, e la diuiſione ineguale. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato della intermedia portione CD, è vguale al quadrato della metà CB.

Sopra la retta C B [a] ſi deſcriua il quadrato C E, ſi tiri il diametro F B ; dal punto D ſi tiri la retta DG [b] parallela al lato EB, ouero FC, la quale ſegarà il diametro FB in qualche punto H ; per il punto H ſi faccia paſſare la retta IK [b] parallela alla retta AB, che ſegarà il lato FC in qualche punto L ; dal punto A ſi tiri la retta AK parallela ad FC, la quale concorrerà con la retta I L continuata in qualche punto K : ſarà diuiſo il quadrato C E in quattro parallelogrammi, de' quali i due LG, DI, 'intorno al diametro, per il primo Corollario alla quarta propoſitione, ſono quadrati, ed i complementi CH, HE ſono rettangoli : E perche i complementi CH, HE [c] ſono frà di loro vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro il quadrato D I, ne viene il rettangolo C I [d] vguale al rettangolo DE ; mà il rettangolo A L [e] è vguale al rettangolo CI (ſtante, che ſono ſopra le vguali baſe AC, CB, e frà le medeſime parallele KI, AB) ſarà il rettangolo AL [f] vguale al rettangolo DE ; vgualmente ſe gli aggiunga il rettangolo C H, ne viene il rettangolo A H [g] vguale allo gnomone CBEGHL : all'vno, ed all'altro s'aggiunga il quadrato LG, ſarà il quadrato CE, vguale al rettangolo AH col quadrato LG: il rettangolo AH [h] è contenuto dalle due AD, DH, cioè dalle due AD, DB, per eſſere DH

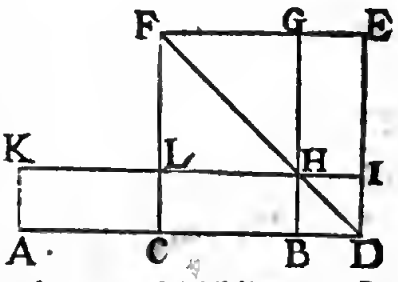
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 2. aſſiom
e 36 del 1.
f 1. aſſioma.
g 2. aſſioma
h 1. defin. del 2.

vguale al lato DB, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato LG, cioè [K] col quadrato di CD, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CB; e così il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato dell'intermedia portione CD, sarà vguale al quadrato di CB, ch'è metà della linea AC, come fù proposto dimostrare.

K 34. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, ed à quella s'aggiunga vna retta ad arbitrio; il rettangolo contenuto dalla composta, e dall'aggiunta, col quadrato della metà della linea, è vguale al quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.



Sia la retta AB diuisa in due parti vguali in C, allaquale s'aggiunga nella medesima dirittura qualunque retta BD. Dico che il rettangolo contenuto da tutta la composta AD, e dall'aggiunta DB, col quadrato di CB, ch'è metà della linea AB, è vguale al quadrato della retta CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.

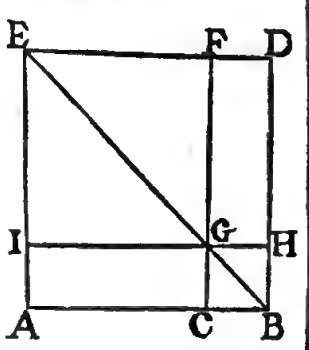
Sopra la retta CD, [a] si descriua il quadrato CE, si tiri il diametro FD, dal punto B [b] si tiri la retta BG parallela alla retta ED, ouero FC, segarà il diametro FD in qualche punto H; per il punto H si faccia passare la retta IK parallela alla retta AD, la quale segarà FC in qualche punto L; dal punto A, si tiri la retta AK, parallela al lato FC, la quale concorrerà con IK continuata in qualche punto K, e sarà diuiso il quadrato CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due LG, BI, che sono intorno al diametro FD, per il primo Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, ed i complementi CH, HE sono rettangoli: e perche i complementi CH, HE [c] sono frà di loro vguali, ed il rettangolo AL [d] è vguale al rettangolo CH (stante che sono sopra le vguali basi AC, CB, e frà le medesime parallele KH, AB) sarà il rettangolo AL vguale al rettangolo HE; s'aggiunga all'vno, ed all'altro il rettangolo CI, ne viene il rettangolo AI [e] vguale allo gnomone CDEGHL; vgualmente s'aggiunga il quadrato LG, sarà il quadrato CE vguale al rettangolo AI col quadrato LG. Il rettangolo AI [f] è contenuto dalle due rette AD, DI, cioè dalle due AD, DB (stante che DI è vguale à DB) sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DB, col quadrato LG, cioè [g] col quadrato di CB, vguale al quadrato CE, cioè al quadrato di CD. Per la qual cosa il rettangolo contenuto da tutta la composta AD, e dall'aggiunta DB, col quadrato di CB, ch'è metà della linea AB, è vguale al quadrato della retta CD, ch'è composta della metà CB, e dell'aggiunta BD, come fù proposto dimostrare.

a 46. del 1
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 36. del 1.
e 2. assiom.
f 1. definit. del 2.
g 34. del 1.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti come ſi vuole ; il quadrato di tutta, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta, e da quella parte, doue è fatto il quadrato, col quadrato dell'altra parte.



Sia la retta linea AB diuiſa in due parti, come ſi vuole in C. Dico che il quadrato di tutto la retta AB, col quadrato della parte AC, è vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte AC, col quadrato dell'altra parte CB.

Sopra la retta AB [a] ſi deſcriua il quadrato AD, ſi tiri il diametro EB; dal punto C, ſi tiri la retta CF [b] parallela alla retta DB, oueto AE, la quale ſegarà il diametro in qualche punto G; dal punto G, ſi faccia paſſare la retta HI parallela al lato AB; ſarà diuiſo il quadrato AD in quattro parallelogrammi, de'quali i due IF, CH, che ſono intorno al diametro EB, per il primo Corollario alla quarta propoſitione, ſono quadrati, ed i complementi AG, GD ſono rettangoli. E perche i complementi AG, GD [c] ſono frà di loro vguali, all'vno, ed all'altro s'aggiunga il quadrato IF, ne viene il rettangolo AF [d] vguale al rettangolo ID. In oltre il rettangolo AF [e] è contenuto da i lati AE, AC; ma il lato AE è vguale ad AB, per eſſere lato del quadrato AD, ſarà il rettangolo AF vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AC; e perciò i due rettangoli AF, ID, ſono vguali al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC; ma i due rettangoli AF, ID ſono vguali allo gnomone CAEDHG col quadrato IF; ſarà lo gnomone CAEDHG, col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC; vgualmente s'aggiũga il quadrato CH, cioè il quadrato di CB, ne viene tutto il quadrato AD [f] col quadrato IF, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, AC, col quadrato di CB: ma il quadrato IF è vguale al quadrato di AC (ſtante che [g] IG è vguale ad AC) ſarà il quadrato AD, cioè il quadrato di AB col quadrato di AC, vguale al doppio rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte AC, col quadrato del rimanente CB, ch'era da dimoſtrarſi.

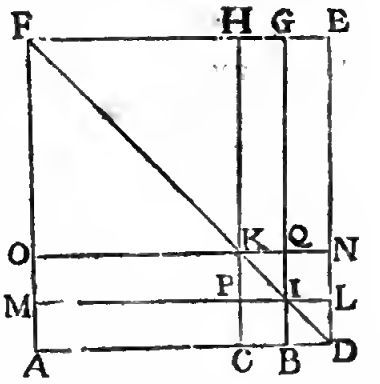
a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 43. del 1.
d 2. aſſiom.
e 1. definit. del 2.
f 2. aſſiom.
g 34. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti come ſi vuole, il quadruplo rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, col quadrato del reſtante, è vguale al quadrato della retta compoſta di tutta, e di quella parte.

Sia

Sia la retta linea AB diuisa come si vuole in C, alla quale s'aggiunga BD vguale alla parte CB. Dico che il quadruplo rettangolo contenuto da tutta la retta AB, e dalla parte CB, è vguale al quadrato della retta AD, composta di tutta AB, e dell'aggiunta BD.



* colquadrato di CA

Sopra la retta AD [a] si descriua il quadrato AE, si tiri il diametro FD; dalli punti C, & B, [b] si tirino le rette CH, BG parallele al lato DE, ouero AF, le quali segaranno il diametro ne i punti come in I, & K; per li punti I, & K si facciano passare le rette LM, NO, parallele al lato AD; sarà diuiso il quadrato AE in tanti parallelogrammi, de' quali quelli intorno al diametro FD, per il Corollario alla quarta propositione, sono quadrati, e così li notati OH, PQ, BL, MG, CN, sono quadrati; e perciò IB sarà vguale à BD, ouero BC. Similmente essendo CN quadrato, sarà ND vguale à CD, leuatone le vguali LD, BD, resta NL [c] vguale à CB; ma CB è vguale à BD, le quattro CB, BD, DL, NL [d] sono frà di loro vguali. E perche ne i parallelogrammi i lati opposti [e] sono frà di loro vguali, essendo DL vguale ad LN, sarà BI vguale ad IQ, e sarà CP vguale à PK. E similmente essendo CB vguale à BD, sarà PI vguale ad IL, & KQ vguale à QN. Di più perche i parallelogrammi CI, BL sono sopra le vguali basi CB, BD, e frà le medesime parallele PL, CD, perciò [f] sono frà di loro vguali, e per l'istessa ragione i parallelogrammi PQ, IN sono frà di loro vguali.

a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 3. assiom.
d 2. assiom.
e 34. del 1.
f 36. del 1.

Si consideri il quadrato C N diuiso in quattro rettangoli, de' quali i complimenti CI, IN, [g] sono frà di loro vguali: fù mostrato CI vguale à BL, ed il rettangolo IN vguale à PQ; i quattro rettangoli C I, B L, PQ, IN [h] sono frà di loro vguali.

g 43. del 1.
h 1. assiom.

Si considerino i rettangoli KG, QE, sopra le vguali basi KQ, QN, e frà le medesime parallele HE, KN, e perciò [k] frà di loro vguali. Similmente i rettangoli AP, MK sono sopra le vguali basi CP, PK, e frà le medesime parallele A O, C K, in conseguenza sono frà di loro vguali: e perche il quadrato MG è diuiso ne' i quattro parallelogrammi, de' quali i due O H, P Q sono intorno al diametro, saranno i complementi MK, K G [l] frà di loro vguali; mà il rettangolo KG fù mostrato vguale al rettangolo Q E, ed il rettangolo KM vguale al rettangolo PA; i quattro rettangoli AP, MK, KG, QE [m] sono frà di loro vguali. Al rettangolo AP s'aggiunga il rettangolo C I; al rettangolo M K s'aggiunga P Q; al rettangolo G N s'aggiunga QL; ed al rettangolo HQ s'aggiunga BL; ne verranno i quattro rettangoli AI, MQ, IE, & HQ con LB, [n] frà di loro vguali; dal che tutti quattro sono il quadruplo d'vno, cioè il quadruplo del rettangolo AI: mà tutti quattro compongono lo gnomone ADEHKO, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo AI. Il rettangolo AI è conte-

K 36. del 1.
l. 43. del 1.
m 1. assiom.
n 2. assiom.

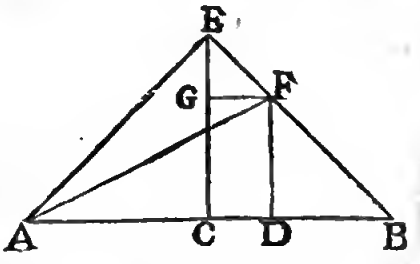
nuto

nuto da tutta AB, e da BI, cioè da BC, sarà il detto gnomone vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC: vgualmente se gli aggiunga il quadrato OH, cioè il quadrato di AC; ne viene tutto il quadrato AE, cioè il quadrato della composta AD, vguale al quadruplo rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla parte BC, col quadrato del restante AC, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e la medesima è diuisa in due parti ineguali; li quadrati delle parti ineguali sono il doppio del quadrato della metà, col quadrato dell'intermedia portione.

Sia la retta AB diuisa in due parti vguali in C, e la medesima AB sia diuisa in due parti ineguali nel punto D, e sia CD l'intermedia portione frà l'vguale, ed ineguale diuisione. Dico che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, sono il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato dell'intermedia portione CD.

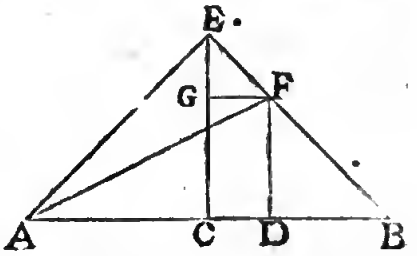


Nel punto C s'erigga la retta CE [a] ad angoli retti con AB, si faccia CE [b] vguale ad AC, ouero CB, e si tirino le rette AE, EB; nel punto D, s'erigga la retta DF [c] perpendicolare ad AB, la quale continuata concorrerà col lato EB in qualche punto F, dal quale si tiri la retta FG [d] parallela ad AB, segarà la retta EC in qualche punto G, si tiri la retta FA.

Perche la retta EC è fatta vguale ad AC sarà il triangolo AEC isoscele, e gli angoli CAE, CEA, [e] saranno frà di loro vguali; mà l'angolo in C è retto, ogn'vno de'i due angoli CAE, CEA [f] sarà la metà d'vn angolo retto. Considerando il triangolo CEB, nell'istesso modo si dimostrerà, ch'ogn'vno de'i due angoli CEB, CBE, è la metà d'vn angolo retto, dal che tutto l'angolo AEF sarà retto. Nel triangolo FDB, l'angolo in D, per costruttione è retto, l'angolo B è dimostrato essere la metà d'vn angolo retto, il rimanente angolo DFB [g] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli DFB, DBF [h] sono frà di loro vguali, ed il lato DB [K] è vguale al lato DF. Essendo GF, per costruttione parallela ad AB, l'angolo esterno EGF [l] è vguale all'angolo ECB interno, ed opposto; mà l'angolo in C è retto, sarà l'angolo EGF retto. Nel triangolo EGF, l'angolo G è retto, l'angolo GEF è la metà d'vn retto, il rimanente angolo EFG [m] sarà la metà d'vn angolo retto; e perciò gli angoli GEF, GFE sono frà di loro vguali; ed il lato GE [n] sarà vguale al lato GF.

a 11. del 1.
b 3. del 1.
c 11. del 1.
d 31. del 1.
e 5. del 1.
f 32. del 1.
g 32. del 1.
h 10. assiom.
K 6. del 1.
l 29. del 1.
m 32. del 1.
n 6. del 1.

o 47. del 1. Di nuouo nel triangolo ECA, angolo retto in C, il quadrato di EA o è vguale à i quadrati de'i due lati EC, CA, ma EC, per costruttione è vguale ad AC, sarà il quadrato di AE il doppio del quadrato di AC. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF o è vguale à i quadrati de'i due lati EG, GF; mà EG è dimostrato vguale à GF, sarà il quadrato di EF il doppio del quadrato di GF,



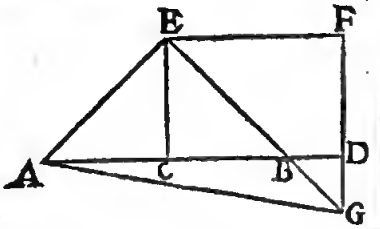
p 34. del 1. cioè p il doppio del quadrato di CD: e così li quadrati delle due AE, EF, sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD. Nel triangolo AEF, angolo retto in E, il quadrato di AF q è vguale à i quadrati de'i due lati AE, EF, mà i quadrati de' lati AE, EF sono il doppio de'i quadrati delle due AC, CD; sarà il quadrato di AF il doppio de' quadrati delle due AC, CD. Si consideri il triangolo ADF, angolo retto in D; il quadrato di AF è vguale à i quadrati de' due lati AD, DF, mà il quadrato di AF è il doppio de' quadrati delle due AC, CD; i quadrati de'i due lati AD, DF saranno il doppio de' quadrati delle due AC, CD; mà DF è dimostrato vguale al lato DB, saranno i quadrati delle parti ineguali AD, DB il doppio de' quadrati delle due AC, CD, ch'era da dimostrarsi.

q 47. del 1.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se vna retta linea è diuisa in due parti vguali, e nella medesima dirittura se le aggiunga vna retta ad arbitrio; il quadrato di tutta la composta, col quadrato dell'aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato della retta composta della metà, e dell'aggiunta.

Sia la retta linea AB diuisa in due parti vguali in C, alla quale sia aggiunta qualunque retta BD nella medesima dirittura. Dico che il quadrato di tutta la composta AD, col quadrato dell'aggiunta BD, è il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato di CD, composta della metà CB, e dell'aggiunta BD.



a 11. del 1. Nel punto C a si erigga la retta CE perpendicolare alla retta AD, si faccia EC b vguale ad AC, ouero CB, e si tirino le rette AE, EB; dal punto E c si tiri la retta EF parallela alla retta AB, e per il punto D si faccia passare la retta FDG parallela ad EC, la quale concorrerà con EF in qualche punto F, e con EB continuata in qualche punto G; si tiri la retta AG.

b 3. del 1.
c 31. del 1.

Perche

Perche il lato AC è vguale al lato CE, sarà il triangolo AEC isoscele, e gli angoli C A E, C E A, [d] saranno frà di loro vguali; mà l'angolo A C E, per costruttione è retto, ogn'vno de'i due angoli C A E, C E A [e] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo, considerando il triangolo E C B, si dimostrerà, ch'ogn'vno degl'angoli C E B, C B E, è la metà d'vn angolo retto; dal che tutto l'angolo A E B sarà retto. In oltre perche le rette E F, C D, sono parallele, segate dalla retta E C, i due angoli F E C, D C E, [f] interni, e dalla medesima parte, sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo D C E è retto, sarà l'angolo F E C retto. Nel parallelogrammo C F [g] gli angoli opposti, ed i lati opposti sono vguali; & essendo gli angoli F E C, D C E retti, saranno gli angoli opposti in F, & D retti; ed il lato C D sarà vguale al lato E F. Perche dunque l'angolo C E F è retto, leuatone l'angolo C E B, ch'è la metà d'vn angolo retto, l'angolo F E G, che resta, sarà la metà d'vn angolo retto. Nel triangolo F E G, l'angolo F è retto, l'angolo F E G è la metà d'vn retto, sarà il restante angolo F G E [h] la metà d'vn angolo retto; dal che i lati E F, F G, [K] sono frà di loro vguali. Similmente nel triangolo G D B, l'angolo D è retto, l'angolo D G B è la metà d'vn angolo retto; il rimanente angolo D B G [l] sarà la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli D B G, D G B sono frà di loro vguali, ed il lato D G [m] sarà vguale al lato D B.

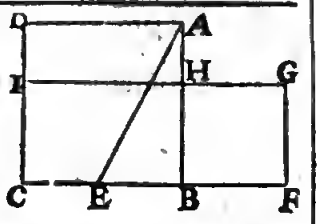
Di nuouo nel triangolo E C A, angolo retto in C, il quadrato di A E [n] è vguale à i quadrati de'i due lati A C, C E; mà E C è fatto vguale al lato C A, sarà il quadrato di A E il doppio del quadrato di A C. Similmente nel triangolo E F G, angolo retto in F, il quadrato di E G [n] è vguale à i quadrati de'i due lati E F, F G; mà E F è vguale ad F G, sarà il quadrato di E G il doppio del quadrato di E F, cioè il doppio del quadrato di C D; e così li quadrati de'i due lati A E, E G sono il doppio de i quadrati delle due rette A C, C D. Si consideri il triangolo A E G, angolo retto in E, il quadrato di A G [n] è vguale à i quadrati de'i due lati A E, E G; mà i quadrati de'i due A E, E G sono il doppio de i quadrati delle due A C, C D, sarà il quadrato di A G il doppio de'i quadrati delle due A C, C D. Nel triangolo A D G, angolo retto in D, il quadrato di A G è vguale à i quadrati de'i due lati A D, D G; mà il quadrato di A G è il doppio de' quadrati delle due A C, C D, i due quadrati de' lati A D, D G saranno il doppio de'i quadrati delle due A C, C D: fù dimostrata D G vguale à B D; sarà dunque il quadrato della composta A D, col quadrato dell'aggiunta D B, il doppio del quadrato della metà A C, col quadrato della retta C D, composta della metà C B, e dell'aggiunta B D, ch'era da dimostrarsi.

d 5. del 1.
e 32. del 1.
f 29. del 1.
g 34. del 1.
h 32. del 1.
K 6. del 1.
l 32. del 1.
m 6. del 1.
n 47. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITONE XI.

Data vna retta linea, diuiderla talmente, che il rettangolo contenuto da tutta, e da vna delle parti, sia vguale al quadrato dell'altra parte.

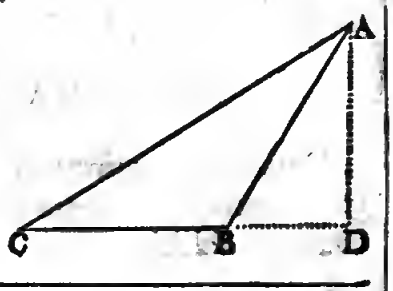
Sia la retta linea AB, la quale s'habbia à diuidere come s'è detto.



a 46. del 1. Sopra la retta AB [a] si descriua il quadrato
b 10. del 1. DB, si diuida il lato CB [b] in due parti vguali in E, e si tiri la retta EA; poi si prolunghi
c 3. del 1. CB verso F, e si faccia EF [c] vguale alla retta
d 46. del 1. EA; sopra la retta BF [d] si descriua il quadrato BG, il di cui lato GH segarà il lato AB in qualche punto H. Dico ch'il rettangolo contenuto da tutta BA, e dalla parte AH, e vguale al quadrato di HB. Si prolunghi GH fino ad I. Perche la retta CB, per costruttione è diuisa in due parti vguali in E, e gli è aggiunta la parte BF, sarà il rettangolo contenuto dalla composta
e 6. del 2. CF, e dall'aggiunta BF, col quadrato della metà, EB, [e] vguale al quadrato di EF: la retta EF è fatta vguale ad EA, sarà il rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB, vguale al quadrato di AE.
f 47. del 1. Nel triangolo ABE, angolo retto in B, il quadrato di AE [f] è vguale à i quadrati de'i due lati AB, BE; mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, col quadrato di EB; i quadrati dunque delle due AB, BE, [g] sono vguali al rettangolo contenuto dalle due
g 1. assiom. CF, FB, col quadrato di EB: vgualmente se ne leui il quadrato di EB,
h 3. assiom. resta il quadrato di AB, [h] cioè il quadrato DB, vguale al rettangolo contenuto dalle due CF, FB, cioè vguale al rettangolo CG, (stante, che BF è vguale ad FG) vgualmente se ne leui il commune rettangolo IB; resta il rettangolo DH vguale al quadrato HF. E perche
K 1. definit. del 2. il rettangolo DH [K] è contenuto dal lato DA, e da AH, ed il lato AD è vguale ad AB, sarà il rettangolo contenuto da BA, & AH vguale al quadrato BG, cioè vguale al quadrato di BH, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Ne i triangoli ambligonij il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è tanto maggiore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo ottuso, e dalla continuatione di quello, interposta frà l'angolo ottuso, e la perpendicolare, che cade dall'angolo opposto al lato continuato.



a 12. del 1. Sia il triangolo ambligonio ABC, angolo ottuso in B, e dall'angolo A [a] cada la retta AD perpendicolare al lato CB, continuato fino in D. Dico ch'il quadrato del lato AC opposto all'angolo ottuso ABC, è tanto maggiore de'i quadrati de'i lati AB, BC, che contengono l'angolo ottuso, per quanto è il doppio rettangolo conte-

nuto

nuto dal lato CB, e dalla continuatione BD.

La retta C D è diuiſa in B ; ſarà il quadrato di C D [b] vguale à i quadrati delle due CB, BD, col doppio rettangolo contenuto dalle medeſime due CB, BD : vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD ; i quadrati de'i due lati CD, DA [c] ſaranno vguali à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD : mà, per eſſere l'angolo D retto, il quadrato di A C [d] è vguale à i quadrati de'i due lati CD, DA ; ſarà il quadrato di CA vguale à i quadrati delle tre CB, BD, DA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. E perche il quadrato di A B [d] è vguale à i quadrati delle due A D, D B ; ſarà il quadrato di AC vguale à i quadrati de'i due lati CB, BA, col doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD. Hor ſe à i quadrati de'i due lati CB, BA, biſogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, accioche ſiano vguali al quadrato di AC, il quadrato dunque del lato A C è tanto maggiore de'i quadrati de'i due lati CB, B A, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due CB, BD, ch'era da dimoſtrarſi.

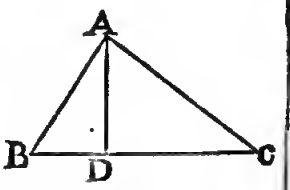
b 4. del 2.

c 2. aſſiom.

d 47. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

In qualunque triangolo rettilineo, il quadrato del lato oppoſto all'angolo acuto, è tanto minore de'i quadrati de' lati, che contengono l'angolo acuto, per quanto è il doppio rettangolo contenuto da vno de' lati intorno all'angolo acuto, e la parte del medeſimo lato interpoſta frà l'angolo acuto, e la perpendicolare.



Sia qualunque triangolo rettilineo A B C, angolo acuto in C, e cada dall'angolo A [a] la retta A D perpendicolare al lato B C. Dico che il quadrato del lato A B, oppoſto all'angolo acuto C, è tanto minore de'i quadrati de'i lati BC, CA, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dal lato BC, e dalla parte DC, interpoſta frà l'angolo acuto C, e la perpendicolare AD.

a 12. del 1.

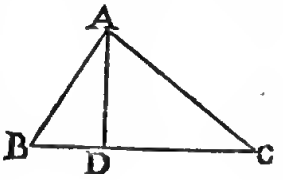
Perche la retta BC è diuiſa in D, [b] il quadrato di tutta BC, col quadrato della parte D C, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, col quadrato del reſtante BD : dall'vna, e l'altra parte di queſta vgualità, s'aggiunga il quadrto di A D ; ne vengono i quadrati delle tre BC, CD, D A, [c] vguali al doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, con i quadrati delle due BD, DA : e perche nel triangolo A D B, angolo retto in D, i quadrati de'i due lati BD, D A, [d] ſono vguali al quadrato di AB, ſarà il quadrato di AB, col doppio rettangolo contenuto dalle due BC, CD, vguale à i quadrati delle tre B C, C D, DA : mà nel triangolo rettangolo A D C, i quadrati de'i due lati A D, DC ſono vguali al quadrato di AC ; ſarà il quadrato di AB, col doppio

b 7. del 2.

c 2. aſſiom.

d 47. del 1.

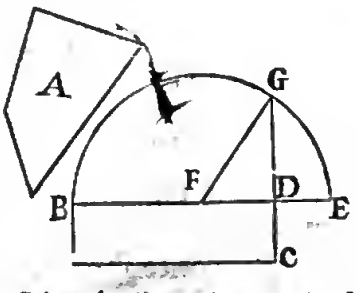
rettangolo contenuto dalle due B C, C D, vguale à i quadrati de'i due lati B C, C A. Hor ſe al quadrato del lato A B biſogna aggiungere il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, C D, accioche ſia vguale à i quadrati de'i due lati BC, CA; ſarà il quadrato del lato A B tanto minore de'i quadrati de' lati B C, C A, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due B C, CD, come fù propoſto dimoſtrare.



PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Coſtruire vn quadrato vguale ad vn dato rettilineo.

Habbiaſi à deſcriuere vn quadrato vguale al dato rettilineo A. Si faccia il
a 45. del 1. parallelogrammo rettangolo B C [a] vguale al dato rettilineo A; ſi continui
b 3. del 1. il lato BD verſo E, e ſi faccia DE [b] vguale al lato DC; ſi diuida la retta BE
c 10. del 1. [c] in due parti vguali in F; fatto centro in F, coll'intercruallo FB, ouero F E, ſi deſcriua il mezzo circolo BGE, ſi continui il lato C D ſino, che concorra con la circonferenza in qualche punto G. Dico che il quadrato, che ſi deſcriue ſopra alla retta DG, è vguale al rettilineo dato A. Dal centro F al punto G ſi tiri la retta FG. Nel triangolo FGD, angolo retto in D,
d 47. del 1. il quadrato del lato FG [d] è vguale à i quadrati de'i due lati FD, DG.
e 5. del 2. In oltre perche la retta BE è diuiſa in due parti vguali in F, e la medeſima è diuiſa in due parti ineguali in D, [e] il rettangolo contenuto dalle due BD, DE, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di EF, cioè vguale al quadrato di FG; mà il quadrato di FG è dimoſtrato vguale à i quadrari de'i due lati FD, DG, ſarà il rettangolo contenuto dalle rette BD, DE, col quadraro di FD, vguale à i quadrati de'i due lari F D, D G: ſe ne leui vgualmente il quadrato del lato FD, reſta il rertangolo contenu-
f 3. aſſioma to dalle due BD, DE, [f] cioè il rettangolo BC, vguale al quadrato della retta D G; mà il rettangolo B C è fatto vguale al rettilineo A, ſarà il
g 1. aſſiom. quadraro deſcritto ſopra la retta GD [g] vguale al dato rettilineo A, ch' era da farſi, e dimoſtrarſi.



Fine del Secondo Elemento.

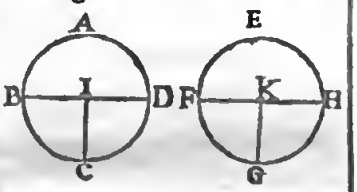
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO TERZO.

DEFINITIONI.

I.

Quei circoli ſono vguali, i di cui diametri, ò ſemidiametri ſono frà di loro vguali.

IO E' ſe il diametro BD, è vguale al diametro FH, ouero il ſemidiametro IC è vguale al ſemidiametro KG, il circolo ABCD, è vguale al circolo EFGH; perche generandoſi i circoli ABCD, EFGH, dalle reuolutioni de' loro ſemidiametri IC, KG, intorno à gli eſtremi I, & K,

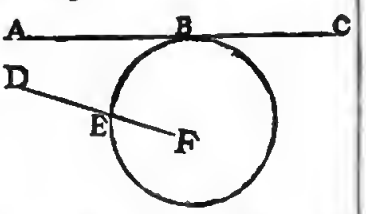


poſti immobili, ſe li ſemidiametri IC, KG ſono frà di loro vguali, paſſeranno ne i loro fluſſi ſpatij vguali; e così i circoli deſcritti ſaranno frà di loro vguali. Ed all' incontro quando i circoli ſono vguali i loro diametri, ò ſemidiametri ſonò frà di loro vguali.

II.

La retta linea ſi dice toccare il circolo, quando concorrendo col circolo continuata non lo ſega.

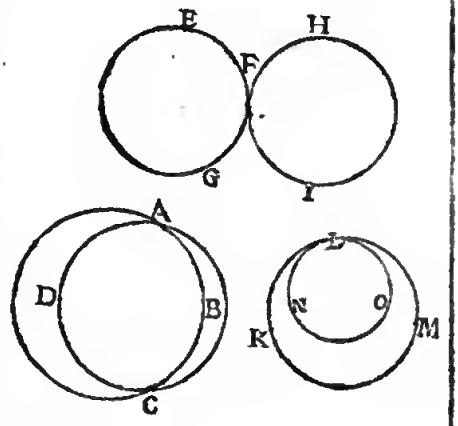
Nel circolo BE concorra la retta DE, e continuata paſſi dentro del circolo, come fà la parte EF, in tal caſo la retta DF non ſi dice toccare il circolo. Quando poi concorrendo qualche retta col circolo; come fà la retta AB, e continuata paſſi fuori di eſſo circolo, come appariſce per la retta AC, all' hora la retta AC ſi dirà toccare il circolo BE, ed il punto B, ſarà il punto del contatto.



III.

I Circoli si dicono toccarsi frà di loro, quando concorrendo insieme non si segano.

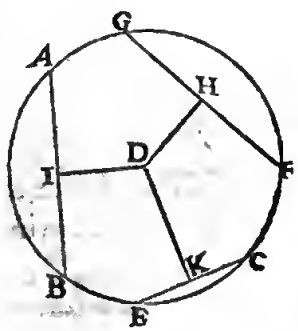
Per essempio i circoli ABC, ADC de' quali parte dell' vno cade dentro dell' altro, si dicono segarsi, ed i circoli EFG, HFI, li quali concorrono insieme nel punto F, e l'vno non sega l'altro, ma l'vno cade totalmente fuori dell' altro, si dicono toccarsi di fuori; ed i circoli KLM, NLO, le di cui circonferenze concorrono insieme nel punto L, e non si segano scambieuolmente, si dicono toccarsi di dentro.



IV.

Le rette linee nel circolo si dicono essere vgualmente distanti dal centro, quando le rette, che dal centro cadono ad angoli retti à quelle, sono frà di loro vguali; e quella si dice essere più lontana dal centro, sopra la quale cade la perpendicolare maggiore.

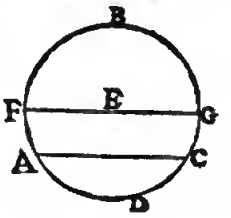
Nel circolo ABCF, siano tirate le rette AB, EC, GF, e dal centro D, s'intendano tirate le rette DH, DI, DK ad angoli retti con le rette AB, EC, GF; se la perpendicolare DH è vguale alla perpendicolare DI, le rette GF, AB si diranno essere vgualmente distanti dal centro D: e se la perpendicolare DK è maggiore della perpendicolare DI, la retta EC si dirà essere più distante dal centro D, che la retta AB, cioè se ID è minore di DK, la retta AB si dirà essere più vicina al centro D, che la retta EC.



V.

Portione del circolo è la figura contenuta dalla retta linea, e da vna parte della circonferenza di esso circolo.

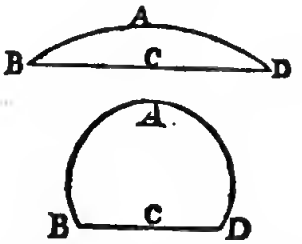
S'intenda il circolo ABCD, il di cui centro E, ed il diametro FG, e ſia ſegato il circolo A B C D dalla retta AC; la figura contenuta dalla retta A C, e dalla circonferenza ABC, ſi chiama portione del circolo; che ſe il centro E cade in eſſa, in tal caſo la portione ABC è maggiore del ſemicircolo FBG, e perciò ſi dice portione maggiore: e ſe il centro E cade fuori come nella notata A DC, la quale per eſſere minore del ſemicircolo FDG, ſi chiama portione minore: la linea ABC, ouero ADC, ſi chiama arco; e la retta AC ſi dice corda dell'arco ABC, ed anco dell'arco ADC.



V I.

Angolo della portione è quello, ch'è contenuto dalla corda, e dall'arco.

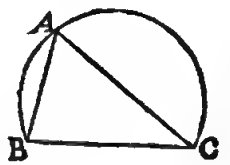
L'angolo contenuto dall'arco A B; e dalla corda BCD, cioè l'angolo ABC, ouero ADC, ſi chiama angolo della portione.



V I I.

Angolo nella portione è quello, ch'è contenuto da due rette tirate dagl'eſtremi della corda ad vn punto preſo nella circonferenza; e ſi chiama ancora angolo nella circonferenza.

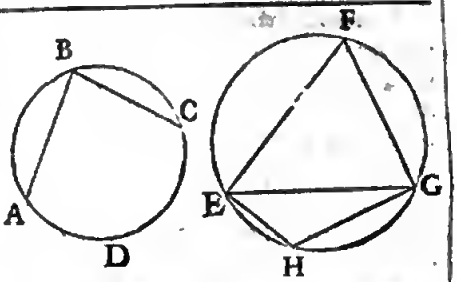
Nella portione BAC dagli eſtremi B, & C, della corda BC, ſiano tirate due rette, come BA, CA, à qualche punto A; preſo nella circonferenza BAC; l'angolo BAC, contenuto dalle rette BA, AC, ſi chiama angolo nella portione; cioè ſi dice eſſere nella portione BAC, e ſi chiama ancora angolo nella circonferenza, ouero alla circonferenza.



V I I I.

L'angolo alla circonferenza ſi dice inſiſtere all'arco, che gli è oppoſto.

Nel circolo ABCD, da qualche punto A siano tirate alla circonferenza le rette AB, CB, talmente che l'angolo A B C sia opposto à qualche arco ADC, in tal caso l'angolo A B C si dirà insistere all'arco ADC, che gli è opposto. E nota, che l'angolo alla circonferenza può essere angolo nella portione, ed ancora angolo insistente; come nella figura EFGH, l'angolo EFG, rispetto all'arco EFG, si dice essere nella portione EFG; e rispetto all'arco EHG, che gli è opposto, si dice insistente: e nell'istesso modo l'angolo EHG si dice essere nella portione EHG, e si dice insistere all'arco EFG, che gli è opposto.

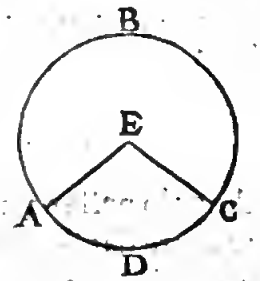


I X.

La figura contenuta da due semidiametri, che contengono qualche angolo nel centro del circolo, e dall'arco opposto à quell'angolo, si chiama settore del circolo.

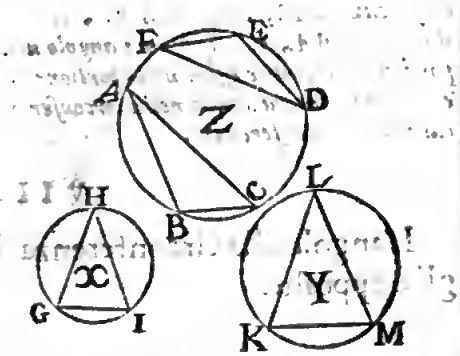
Dal centro E, del circolo A B C D, s'intendano tirati alla circonferenza i due semidiametri AE, CE, i quali contenghino nel centro qualche angolo AEC, la figura AECD, contenuta dalle rette AE, EC, e dall'arco A D C, si chiama settore del circolo.

X.



Simili portioni di circoli sono quelle, delle quali gli angoli alla circonferenza sono vguali, cioè, che gli angoli in quelle portioni sono vguali frà di loro.

Nel circolo Z, se gli angoli F E D, A B C, sono frà di loro vguali, le portioni F E D, A B C, nelle quali sono posti i detti angoli, si dicono essere frà di loro simili. Parimente ne i circoli ineguali X, Y, se gli angoli G H I, K L M sono frà di loro vguali, le portioni G H I, K L M si dicono essere frà di loro simili.



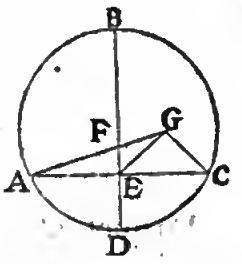
PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Dato vn circolo, ritrouargl'il centro.

Sia il dato circolo ABCD, al quale ſi voglia ritrouare il centro.

Si tiri qualunque retta AC, che ſeghi il circolo ABC; ſi diuida la retta A C [a] in due parti vguali in E, e ſopra la retta A C, [b] nel punto E, ſi erigga la perpendicolare E B, la quale continuata concorrerà con la circonferenza come in B, & D; ſi diuida la retta BD [c] in due parti vguali in F. Dico ch'il punto F è il centro del dato circolo ABCD.

a 10. del 1.
b 11. del 1.
c 10. prop.



Se il punto F non è il centro del circolo A B C D, perche BF è vguale ad FD, neceſſariamente ſarà qualche altro pũto fuori della retta BD, e ſia quello, per eſempio, il punto G; ſi tirino le rette G A, G E, G C. Perche il punto G è centro del circolo ABCD, le rette GA, GC [d] ſono frà di loro vguali: ſi conſiderino i due triangoli GEC G E A, de' quali il lato EC, per coſtruttione, è vguale al lato AE, il lato EG è commune, perciò i due lati G E, E C ſono vguali à i due lati GE, E A, la baſe G C è dimoſtrata vguale alla baſe G A, ſarà l'angolo G E C vguale all'angolo G E A; dal che l'angolo G E A [e] ſarà retto: mà per coſtruttione l'angolo BEA è retto; l'angolo dunque B E A ſarà vguale all'angolo GEA, la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque il punto G è centro del circolo ABCD, mà ſarà il punto F, ch'era da dimoſtrarſi.

d 15. defin. del 1.
e 10. defin. del 1.

COROLLARIO.

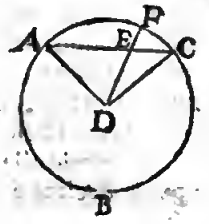
Da quel che s'è detto, è manifeſto, che ſe vna retta linea ſega vn altra retta tirata nel circolo in due parti vguali, & ad angoli retti, quella paſſa per il centro del circolo.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nella circonferenza del circolo ſono preſi due qualunque punti, la retta, che congiunge quei punti, cade dentro del circolo.

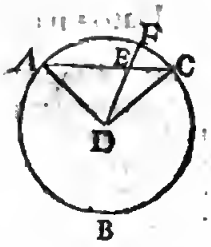
Nella circonferenza del circolo A B C F, ſiano preſi due qualunque punti A, & C, tirata la retta AC [a]. Dico che la retta A C cade dentro del circolo.

Si troui il centro del circolo, [b] che ſia D, e ſi tirino le rette DA, DC, [c] e preſo nella retta AC qualunque punto E, ſi tiri la retta DE, la quale ſi continui [d] indeterminatamente verſo F, la retta D E F,



a 1. poſtul.
b 1. del 3.
c 1. poſtul.
d 2. poſtul.

indeterminata verſo F, ſegarà la circoferéza del circolo in qualche punto F. Perche le rette DC, D A ſono tirate dal centro alla circonferenza, perciò e ſono frà di loro vguali, ed il triangolo D AC f è iſoſcele, dal che gli angoli DCA, D A C, g ſono frà di loro vguali. Nel triangolo DEC, il lato CE è continuato verſo A, ſarà l'angolo eſterno DEA h maggiore dell'angolo D C A interno, ed oppoſto; mà l'angolo DCA, è moſtrato vguale all'angolo DAC, ſarà l'angolo DEA maggiore dell'angolo D A E, ed il lato D E, k ſarà minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale ad FD, ſarà DE minore della retta DF, dal che il punto E cade dentro al circolo: e perche il punto E è preſo ad arbitrio nella retta AC, ogni punto dunque immaginato nella retta AC, cade dentro del circolo. Per la qual coſa la retta AC, che paſſa per quegl'infiniti punti, cade dentro del circolo, ch'era da dimoſtrarſi.



e 15. defin del 1.
f 25. defin. del 1.
g 5. del 1.
h 16. del 1.
k 19. del 1.

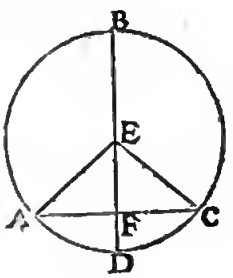
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che quando vna retta linea tocca vn circolo, quella tocca il circolo in vn ſol punto; perche ſe paſſaſſe per due qualunque punti preſi nella circonferenza, caderebbe dentro del circolo, ed all'hora lo ſegarebbe, e non lo toccarebbe.

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

La retta, che paſſa per il centro del circolo, e ſega vn altra retta tirata in eſſo circolo fuori del centro, ſe la ſega in due parti vguali, la ſegarà ad angoli retti; e, ſe la ſega ad angoli retti, la ſegarà in due parti vguali.

Sia il circolo ABCD, il di cui centro E, per il quale paſſi la retta BD, e ſeghi la retta A C, che non paſſa per il centro. Dico prima, che ſe la retta BD ſega la retta AC in due parti vguali, gli angoli BFC, B F A ſono retti. Dal centro E à i punti A, & C, a ſi tirino le rette EA, EC. Si conſiderino i due triangoli EFC, EFA: perche FC, per ipoteſi, è vguale ad FA, ed il lato FE è commune; i due lati EF, F C ſono vguali à i due lati EF, FA; la baſe EC, per la definitione del circolo, è vguale alla baſe EA, ſarà l'angolo EFC, b vguale all'angolo EFA, e per la decima definitione del primo libro, gli angoli EFC, EFA ſono retti.



a 46. poſt.
b 8. del 1.

Di nuouo, ſuppoſto che gli angoli in F ſiano retti. Dico che la retta AF è vguale alla retta FC. S'intenda fatta l'antecedente coſtruttione. Perche gli angoli EFC, EFA ſono retti, ſarà il quadrato del lato EC, [c] vguale à i quadrati de'i due lati EF, FC, ed il quadrato del lato EA, ſarà vguale à i quadrati de' due lati EF, FA; mà EC, per la definitione del circolo, è vguale ad EA; ſaranno i quadrati de' due lati EF, FC vguali à i quadrati de lati EF, FA; ſe ne leui il quadrato del commune lato EF, reſta il qnadrato del lato F C [d] vguale al quadrato del lato FA, ed il lato FC vguale al lato FA, come fù propoſto dimoſtrare.

c 47. del 1.

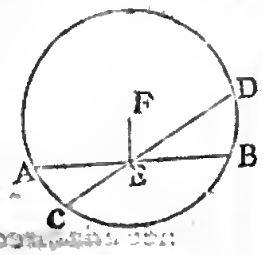
d 3. poſt.

THEOREMA III. PROPOSITIONE IV.

Se nel circolo due rette linee ſi ſegano fuori del centro, ambedue non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Nel circolo ACBD, il di cui centro F, ſi ſeghino due qualunque rette AB, CD, fuori del centro F, in qualche punto E. Dico che tutte due non ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Si ſeghino s'è poſſibile in due parti vguali nel punto E, dal centro F all'interſegatione E [a] ſi tiri la retta FE. Perche la retta FE paſſa per il centro F e ſega la retta A B fuori del centro in due parti vguali, gli angoli FEB, FEA [b] ſaranno retti. Similmente perche la retta F E paſſa per il centro F, e ſega la retta CD in due parti vguali, gli angoli FED, FEC ſaranno retti; dal che l'angolo F E D [c] ſarà vguale all'angolo FEB, la parte vguale al tutto, [d] ch'è impoſſibile; non dunque tutte due le rette A B, C D, ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi.



a 1. poſt.

b 3. del 1.

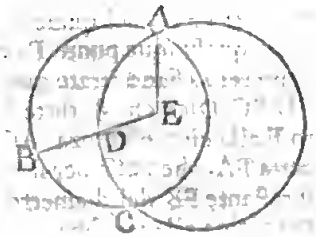
c 10. aſſiom.

d 9. aſſiom.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE V.

Se due circoli ſi ſegano ſcambieuolmente, non è poſſibile, ch' habbiano vn medeſimo centro.

Si ſeghino i circoli ABC, A D C, come in A, & C. Dico che i circoli ABC, ADC non hanno il medeſimo centro. Habbiano, s'è poſſibile, il medeſimo centro E, dal quale all' interſegatione A [a] ſi tiri la retta A E; e dal medeſimo punto E ſi tiri qualunque retta EB, che ſeghi le circonferenze de circoli fuori delle interſegationi A, & C, come in B & D. Perche il punto E è centro del circolo ADC, ſarà [b] la retta ED vguale alla retta EA. Similmente perche



a 1. poſt.

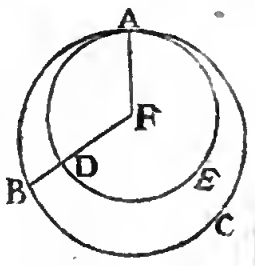
b 15. definit. del 2.

c 25.defin. del.1. il punto E è centro del circolo ABC, la retta EB, c sarà vguale alla retta EA: dal che le rette ED, EB sono frà di loro vguali; la parte vguale al

d 9. assiom. tutto, d ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si segano hanno vn medesimo centro, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VI.

Se due circoli si toccano di dentro, non è possibile, che habbiano il medesimo centro.



Si tocchino i circoli ABC, ADE, l'vno dentro l'altro in qualche punto A. Dico che non possono hauere il medesimo centro. Habbiano, s'è

a 1.post. possibile, il medesimo centro F; dal centro F al al contatto A a si tiri la retta FA, e dal medesimo centro F, si tiri qualunque altra retta FB, che seghi le circonferenze de' circoli fuori del contatto A, come in B & D. Perche il punto F è

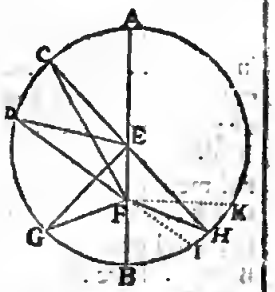
b 15.defin. del.1. centro del circolo ADE, sarà la retta DF b vguale alla retta FA. Similmente perche il punto F è centro del circolo A B C. La retta FB sarà vguale alla medesima retta FA; dal che le rette FD,

c 1.assiom. FB c sono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, d ch'è impossibile; non dunque i circoli, che si toccano di dentro hanno vn medesimo

d 9.assiom. centro, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VII.

Se nel diametro del circolo sia preso qualche punto fuori del centro, e da quello siano tirate quante si voglia rette linee alla circonferenza; quella, che passa per il centro, è la massima, il restante del diametro è la minima, e delle altre quella, ch'è più vicina alla massima, è sempre maggiore di quella, ch'è più lontana; e dal medesimo punto due sole rette linee vguali possono cadere nella circonferenza, vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte della massima, ò minima.



Nel circolo ACDB, il di cui centro E, ed il diametro AB, nel quale, fuori del centro E, sia preso qualunque punto F, e dal punto F alla circonferenza siano tirate quante si voglia rette FC, FD, FG. Dico che di tutte le rette tirate dal punto F alla circonferenza ACDB, la massima è la retta FA, che passa per il centro E; la minima è il restante FB del diametro; e che la retta FC, più vicina alla massima, è maggiore di FD più lontana; ed FD, è maggiore di FG; e che dal punto F due sole rette linee vguali possono cadere alla circonferenza,

cioè

cioè vna da vna parte, e l'altra dall'altra parte della minima FB, ò maſsima FA.

Dal centro E ſi tirino le rette EC, ED, EG. [a] Per la definitione del circolo la retta EA è vguale alla retta EC; vgualmente ſe gli aggiunga la parte EF, ſarà [b] FA vguale alle due FE, EC: ma nel triangolo FEC, i due lati FE, EC [c] ſono maggiori del terzo lato FC, ſarà FA maggiore di FC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che FA è maggiore di FD, come anco di FG, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual coſa la retta FA è la maſsima.

a 1. poſt.
b 2. aſſiom.
c 20. del 1.

Nel triangolo EFG, i due lati EF, FG ſono maggiori del [d] lato EG; ma il lato EG, per la definitione del circolo, è vguale ad EB, ſaranno i due lati EF, FG maggiori della retta EB; ſe ne leui la commune retta EF, reſta FB [e] minore di FG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la retta FB è minore di FD, come anco di FC, e di ogn'altra tirata dal punto F alla circonferenza ACDB. Per la qual coſa la retta FB ſarà la minima.

d 20. del 1.
e 3 aſſiom.

In oltre, perche la retta EC, per la definitione del circolo, è vguale ad ED, vgualmente ſe le aggiunga la retta EF: I due lati FE, EC [f] del triangolo F E C, ſono vguali à i due lati F E, ED, del triangolo FED; l'angolo FEC è maggiore dell'angolo FED, ſtante che, per coſtruttione, lo contiene, ſarà la baſe FC [g] maggiore della baſe FD. Nell'iſteſſo modo, conſiderando i triangoli EDF, EGF, ſi dimoſtrerà, che la retta FD è maggiore di FG. Per la qual coſa quelle, che ſono più vicine alla maſſima FA, ſono maggiori di quelle, che più ſono lontane.

f 9. aſſiom.
g 24. del 1.

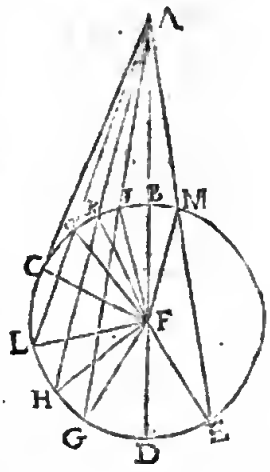
Finalmente nel punto E ſi faccia l'angolo BEH [h] vguale all'angolo B E G, e ſi tiri [K] la retta FH. Perche i due lati F E, E G del triangolo F E G, ſono vguali à i due lati F E, E H, del triangolo F E H; e l'angolo F E G, per coſtruttione, è vguale all'angolo F E H, ſarà la baſe FG [l] vguale alla baſe F H: dal che le due F G, F H, tirate dall'vna, e l'altra parte della minima, ò maſsima, ſono frà di loro vguali. Che poi dal punto F non ſe ne poſſano tirare più di due vguali dall'vna, e l'altra parte della minima, ò maſsima, è chiaro da quel, che s'è dimoſtrato: poiche ſe dal punto F ſia tirata qualche altra retta alla circonferenza, quella caderà ſotto, ò ſopra alla retta FH; ſe cade ſopra come fà la retta FK, per quel, che s'è dimoſtrato, ſarà FK, maggiore di FH, e ſe cade ſotto, come fà F I, ſarà F I minore di F H, che era da dimoſtrarſi.

h 23. del 1.
K 1. poſt.
l 4. del 1.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VIII.

Se da qualche punto preſo fuori del circolo ſono tirate rette linee, che ſeghino il circolo, delle quali vna paſſi per il centro: di tutte quelle, che cadono nel cauo della circonferenza, la maſſima è la retta, che paſſa per il centro; dell'altre la più vicina à quella, che paſſa per il centro è maggiore d'ogn'altra più lontana. Nella parte con-

uessa quella, ch'è diretta al centro, è la minima; dell'altre quella, ch'è più vicina alla minima è minore d'ogn'altra più lontana, e da quel punto due sole rette linee vguali cadono nel circolo dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima.



Da qualche punto A, preso fuori del circolo BCD, siano tirate le rette A D, A G, AH, AL, AC &c. che seghino il circolo BCD, e la retta AD passi per il centro F. Dico che la retta AD, che passa per il centro F, è la massima; dell'altre, AG, più vicina alla massima, è maggiore di AH più lontana; & AH è maggiore di AL; come anco AL maggiore di AC e nella parte conuessa, la retta AB, ch'è diretta al centro F, è la minima; la retta A I, più vicina alla minima, e minore di AK più lontana, & AK è minore di AO; e finalmente dall'vna, e l'altra parte della minima, ò massima, due sole rette vguali caderanno nel circolo.

a 1. post. Dal centro F [a] si tirino le rette FG, F H, F L, F C, F O, F K, FI. Perche la retta

b 15. defin. del 1. c 2. assiom. d 20. del 1. F D [b] è vguale ad F G, vgualmente s'aggiunga la retta F A; sarà la retta A D [c] vguale alle due A F, F G: ma nel triangolo A F G i due lati AF, FG, [d] sono maggiori del terzo lato AG; sarà la retta AD maggiore della retta AG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta A D è maggiore della retta AH, e d'ogn'altra AL, AC &c. Per la qual cosa la retta AD, che passa per il centro F è la massima.

e 15. defin. del. 1. Si considerino i due triangoli AFG, A F H, de'quali il lato F G [e] è vguale al lato F H; il lato A F è commune ad ambidue, perciò i due lati AF, FG, sono vguali à i due lati AF, FH; l'angolo AFG, è maggiore dell'angolo A F H, (stante che, per costruttione, lo contiene) sarà la base AG [f] maggiore della base AH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AH è maggiore di AL, & AL è maggiore di AC. Per la qual cosa quella, ch'è più vicina alla massima è maggiore d'ogn'altra più lontana.

f 24. del 1. Nella parte conuessa si consideri il triangolo FIA, del quale i due lati AI, IF [g] sono maggiori del terzo lato AF: se ne leuino gli vguali FB, FI, [h] resta A B minore di A I. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta AB è minore di AK, e d'ogn'altra AO, AC &c. per la qual cosa AB ch'è diretta al centro è la minima.

g 20. del 1. h 3. assiom. Si consideri il triangolo FKA. Perche dagl'estremi del lato F A sono tirate le rette FI, IA, concorrenti nel punto I, dentro di esso triangolo KFA; i due lati AK, KF [k] sono maggiori de'i due AI, IF; leuatone gli vguali FI, FK, resta AI [l] minore di AK. Nell'istesso modo si dimostrerà,

21. del 1. l 3. assiom.

che

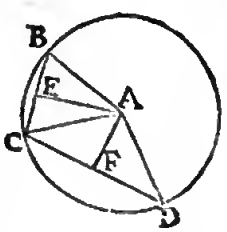
che A K è minore di A O, e la retta A O è minore di A C. Per la qual cosa la retta A I, più vicina alla minima, è minore d'ogn'altra più lontana.

Si faccia l'angolo AFE m vguale all'angolo AFG, e si tiri n la retta AE. Perche i due lati AF, FE sono vguali à i due lati AF, FG, e l'angolo AFE è vguale all'angolo AFG; la base AE o sarà vguale alla base AG; l'angolo AEF, sarà vguale all'angolo A G F, e l'angolo F A E vguale all'angolo FAG. Si tiri la retta F M; sarà l'angolo FME p vguale all'angolo F E M, cioè vguale all'angolo FGI: ma l'angolo FGI è vguale all'angolo FIG; sarà l'angolo FIG q vguale all'angolo FME, ed i supplementi à due retti, cioè gli angoli FMA, FIA r, sono frà di loro vguali; ma gli angoli FAM, FAI sono stati mostrati frà di loro vguali, i rimanenti angoli AFM, AFI, sono frà di loro vguali. Finalmente perche i lati A F, FM sono vguali à i due AF, FI, e l'angolo AFM è vguale all'angolo A F I, sarà la base A M f vguale alla base A I. Per la qual cosa le due AM, AI, dall'vna, e l'altra parte della minima, sono frà di loro vguali: come ancora le due A E, A G, dall'vna, e l'altra parte della massima per quel che si è dimostrato sono frà di loro vguali: ne possono essere più di due vguali, stante che nel concauo ogn'altra, che passa più vicina ad A D, è maggiore di A E, e se passa più lontana, è minore per quel che si è dimostrato; e nel conuesso, ogn'altra, che passa più vicina ad AB, è minore di A M; e se passa più lontana è maggiore, ch'era da dimostrarsi.

m 23. del 1.
n 1. post.
o 4. del 1.
p 5. del 1.
q 2. assiom.
r 13. del 1.
f 4. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE IX.

Se dentro d'vn circolo sia preso qualche punto, dal quale cadano alla circonferenza più di due rette linee vguali; quel punto preso sarà centro del circolo.

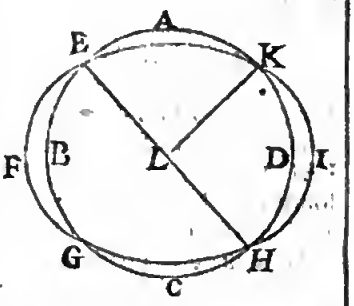


Dal punto A, preso dentro al circolo B C D, cadano alla circonferenza più di due rette vguali, come AB, AC, AD. Dico che il punto A è centro del circolo BCD. Si tirino le rette a BC, CD, e si diuidano b in due parti vguali in E, ed F; dal punto A à i punti E, F, si tirino le rette c AE, AF. Perche i lati A E, EB del triangolo AEB, sono vguali à i due AE, EC del triangolo AEC, e la base AB, per ipotesi è vguale alla base AC; gli angoli AEB, AEC d saranno frà di loro vguali, cioè e retti; e per il Corollario alla prima propos. di questo, la retta EA passa per il centro del circolo. Nell'istesso modo si dimostrerà che gli angoli ad F sono retti, e la retta FA passa per il centro del circolo. E perche le rette EA, FA si segano in vn sol punto, e per costruttione passano per il punto A, sarà il punto A il centro del circolo, ch'era da dimostrarsi.

a 1. post.
b 10. del 1.
c 1. post.
d 8. del 1.
e 10. defin. del 1.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE X.

Due circoli, che si segano, non si possono segare più che in due punti.

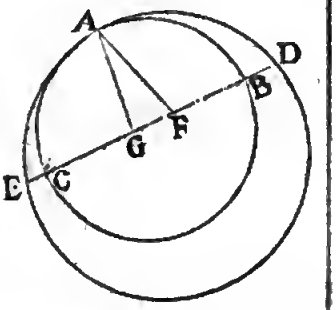


Si seghino i circoli ABCD, EFGHIK, in più di due punti, s'è possibile, come in E, K, H, si troui [a] il centro del circolo ABCD, che sia L, dal quale alle intersegationi E, K, H, [b] si tirino le rette LE, LK, LH, che, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali. In oltre perche dentro del circolo EFGHIK, è preso il punto L, dal quale cadono più di due rette linee vguali alla circonferenza EFGHIK, come sono le rette LE, LK, LH, per l'antecedente propos. il punto L sarà centro del circolo EFGHIK; mà il medesimo punto L è centro del circolo ABCD; sarà il punto L centro commune de'i due circoli ABCD, EFGHIK, che scambieuolmente si segano, il che è contro alla quinta propos. Non dunque i circoli si segano in più di due punti, ch'era da dimostrarsi.

[a] 1. del 3.
[b] 1. post.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XI.

Se due circoli l'vn dentro l'altro si toccano, la retta, che congiunge i loro centri, continuata passa per il punto del contatto.



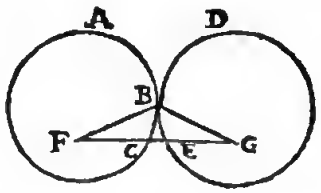
Siano i circoli EAD, CAB, l'vn dentro l'altro, i quali si tocchino in qualche punto A; e sia G il centro del circolo EAD, ed F il centro del circolo CAB; si tiri la retta GF. Dico che continuata la retta GF, quella passerà per il contatto A. Se non passa per il contatto A, segarà le circonferenze fuori del contatto A, come in E, C, B, D; dal contatto A à i centri G, F, [a] si tirino le rette AG, AF. Nel triangolo AGF i due lati AF, FG, [b] sono maggiori del terzo lato AG; mà la retta GA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta GD (stante che G è il centro del circolo EAD) i due lati GF, FA saranno maggiori della retta GD; se ne leui la commune GF, [c] resta FA maggiore di FD. In oltre perche il punto F è centro del circolo CAB, le rette FA, FB [d] sono frà di loro vguali; mà la retta FA è stata dimostrata maggiore di FD, sarà FB maggiore di FD; la parte maggiore

[a] 1. post.
[b] 20. del 1.
[c] 5. assiom.
[d] 15. defin. del 1.

giore del tutto, [e] ch'è impoſſibile; non dunque la retta, che paſſa per i centri ſega le circonferenze de' circoli fuori del contatto, mà paſſa per il contatto A, ch'era da dimoſtrarſi. [e] 9. aſſiom.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XII.

Se due circoli ſi toccano di fuori, la retta, che congiunge i loro centri, paſſa per il punto del contatto.



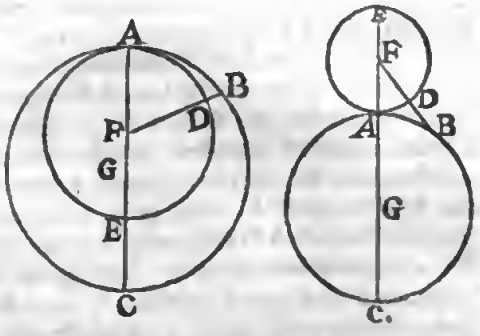
Si tocchino i circoli ABC, DBE nel loro conueſſo in qualche punto B, e ſia G il centro del circolo DBE, ed il punto F il centro del circolo ABC. Dico che tirata la retta FG, quella paſſarà per il contatto B.

Se non paſſa per il contatto B, ſeghi le circonferenze fuori del contatto, come in C ed E; dal contatto B à i centri F, & G [a] ſi tirino le rette BF, BG. Perche il punto F è centro del circolo ABC, le rette FC, FB [b] ſono frà di loro vguali. Similmente perche il punto G è centro del circolo DBE, le rette GE, GB ſono frà di loro vguali; dal che le rette FB, BG [c] ſono vguali alle due FC, GE: mà nel triangolo FBG i due lati FB, BG [d] ſono maggiori del terzo lato FG; le due rette dunque FC, GE ſono maggiori della retta FG, la parte maggiore del tutto, [e] ch'è impoſſibile. Non dunque la retta, che paſſa per i centri ſega le circonferenze fuori del contatto, mà paſſa per il contatto B, come fù propoſto dimoſtrare.

[a] 1. poſtul.
[b] 15. defin. del 1.
[c] 2. aſſiom.
[d] 20. del 1.
[e] 9. aſſioma.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIII.

I circoli, ò ſi tocchino di dentro, ouero di fuori, non ſi poſſono toccare più ch'in vn punto.



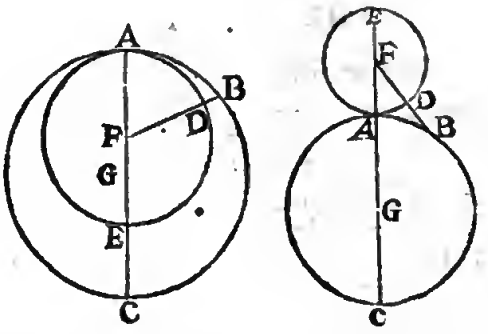
Si tocchino i circoli A B C, ADE, ò di dentro, ouero di fuori, in qualche punto A. Dico che non ſi toccano in altro punto, che nel punto A. Sia F il centro del circolo ADE, ed il punto G ſia il centro del circolo A B C; per i centri F, & G [a] ſi faccia paſſare la retta FG, la quale continuata, [b] per le due proſſime antecedenti propoſitioni, paſſarà per il contatto A. Nella circonferenza ABC ſi prenda qualunque punto B fuori del contatto A, dal quale al

[a] 1. poſtul.
[b] 2. poſtul.

centro F si tiri la retta B F, che segarà la circonferenza ADE in qualche punto D. Perche i circoli ABC, A D E si toccano, perciò c non hanno vn medesimo centro; mà il punto F è supposto centro del circolo ADE, non sarà dunque il punto F centro del circolo ABC; dal che nel circolo ABC la retta F C, che passa per il centro G d sarà la massima di tutte l'altre rette tirate dal punto F alla circonferenza ABC; e la retta F A sarà la minima: per la qual cosa la retta F B è maggiore di F A;

c 6. del 3.

d 7. & 8. del 3.



mà la retta FA, per la definitione del circolo, è vguale ad FD; sarà F D minore di FB; e perciò il punto B cade fuori del circolo A D E. E perche il punto B è preso ad arbitrio, ogni punto dunque preso nella circonferenza ABC, fuori del contatto A, caderà fuori del circolo ADE, per la qual cosa il circolo ADE non tocca il circolo in altro punto, che nel punto A, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIV.

Nel circolo, le vguali rette linee distano vgualmente dal centro, e quelle che sono vgualmente distanti dal centro sono frà di loro vguali.

Nel circolo ABCD, il dicui centro E, siano tirate l'vguali rette AB, CD. Dico prima, che l'vguali rette AB, CD, sono vgualmente distanti dal centro E. Dal centro E si tirino le rette EG, EF a ad angoli retti cõ le rette DC, AB, le quali diuideranno le rette AB, CD, b in due parti vguali in F, & G; dal che A F sarà vguale alla retta D G; si tirino c le rette E A, E D. Essendo gli angoli in F, & G retti, il quadrato del lato A E d sarà vguale à i quadrati de' due lati A F, F E; ed il quadrato di ED sarà vguale à i quadrati de'i due lati DG, GE: mà le rette EA, ED, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali; saranno i quadrati de'i due AF, FE, vguali à i quadrati de'i due lati DG, G E; se ne leuino i quadrati dell'vguali AF, DG, resta il quadrato di FE e vguale al quadrato di EG; e la perpendicolare EF, sarà vguale alla perpendicolare EG; e, per la quarta definitione di questo, le rette AB, C D, sono vgualmente distanti dal centro E, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

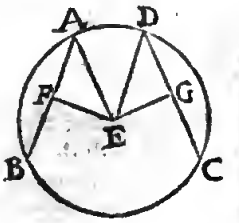
a 12. del 1.

b 3. del 3.

c 1. postul.

d 47. del 1.

e 3. assiom.

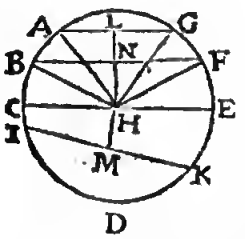


Di nuouo siano le rette A B, C D vgualmente distanti dal centro E, cioè sia E F vguale ad EG. Dico che AB è vguale alla retta D C. S'intenda

tenda fatta l'istessa costruttione, e si mostri, come prima, che i quadrati de'i due lati AF, FE sono vguali à i quadrati de'i due lati DG, GE; se ne leuino i quadrati dell'vguali FE, E G, resta il quadrato di FA [f] vguale quadrato di DG, e la retta FA, vguale alla retta D G; dalche il doppio di AF cioè AB, sarà vguale al doppio di DG cioè DC, ch'era da dimostrarsi. f 3. assioma.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XV.

Delle rette tirate nel circolo, la massima è il diametro; e delle altre, quella, ch'è vicina al centro, è maggiore d'ogn'altra più lontana.



Sia il circolo A B C D, il dicui centro H, & il diametro C E. Siano tirate in esso quante si voglia rette, come I K, & A G, cioè I K più vicina al centro, ed A G più lontana. Dico che il diametro C E è la massima, e che I K è maggiore di AG.

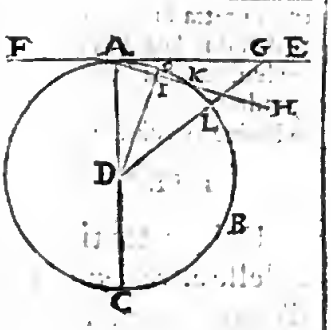
Dal centro H [a] si facciano cadere le rette HM, HL, perpendicolari alle rette I K, A G. Perche IK è più vicina al centro H, sarà MH [b] minore di HL. Si faccia HN [c] vguale ad HM, e per il punto N [d] si faccia passare BF ad angoli retti con HL. Perche le rette HM, H N sono frà di loro vguali, sarà IK [e] vguale alla retta B F. Dal centro H [f] si tirino le rette HF, HB, H G, H A. Per la definitione del circolo le rette HE, HC, cioè la retta EC, è vguale alle due HF, H B; mà nel triangolo HFB, i due lati HF, HB [g] sono maggiori del terzo lato BF, sarà la retta C E maggiore della retta B F; mà fù mostrata BF vguale ad IK, sarà il diametro C E maggiore della retta I K per la qual cosa la retta CE, che passa per il centro H è la massima. Si considerino i due triangoli BHF, AHG; perche i due lati BH, HF, per la definitione del circolo, sono vguali à i due lati AH, HG, e l'angolo BHF è maggiore dell'angolo A H G, stante che per costruttione lo contiene; sarà la base B F, [h] maggiore della base A G; mà la retta B F è vguale alla retta I K; sarà la retta IK maggiore di AG, ch'era da dimostrarsi.

a 12. del 1.
b 14. del 3.
c 3. del 1.
d 11. del 1.
e 14. del 3.
f 1. postul.
g 20. del 1.
h 24. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVI.

Se nell'estremità del diametro di qualunque circolo sia eleuata vna retta linea, che faccia col diametro angoli retti, quella cade fuori del circolo; e nel luogo, ch'è frà quella retta linea, e la circonferenza del circolo, non è possibile che vi cada alcuna retta linea.

Nel circolo ABC, il dicui centro D, ed il diametro AC, nell'estremo A sia posta la retta FAE ad angoli retti col diametro AC. Dico prima, che la retta FE cade fuori del circolo ABC.



Nella retta FE, ſi prenda fuori del punto A qualunque punto G; dal centro D al punto G [a] ſi tiri la retta DG. Nel triangolo DAG, i due angoli DAG, DGA [b] ſono minori di due angoli retti; mà l'angolo DAG è retto, ſarà l'angolo DGA minore dell'angolo DAG, ed il lato DA [c] ſarà minore del lato DG. E perche la retta DA, per la definitione del circolo, è vguale alla retta DL, ſarà DL minore di DG: dalche il punto G cade fuori del circolo A B C. Hor eſſendo il punto G preſo ad arbitrio, tutti i punti dunque immaginati in FE cadono fuori del circolo A B C; per la qual coſa la retta FE, che paſſa per quegl'infiniti punti, cade fuori del circolo A B C, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1. poſt.
b 17. del 1.
c 19. del 1.

Di nuouo dico, che nel luogo contenuto frà la retta EA, e l'arco L K A, non può cadere alcuna retta linea. Cada, s'è poſſibile, nel luogo contenuto dalla retta EA, e l'arco LOA, qualunque retta linea HA, la quale farà qualche angolo con la retta EA; e perche l'angolo EAD, per ipoteſi, è retto, ſarà l'angolo HAD minore del retto. Nel punto D ſi coſtituiſca l'angolo IDA [d] vguale all'angolo IAD: i due angoli IDA, IAD, ſono minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propoſitione, le rette AI, DI, concorrono in qualche punto I. In oltre, perche l'angolo IDA, per coſtruttione, è vguale all'angolo HAE; vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo IAD; i due angoli IDA, IAD [e] ſono vguali à tutto l'angolo EAD; mà l'angolo EAD, per ipoteſi è retto; i due angoli dunque IDA, IAD ſono vguali ad vn angolo retto; ed il reſtante angolo DIA [f] ſarà retto: dal che l'angolo DAI [g] è minore dell'angolo DIA, ed il lato ID [h] è minore del lato AD; mà il lato AD, per la definitione del circolo, è vguale alla retta DO, ſarà DI minore della retta DO; dalche il punto I cade dentro del circolo, e la retta AH, che paſſa per il punto I, paſſa dentro del circolo. Per la qual coſa la retta AH non cade nel luogo contenuto frà la retta EA, e l'arco KOA; come fù propoſto dimoſtrare.

d 23. del 1.
e 2. aſſiom.
f 32. del 1.
g 17. del 1.
h 19. del 1.

COROLLARIO.

Perche la retta FE, facendo angoli retti col diametro AC, cade fuori del circolo, per la ſeconda definitione di queſto, la retta FE tocca il circolo nel punto A.

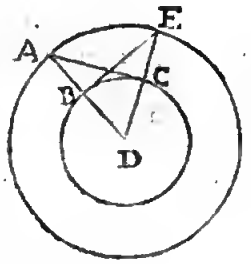
Se dunque per qualche punto A preſo nella circonferenza d'vn circolo A B C ſi voglia far paſſare vna retta, che tocchi il circolo, dal centro D al punto A [k] ſi tiri il ſemidiametro DA, e nell'eſtremo A ſi ponga la retta FAE, [l] che faccia angoli retti con AD; la retta FE toccarà il circolo nel punto A. Dalche ſarà manifeſto il modo di far paſſare vna retta, che tocchi il circolo in qualunque punto preſo nella circonferenza.

k 1. poſt.
l 11. del 1.

PROBLE-

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Da vn dato punto fuori d'vn circolo, tirare vna retta linea, che tocchi il dato circolo.



Sia il dato circolo BC, ed il punto fuori A, e si voglia dal punto A tirare vna retta, che tocchi il dato circolo BC. Si troui il centro del circolo BC, [a] che sia D, si tiri [b] la retta DA, e fatto centro in D, coll'interuallo D A, [c] si descriua il circolo AE; nel punto B, sopra la retta AD, [d] si erigga la perpendicolare B E, la quale continuata concorra con la circonferenza AE in qualche punto E; si tiri la retta DE, la quale segarà l'arco BC in qualche punto C, si tiri la retta AC. Dico che la retta AC tocca il circolo BC nel punto C.

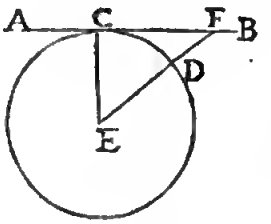
a 1. del 3.
b 1. post.
c 3. post.
d 11. del 1.

Per la definitione del circolo, la retta DA è vguale alla retta DE, e la retta DB è vguale alla retta D C; dalche i due lati A D, DC, del triangolo ADC, [e] sono vguali à i due lati ED, DB, del triangolo EDB, l'angolo D è cõmune, perciò la base AC [f] sarà vguale alla base EB, e l'angolo DCA vguale all'angolo DBE: ma l'angolo DBE è retto, sarà l'angolo DCA retto, e per l'antecedente Corollario, la retta AC tocca il circolo nel punto C, ch' era da farsi, e dimostrarsi.

e 2. assioma.
f 4. del 1.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna retta linea tocca vn circolo, e dal centro sia tirata vna retta al contatto, quella sarà perpendicolare alla tangente.

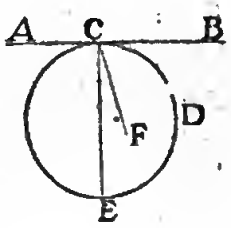


Tocchi la retta A B il circolo C D in qualche punto C, e dal centro E al contatto C sia tirata la retta E C. Dico che la retta E C, è perpendicolare alla tangente AB. Se la retta E C non è perpendicolare alla tangente AB, dal centro E [a] si faccia cadere la retta EF perpendicolare alla retta AB. Perche i due angoli ECF, EFC [b] sono minori di due angoli retti, e l'angolo EFC, per costruttione è retto, sarà l'angolo ECF minore dell'angolo retto EFC; dalche il lato EC [c] sarà maggiore di EF; ma per la definitione del circolo, la retta EC è vguale ad ED, sarà ED maggiore di EF, la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile. Non dunque la retta EF è perpendicolare ad AB; ma la retta EC sarà perpendicolare alla tangente AB, ch'era da dimostrarsi.

a 12. del 1.
b 17. del 1.
c 19. del 1.
d 9. assioma.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se vna retta linea tocca il circolo, e nel contatto si erige vna retta perpendicolare alla tangente, quella passa per il centro del circolo.

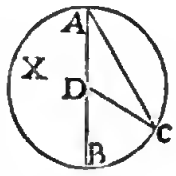


Tocchi la retta AB il circolo CDE in qualche punto C, e nel punto C si ponga la retta linea CE ad angoli retti con AB, e continuata concorra con la circonferenza in qualche punto E. Dico che il centro del circolo CDE è nella retta CE, se il centro del circolo non è nella retta CE, sarà necessariamente fuori della retta CE; sia dunque nel punto F, dal punto F al contatto C [a] si tiri la retta FC, sarà l'angolo FCB [b] retto, ma l'angolo ECB è supposto retto, l'angolo dunque FCB sarà vguale all'angolo ECB, la parte vguale al tutto [c] ch'è impossibile; non dunque il centro del circolo è fuori della retta EC, mà sarà nella retta EC, ch'era da dimostrarsi.

a 1. postul.
b 18. del 3.
c 9. assioma.

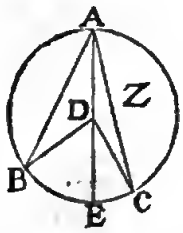
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Nel circolo, l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza, quando hanno vn medesimo arco per base.



Nel circolo ABC siano gli angoli BDC al centro e BAC alla circonferenza, ed habbiano il medesimo arco BC per base. Dico che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza. Cada nel primo luogo il centro D in vna delle rette che contiene l'angolo BAC alla circonferenza, come nella retta AB, della figura X. Perche le rette DA DC, per la definitione del circolo, sono frà di loro vguali, sarà l'angolo DAC [a] vguale all'angolo DCA. Nel triangolo DAC continuato il lato AD verso B, l'angolo BDC esterno [b] sarà vguale à i due angoli DAC, DCA interni, ed opposti; mà li due angoli DAC, DCA sono frà di loro vguali, sarà l'angolo B D C al centro il doppio di vno, cioè il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

a 5. del 1.
b 32. del 1.



Di nuouo cada il centro D, frà le due BA, AC, che contengono l'angolo alla circonferenza, come nella figura Z, si tiri [c] la retta AD, e si continui fino alla circonferenza in E. Haueremo l'angolo B D E al centro, e l'angolo BAE alla circonferenza, che hanno il medesimo arco BE per base, ed il centro D cade in vna delle rette, che contiene l'angolo alla circonferenza, per quel che s'è dimostrato, sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Per

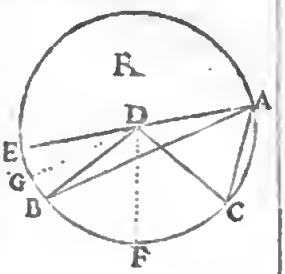
c 1. postul.

l'istessa ragione l'angolo EDC al centro è il doppio dell'angolo E A C alla circonferenza, dalche tutto l'angolo BDC al centro è il doppio di tutto l'angolo BAC alla circonferenza.

Finalmente sia l'angolo BDC al centro, e l'angolo BAC alla circonferenza, che habbiano il medesimo arco BC per base, e non cada il centro D in nissuna delle rette BA, AC, ne meno nello spatio interposto frà quelle, ma cada fuori come nella figura R. Dico similmente, che l'angolo BDC al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza.

Si tiri la retta AD, e si prolunghi [d] fino che concorre con la circonferenza in qualche punto E. Haueremo l'angolo EDC al centro, e l'angolo EAC alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EBC per base, ed il centro D cade nella retta ADE, per quel che si disse nella prima parte, sarà l'angolo EDC il doppio dell'angolo EAC. Similmente si consideri l'angolo EDB al centro, e l'angolo EAB alla circonferenza, che hanno il medesimo arco EB per base, ed il centro D cade nella retta A E, per la prima parte sarà l'angolo EDB al centro, il doppio dell'angolo EAB alla circonferenza. Si diuida l'angolo BDC in due parti vguali con la retta DF, e si diuida l'angolo EDB in due parti vguali con la retta DG; sarà l'angolo BDC il doppio dell'angolo BDF, e l'angolo EDB il doppio dell'angolo G D B; dalche tutto l'angolo E D C sarà il doppio dell'angolo GDF: ma l'angolo EDC è dimostrato il doppio dell'angolo E A C, sarà l'angolo GDF vguale all'angolo EAC. In oltre perche l'angolo EDB è il doppio dell'angolo GDB, ed il medesimo angolo EDB è dimostrato il doppio dell'angolo EAB, sarà l'angolo G D B vguale all'angolo E A B. Hor essendo l'angolo EAC, per quel che s'è dimostrato, vguale all'angolo GDF, e la parte EAB è vguale alla parte G D B, sarà il restante angolo BAC vguale al restante angolo BDF: ma l'angolo BDC è il doppio dell'angolo BDF, sarà il medesimo angolo BDC il doppio dell'angolo BAC, ch'era da dimostrarsi.

d 2. post.

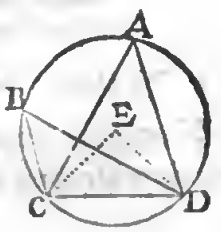


THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Gli angoli nella medesima portione del circolo sono frà di loro vguali.

Nel circolo ABCD, il di cui centro E, siano nella medesima portione C B A D, gli angoli CBD, CAD. Dico che sono frà di loro vguali. Supposto prima, che C B A D sia portione maggiore, si tirino [a] le rette E C, E D. L'angolo CED al centro, per l'antecedente propositione, sarà il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, e sarà ancora il doppio dell'angolo CBD,

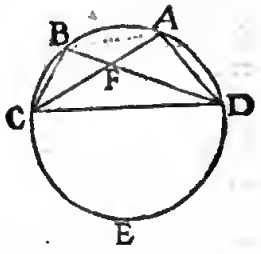
a 1. post.



alla

alla circonferenza, e perciò gli angoli C A D, C B D [b] nella medesima maggior portione sono frà di loro vguali, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

[b] 7. assiom.



Di nuouo sia la portione CBAD, ò mezzo circolo, ouero portione minore. Dico similmente che gli angoli CBD, CAD, nella medesima portione, sono frà di loro vguali. Si tiri la retta AB, sarà ADECB portione maggiore, e per quel che s'è dimostraro, gli angoli ADB, ACB, nella medesima portione maggiore ADECB, sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli FBC, FAD, de' quali l'angolo ADF è vguale all'angolo FCB, per quelche s'è dimostrarò; gli angoli AFD, BFC al vertice e sono frà di loro vguali, saranno i due angoli ADF, AFD, del triangolo A F D, vguali à i due angoli BCF, BFC, del triangolo BCF, dal che il restante angolo FAD [d] sarà vguale al rimanenre angolo FBC, cioè l'angolo CAD sarà vguale all'angolo CBD, ch'era da dimostrarsi.

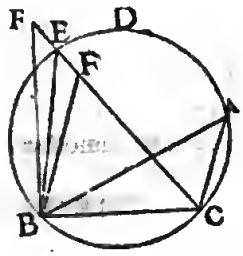
[c] 15. del 1.

[d] 32. del 1.

S C O L I O.

La conuersa di questa propositione si può fare facilmente nel seguente modo.

Di due angoli vguali sotteſi dalla medesima retta linea, e costituiti dalla medesima parte, vno sia nella portione d'vn circolo, l'altro sarà nella medesima portione.



Siano gli angoli vguali BAC, BFC sotteſi dalla medesima retta BC, e collocati dalla medesima parte FA, e sia l'angolo BAC nella portione del circolo BDC. Dico che l'angolo BFC sarà nella medesima portione BDC. Se nõ è nella circonferenza BDA, ò caderà dentro, ò fuori del circolo; se cade dentro, si continui CF [a] fino ad E, e si congiunga BE [b]. Gli angoli B E C, BAC, nella medesima portione, sono per l'antecedente propositione, frà di loro vguali: ma l'angolo BFC è posto vguale all'angolo BAC, sarà l'angolo BFC [c] vguale all'angolo B E C; l'esterno vguale all'angolo interno, ed oppoſto, ch'è contro alla decimaseſta propoſitione; non dunque l'angolo BFC cade dentro, ne fuori della circonferenza BDC, ma è nella portione BDC, ch'era da dimoſtrarſi.

[a] 2. poſt.

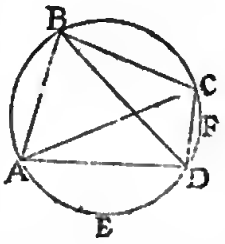
[b] 1. poſt.

[c] 1. assiom.

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Di qualunque quadrilatero descritto nel circolo, gli angoli oppoſti sono vguali à due angoli retti.

Nel circolo ABCD ſia deſcritto qualunque quadrilatero A B C D. Dico che gli angoli oppoſti ABC, ADC ſono vguali à due angoli retti; e che i due angoli oppoſti DCB, DAB ſono vguali à due angoli retti. Si tirino le diagonali [a] AC, BD. La retta AD diuide il circolo in due portioni ABCD, AED; gli angoli ABD, ACD, [b] ſono nella medeſima portione ABCD, perciò ſono frà di loro vguali. Similmente la retta DC ſega il circolo in due portioni, cioè DEABC, & DFC; gli angoli D A C, D B C ſono nella medeſima portione DEABC, e perciò ſono frà di loro vguali: all'angolo DCA s'aggiunga l'angolo DAC, ed all'angolo DBA s'aggiunga l'angolo DBC, ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli D A C, D C A inſieme giunti: all'vna, e l'altra parte di queſta vgualità s'aggiũga l'angolo ADC, i due angoli ABC, ADC, inſieme giũti, ſaranno vguali à i trè angoli del triangolo ADC: ma i trè angoli del triãgolo ADC [d] ſono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque ABC, ADC ſono vguali à due angoli retti. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i due angoli BAD, BCD ſono vguali à due angoli retti, come fù propoſto dimoſtrare.



a 1. poſtul.

b 22. del 3.

c 2. aſſiom.

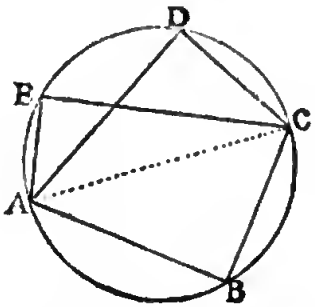
d 32. del 1.

SCOLIO I.

La conuerſa dell'antecedente propoſ. facilmente ſi dimoſtra nel ſeguente modo.

Se due angoli oppoſti d'vn quadrilatero ſono vguali à due angoli retti; la circonferenza di quel circolo, che paſſa per tre angoli di quel quadrilatero, paſſa ancora per il quarto angolo. Dal che intorno à quel quadrilatero ſi può deſcriuere vn circolo.

Sia il quadrilatero A B CD, del quale i due angoli oppoſti ADC, ABC, ſiano vguali à due angoli retti; e per li trè angoli A, B, C, paſſi la circonferenza del circolo A B C. Dico che paſſarà ancora per l'angolo D. Nel arco AEC ſi prenda qualunque punto E, e ſi tirino le rette E A, EC. Il quadrilatero AECB ſarà deſcritto nel circolo, e per l'antecedente propoſitione gli angoli A E C, A B C ſono vguali à due angoli retti: ma gli angoli ADC, ABC, per ipoteſi ſono vguali à due angoli retti, li due angoli dunque A E C, A B C [a] ſono vguali à i due angoli ADC, ABC; leuatone il commune angolo ABC, reſta l'angolo ADC [b]



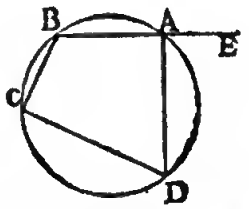
a 10. aſſiom.

b 3. aſſiom.

vguale all'angolo A E C: ſi tiri la retta AC. Perche gli angoli AEC, ADC ſono fra di loro vguali, e ſono ſotteſi dalla medeſima retta AC, e l'angolo AEC è nella portione AEC, per lo Scolio alla propoſitione vigeſima prima, ſarà l'angolo ADC nella medeſima portione AEC, per la qual coſa l'arco AEC paſſa per il punto D, ch'era da dimoſtrarſi.

SCOLIO II. DEL CLAVIO.

L'angolo eſterno d'vn quadrilatero deſcritto nel circolo, è vguale all'angolo interno, ed oppoſto.

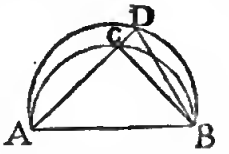


Nel circolo ABCD ſia deſcritto il quadrilatero BCDA, e ſia continuato il lato BA verſo E. Dico che l'angolo eſterno EAD è vguale all'angolo BCD interno, ed oppoſto.

Perche gli angoli DAB, DCB, per l'antecedente propoſitione, ſono vguali à due angoli
c 13. del 1. *retti, e gli angoli EAD, DAB* [c] *ſono vguali à*
a 10. aſſiom. *due angoli retti, li due angoli DAB, DCB* [a] *ſaranno vguali à i due angoli D A E, D A B; ſe ne leui il commune angolo*
b 3. aſſiom. *DAB,* [b] *reſta l'angolo eſterno DAE vguale all'angolo DCB, interno, ed oppoſto, ch'era da dimoſtrarſi.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Sopra la medeſima retta linea non ſi poſſono coſtituire due portioni di circoli ſimili, ed ineguali.

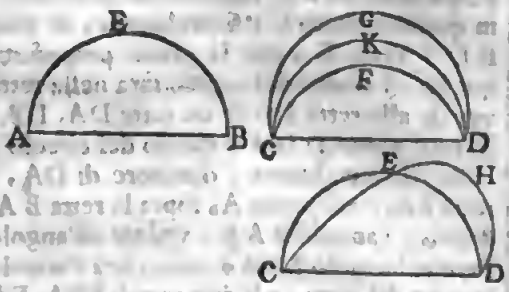


Siano coſtituite, s'è poſſibile, due portioni di circoli ACB, ADB, ſimili, ed ineguali, ſopra la medeſima retta AB, e dalla medeſima parte. Perche le portioni ADB, ACB ſono ineguali, l'vna caderà dentro dell'altra, altrimente due circoli ſi ſegarebbero in più di due punti, ch'è contro alla propoſitione decima di queſto. Cada dunque l'vna dentro l'altra, e dal punto A ſi tiri la retta AD,
a 1. poſtul. [a] che ſeghi le circonferenze in qualunque modo, come in C, & D, ſi tirino le rette CB, DB. Perche le portioni ADB, ACB ſono ſimili, gli angoli ACB, ADB, nelle portioni ACB, ADB, per la decima definitione di queſto, ſono frà di loro vguali. Nel triangolo D C B, continuato il lato DC verſo A,
b 16. del 1. [b] l'angolo ACB eſterno è maggiore dell'angolo A D B interno, ed oppoſto; ma gli habbiamo dimoſtrati vguali, ſarebbe l'angolo ACB vguale, e maggiore dell'angolo ADB,
c 9. aſſiom. [c] ch'è impoſſibile; non dunque due portioni di circoli ſimili, ed ineguali poſſono eſſere coſtituite ſopra d'vna medeſima retta linea, e dalla medeſima parte, ch'era da dimoſtrarſi.

THEO-

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Le ſimili portioni de'circoli ſopra rette linee vguali, ſono frà di loro vguali.



Sopra l'vguali rette A B, CD, ſiano coſtrutte le ſimili portioni de' circoli A E B, C K D. Dico che ſono frà di loro vguali.

Si concepiſca ſoprapoſta la portione A E B alla portione CKD in modo, che la retta AB cada ſopra la retta CD, cioè il punto A cada nel punto C, ed il punto B nel punto D. Perche le rette A B, C D ſono frà di loro vguali, per l'annotatione doppo la quarta propoſitione del primo, le rette AB, CD congruono inſieme. O la portione A E B cade fuori della portione CKD, come fà la notata CGD; ò cade dentro, come fà la notata CFD; ò inclina da vna parte, come la notata CHD; ouero congruono inſieme. Se cade dentro, ò fuori della portione CKD, ſaranno frà di loro ineguali; ed in tal caſo ſopra d'vna medeſima retta linea ſaranno coſtituite due portioni di circoli ſimili, ed ineguali, ch'è contro all'antecedente propoſitione. Non dunque cade dentro, come fà la portione CFD, ne cade fuori, come fà la portione CGD. Suppoſto dũque che inclini da vna parte, come fà la portione C H D: i due circoli CED, CHD, ſi ſegaranno inpiù di due punti, ch'è contro alla decima propoſitione di queſto; non dunque inclina da vna parte. Per la qual coſa la portione AEB congrue con la portione CKD; ma le coſe, che congruono inſieme, ſono frà di loro vguali; ſarà la portione AEB vguale alla portione CKD, ch'era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

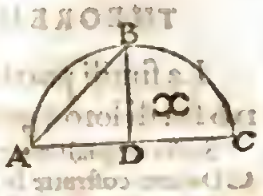
Dall'antecedente propoſitione è manifeſto, che le ſimili portioni de'circoli poſte ſopra rette linee vguali, hanno gli archi vguali; poiche eſſendoſi dimoſtrato, che le portioni congruono inſieme, neceſſariamente gli archi, che ſono eſtremi delle portioni, congruono inſieme, e perciò ſono frà di loro vguali.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXV.

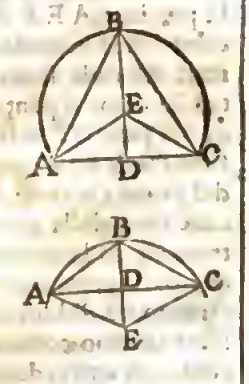
Data vna portione di circolo, deſcriuere il circolo, del quale quella è portione.

Sia data la portione ABC, alla quale s'habbia da ritrouare il centro per compire il circolo.

a 10. del 1. Si diuida la corda AC [a] in due parti vguali in D; nel punto D sopra la retta AC [b] si erigga la b 11. del 1. perpendicolare DB, concorrente con l'arco ABC in qualche punto B; si prolunghi, se bisogna, c 2. postul. B D e verso E, per la prima propositione di questo, il centro del circolo sarà nella retta B E. Hor se la retta B D è d 1. assiom. vguale alla retta DA, le tre rette DA, DB, DC, [c] sono frà di loro vguali, ed il punto D sarà il centro del circolo ABC, come nella figura X.



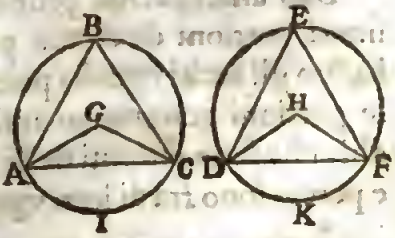
f 1. postul. Se BD è maggiore, ò minore di DA, si tiri [f] la
g 23. del 1. retta BA, e nel punto A, sopra la retta B A, [g] si costituisca l'angolo B A E, vguale all'angolo A B D.
h 17. del 1. Perche l'angolo BDA è retto, sarà l'angolo DBA [h] minore del retto, e li due angoli EBA, EAB saranno minori di due retti, e per lo Scolio alla trigesima prima propositione, continuata la retta BE, quella concorrerà con la retta A E continuata in qualche punto E. Dico che il punto E sarà il centro del circolo A B C: si tiri la retta E C. Perche gli angoli E B A, E A B, per costruttione sono frà di loro vguali, sara la retta B E K vguale alla retta EA.
K 6. del 1. Si considerino i triangoli E D A, EDC, de'quali il lato DA è vguale al lato DC, il lato DE è commune, saranno i due lati ED, DA vguali à i due ED, D C; gli angoli
l 4. del 1. in D sono vguali, stante che sono retti, sarà la base EA [l] vguale alla base EC; ma la retta EA è dimostrata vguale alla retta E B, le trè rette
m 1. assiom. dunque E A, E B, E C, [m] sono fra di loro vguali, ed il punto E [n] sarà il
n 9. del 3. centro del circolo ABC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Ne i circoli vguali gl' angoli vguali, ò siano à i centri, ò alle circonferenze, sono opposti ad archi vguali.

Siano gli vguali circoli A B C, DEF, i di cui centri G, ed H, e siano gli angoli à i centri AGC, DHF frà di loro vguali; e gli angoli alle circonferenze ABC, DEF frà di loro vguali. Dico che gli archi opposti A I C, DKF agl'angoli vguali sono frà di loro vguali.



a 1. del 3. Perche i circoli sono frà di loro vguali i loro semidiametri [a] saranno frà di loro vguali; si che ne i triangoli GAC, HDF, i due lati AG, GC sono vguali alli due DH, HF; l'angolo G è supposto vguale all'angolo
b 4. de 1. H, sarà la base AC [b] vguale alla base D F. In oltre, perche gli ango-

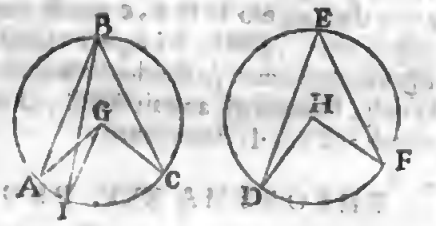
li

li AGC, DHF [c] ſono dupli degl'angoli ABC, DEF, e gli angoli AGC, DHF ſono frà di loro vguali, ſaranno gli angoli A B C, DEF [d] frà di loro vguali; dalche le portioni ABC, D E F [e] ſono frà di loro ſimili; e perche ſono poſte ſopra le rette linee vguali A C, DF, perciò ſono [f] frà di loro vguali; dalli circoli vguali ABCI, DEFK ſe ne leuino le portioni vguali ABC, DEF, reſtano le portioni A I C, D K F [g] frà di loro vguali, e per il Corollario alla propoſitione vigeſima quarta, gli archi AIC, DKF ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

c 20. del 3.
d 7. aſſiom.
e 10. defin. del 3.
f 24. del 3.
g 3. aſſiom.

COROLLARIO.

Da quì è manifeſto, che ſe gli angoli al centro, ò alla circonferenza ſono frà di loro ineguali, il maggiore ſarà oppoſto al maggior arco.



Ne' i circoli vguali ABC, DEF, ſia l'angolo al centro A G C maggiore dell'angolo al centro DHF, è l'angolo alla circonferenza ABC maggiore dell'angolo alla circonferenza DEF. Dico che l'arco A C è maggiore dell'arco D F. Nel punto G ſi faccia l'angolo C G I vguale all'angolo DHF. Perche l'angolo AGC è maggiore dell'angolo DHF, ſarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo IGC; dal che la retta G I ſega l'angolo A G I, e ſarà l'arco A C maggiore dell'arco I C. Hor eſſendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, per l'antecedente propoſitione, ſarà l'arco IC vguale all'arco DF: ma l'arco AC è maggiore dell'arco IC, in conſeguenza l'arco AC ſarà maggiore dell'arco DF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. Si tiri la retta IB. Perche l'angolo IGC [a] è il doppio dell'angolo IBC, e l'angolo DHF è il doppio dell'angolo DEF; eſſendo gli angoli IGC, DHF fra di loro vguali, ſaranno gli angoli IBC, D E F fra di loro vguali: ma l'angolo ABC è poſto maggiore dell'angolo D E F, ſarà ancora maggiore dell'angolo IBC. Per la qual coſa l'arco AC, oppoſto all'angolo maggiore ABC, è maggiore dell'arco IC oppoſto all'angolo minore IBC: ma l'arco I C è vguale all'arco DF, ſarà l'arco AC maggiore dell'arco DF, ch'era da dimoſtrarſi.

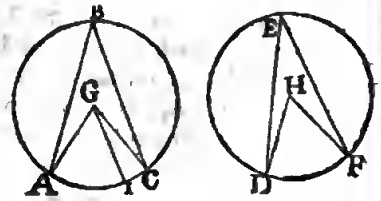
a 20. del 3.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

Ne i circoli vguali, gli angoli, che ſono oppoſti ad archi vguali, ò ſiano à i centri, ouero alle circonferenze, ſono frà di loro vguali.

Siano gli vguali circoli ABC, D EF, i di cui centri G, ed H; e ſiano

gli archi AC, DF frà di loro vguali. Dico che gli angoli AGC, DHF à i centri, sono frà di loro vguali; e parimente gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze, sono frà di loro vguali.



Se gli angoli AGC, DHF, à i centri, non sono frà di loro vguali, vno de'i due sarà maggiore: suppoſto che l'angolo AGC sia maggiore dell'angolo DHF; si faccia l'angolo AGI [a] vguale all'angolo DHF; sarà l'angolo AGC maggiore dell'angolo AGI, e la retta GI caderà frà li punti A, & C. In oltre perche ne'i circoli vguali ABC, DEF, gli angoli AGI, DHF, à i centri, sono per costruttione vguali, per l'antecedente propositione, sarà l'arco AI vguale all'arco DF; mà l'arco AC è suppoſto vguale all' medesim'arco DF, sarà l'arco AI vguale all'arco AC; la parte vguale al tutto, [b] ch'è impoſsibile: non dunque l'angolo AGC è maggiore dell'angolo DHF, e perciò sono frà di loro vguali. E perche gli angoli AGC, DHF, à i centri [c] sono dupli de' gli angoli ABC, DEF, alle circonferenze; essendo gli angoli AGC, DHF, à i centri frà di loro vguali, saranno gli angoli ABC, DEF, [d] alle circonferenze frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarsi.

a 23. del 1.

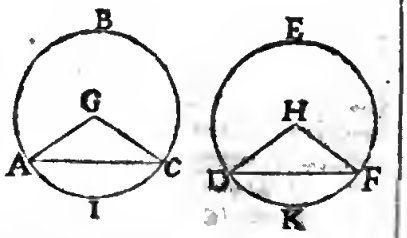
b 9. assiom.

c 20. del 3.

d 7. assiom.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ne i circoli vguali, l'vguali rette linee detraggono archi vguali, cioè il maggiore vguale al maggiore, ed il minore al minore.



Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e siano le rette linee AC, DF frà di loro vguali. Dico che l'arco ABC è vguale all'arco DEF, e l'arco AIC, vguale all'arco DKF.

Perche i circoli ABC, DEF, per ipoteſi, sono frà di loro vguali, i loro semidiametri [a] saranno frà di loro vguali; dal che i lati AG, GC, del triangolo GAC, sono vguali à i due lati DH, HF del triangolo HDF, la baſe AC, per ipoteſi, è vguale alla baſe DF, sarà l'angolo G [b] vguale all' angolo H. In oltre essendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, e gli angoli AGC, DHF, à i centri sono frà di loro vguali; sarà l'arco AIC [c] vguale all'arco DKF: e perche i circoli sono suppoſti vguali, le loro circonferenze saranno frà di loro vguali, dalle quali detrattone gli vguali archi AIC, DKF, resta l'arco ABC [d] vguale all'arco DEF, ch'era da dimoſtrarsi.

a 1. definit. del 3.

b 8. del 1.

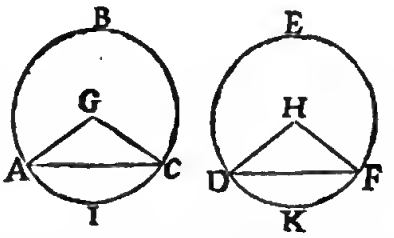
c 26. del 3.

d 3. assiom.

THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXIX.

Ne gli vguali circoli, l'vguali circonferenze ſono ſottese da vguali rette linee.



Siano gli vguali circoli ABC, DEF, i di cui centri G, ed H, e ſia l'arco AIC, vguale all'arco DKF, tirate le rette AC, DF. Dico che la retta AC è vguale alla retta DF. Da'i centri G, ed H, [a] ſi tirino le rette GA, GC, HD, HF. Perche i circoli, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, e gli archi AIC, DKF ſono ſuppoſti vguali, gli angoli AGC, DHF, [b] à i centri ſono frà di loro vguali. Similmente eſſendo i circoli ABC, DEF frà di loro vguali, i loro ſemidiametri [c] ſono frà di loro vguali. Dal che i due lati AG, GC, ſono vguali à i due DH, HF; l'angolo AGC è dimoſtrato vguale all'angolo DHF, ſarà la baſe AC [d] vguale alla baſe DF, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. poſt.

b 27. del 3.
c 1. defin. del 3.
d 4. del 1.

PROBLEMA IV. PROPOSITONE XXX.

Dato qualunque arco, diuiderlo in due parti vguali.

Sia dato l'arco ABC, da diuidere in due parti vguali. Si tiri [a] la retta AC, la quale ſi diuida [b] in due parti vguali in D, nel punto D ſi erigga la retta DB [c] perpendicolare alla retta AC, e concorrerà coll'arco ABC in qualche punto B. Dico che l'arco AB è vguale all'arco BC.

a 1. poſtul.
b 10. del 1.
c 11. del 1.

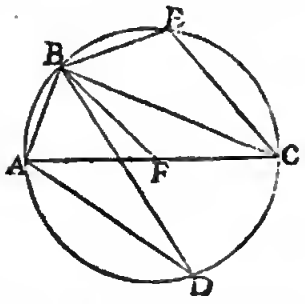
Si tirino le rette BA, BC; e ſi conſiderino i due triangoli BDC, BDA: de' quali il lato AD, per coſtruttione, è vguale al lato DC, il lato DB è commune, ſaranno i due lati BD, DA vguali à i due BD, DC; gli angoli in D ſono vguali, ſtante che ſono retti; ſarà la baſe BA [d] vguale alla baſe BC; mà le rette linee vguali ne gli vguali circoli detraggono archi vguali, [e] eſſendo la retta BA vguale alla retta BC, ſarà l'arco AB vguale all'arco BC: e così tutto l'arco ABC è diuiſo in due parti vguali nel punto B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

d 4. del 1.

e 28. del 3.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXI.

In ogni Circolo, l'angolo nel mezzo circolo è retto; l'angolo nella portione maggiore è minore del retto: l'angolo nella portione minore è maggiore del retto.



Nel circolo ABCD, il dicui centro F, ed il diametro A C; sia prima l'angolo A B C nel mezzo circolo ABEC. Dico che l'angolo A B C è retto. Si tiri [a] la retta F B. Per la definitione del circolo, le rette FA, F B, C F sono frà di loro vguali. Nel triangolo isoscele FAB gli angoli FAB, F B A [b] sono frà di loro vguali, e similmente nel triangolo isoscele FBC, gli angoli FBC, FCB sono frà di loro vguali; se all'angolo F B A s'aggiunge l'angolo F B C, ed all'angolo F A B s'aggiunge l'angolo FCB; ne viene tutto l'angolo ABC [c] vguale à i due angoli BAC, BCA, dal che i tre angoli del triangolo ABC sono il doppio dell'angolo ABC: mà i tre angoli d'vn triangolo sono [d] vguali à due angoli retti; sarà dunque l'angolo A B C retto, e perciò l'angolo nel mezzo circolo è retto, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 1. post.

b 5. del 1.

c 2. assiom.

d 32. del 1.

Di nuouo sia l'angolo ADB nella portione maggiore BECDA. Dico che l'angolo ADB è minore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BCA [e] minore del retto; mà gli angoli A D B, ACB, nella medesima portione A D C B, [f] sono frà di loro vguali, sarà l'angolo ADB minore del retto, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

e 17. del 1.

f 21. del 3.

Finalmente sia la portione minore B E C; e nell'arco B E C sia preso qualunque punto E, si tirino le rette B E, C E. Dico che l'angolo BEC nella portione minore è maggiore del retto. Perche l'angolo ABC è dimostrato retto, sarà l'angolo BAC [g] minore d'vn angolo retto. Nel quadrilatero ABEC, i due angoli opposti BEC, BAC, [h] sono vguali à due angoli retti; mà l'angolo BAC è dimostrato minore del retto, sarà l'angolo BEC maggiore del retto, ch'era da dimostrarsi.

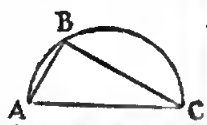
g 17. del 1.

h 22. del 3.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersa nel seguente modo.

La portione intorno all'angolo retto è mezzo circolo; intorno all'angolo minore del retto è portione maggiore; ed intorno all'angolo maggiore del retto è portione minore.



Sia nel primo luogo l'angolo ABC retto. Dico che la portione ABC è mezzo circolo; se la portione ABC non è mezzo circolo, ò sarà portione maggiore, ò portione minore; se sarà portione maggiore, per l'antecedente propositione l'angolo ABC sarà minore del retto, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione maggiore. Se sarà portione minore, l'angolo A B C sarà maggiore del retto, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione minore, e perciò sarà mezzo circolo.

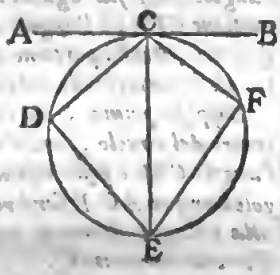
Sia nel secondo luogo l'angolo ABC minore del retto. Dico che la portione

ABC è portione maggiore. Se non è portione maggiore, ò sarà mezzo circolo, ouero portione minore. Supposto prima, che sia mezzo circolo: l'angolo ABC sarà retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione minore, l'angolo ABC sarà ottuso, ch'è contro all'ipotesi; non dunque è portione minore, ne mezzo circolo, e perciò è portione maggiore.

Sia finalmente l'angolo ABC ottuso. Dico, che la portione ABC è portione minore; se non è portione minore, ò è mezzo circolo, ouero portione maggiore: s'è mezzo circolo, l'angolo ABC è retto, ch'è contro all'ipotesi; s'è portione maggiore, l'angolo ABC sarà acuto, ch'è contro all'ipotesi: non dunque è mezzo circolo, ne portione maggiore, mà sarà portione minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXII.

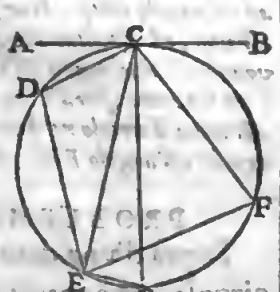
Se vna retta linea tocca qualche circolo, e dal contatto sia tirata vna retta linea, che lo seghi; gli angoli contenuti dalla tangente, e dalla segante, sono vguali à gli angoli costituiti nelle alterne portioni.



Tocchi la retta AB il circolo C D E F, in qualche punto C, e dal contatto C sia tirata la retta C E, che seghi il circolo. Dico, che l'angolo ACE, contenuto dalla tangente AB, e dalla segante C E, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; e l'angolo BCE è vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

Supposto prima, che la retta CE passi per il centro del circolo, quella [a] farà angoli retti con la tangente A B; mà gli angoli ne' i mezzi circoli C F E, C D E [b] sono retti; farà l'angolo ACE vguale all'angolo nell'alterna portione C F E; e l'angolo BCE sarà vguale all'angolo nell'alterna portione EDC.

Se la retta C E non passa per il centro del circolo, nel punto C sopra la retta AB, [c] s'erigga la perpendicolare CG; farà il centro del circolo nella retta C G, dal che le portioni CDG, CFG sono mezzi circoli; si tiri la retta EG; sarà l'angolo CEG [d] retto, e gli altri due EGC, ECG, insieme giunti, [e] saranno vguali ad vn angolo retto, cioè saranno vguali all'angolo retto ACG: se ne leui il commune angolo ECG, resta l'angolo ACE [f] vguale all'angolo CGE; mà l'angolo CGE [g] è vguale all'angolo C F E, stante che sono nella medesima portione CFGE; l'angolo dunque AC E, contenuto dalla tangente A C, e dalla segante CE, è vguale all'angolo nell'alterna portione CFE.



Nell'arco CDE si prenda qualunque punto D, e si tirino le rette DC, D E; si consideri il quadrilatero EFCD, descritto nel circolo, del

a 19. del 3.
b 31. del 3.
c 11. del 1.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 3. assioma.
g 21. del 3.

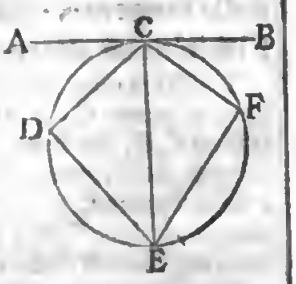
quale gli angoli oppoſti EDC, EFC [h] ſono vguali à due angoli retti; mà i due angoli E C A, E C B ſono vguali à due angoli retti; li due angoli dunque EDC, EFC ſono vguali à i due angoli ECA, ECB; mà l'angolo ECA è dimoſtrato vguale all'angolo E F C; farà l'angolo E C B, contenuto dalla ſegante E C, e dalla tangente C B, vguale all'angolo EDC nell'alterna portione CDE, ch'era da dimoſtrarſi.

h 22. del 3.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Segue la conuerſa dell'antecedente propoſitione.

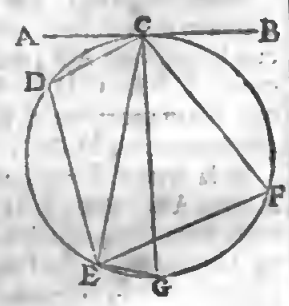
Se vna retta linea paſſa per l'eſtremità d'vn'altra retta, che ſega vn circolo, e gli angoli, che fà con la ſegante, ſiano vguali à gli angoli nelle alterne portioni; quella retta linea tocca il circolo.



Sia il circolo D C F, ſegato dalla retta C E, e per l'eſtremo C paſſi la retta AB, in modo, che l'angolo ACE ſia vguale all'angolo nell'alterna portione CFE; ò l'angolo ECB ſia vguale all'angolo nell'alterna portione EDC. Dico che la retta AB tocca il circolo nel punto C.

Suppoſto prima, che la retta C E paſſi per il centro del circolo; ſarà l'angolo CFE [a] retto; mà l'angolo CFE è poſto vguale all'angolo ACE; l'angolo dunque A C E ſarà retto; e per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta AB tocca il circolo nel punto C.

a 31. del 3.



Non paſſi la retta CE per il centro del circolo; ſi troui il centro del circolo, [b] e dal punto C, per il trouato centro ſi faccia paſſare la retta C G, e ſi congiunga EG: ſarà l'angolo C F E [c] vguale all'angolo CGE; dal che l'angolo CGE ſarà vguale all'angolo A C E. In oltre, perche la retta CG è diametro del circolo, l'angolo CEG [d] ſarà retto, e li due ECG, EGC inſieme, [e] ſaranno vguali ad vn angolo retto. Hor perche l'angolo A C E è vguale all'angolo C G E; all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo E C G; tutto l'angolo A C G [f] ſarà vguale à i due angoli ECG, EGC: mà queſti due angoli furono moſtrati vguali ad vn retto; ſarà l'angolo ACG retto, e per il citato Corollario, la retta AB tocca il circolo nel punto C. Il medeſimo ſi prouarà ſe l'angolo E C B è vguale all'angolo EDC; il che era da dimoſtrarſi.

b 1. del 3.
c 21. del 3.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 2. aſſioma.

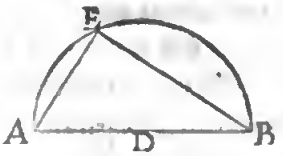
PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXIII.

Sopra d'vna data retta linea deſcriuere vna portione di circolo, che capiſca vn angolo vguale ad vn dato angolo.

Sia

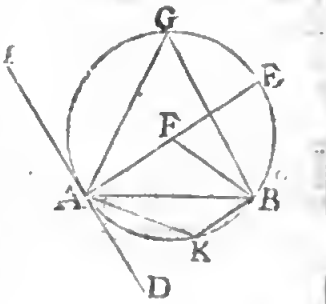
Sia data la retta linea A B, ed il dato angolo sia C; si vuole sopra la retta A B descriuere vna portione di circolo, che capisca vn angolo vguale al dato angolo C.

Se l'angolo dato sarà retto; si diuida la retta A B [a] in due parti vguali in D, e fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, [b] si descriua il mezzo circolo A E B. Perche l'angolo nel mezzo circolo [c] è retto, sarà A E B la portione, che si cerca.



a 10. del 1.
b 3. post.
c 31. del 3.

Se l'angolo C sarà acuto; nel punto A, sopra la retta A B, [d] si costituisca l'angolo B A D vguale all'angolo C; e nel punto A, si erigga la retta A E, [e] perpendicolare ad A D; sarà l'angolo E A D retto; mà l'angolo B A D è supposto acuto, il restante angolo B A E sarà acuto. Nel punto B, sopra la retta A B, [f] si costituisca l'angolo F B A, vguale all'angolo F A B; i due angoli F A B, F B A saranno minori di due retti; e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, continuata la retta B F concorrerà con la retta A E in qualche punto F: e perche gli angoli F A B, F B A sono frà di loro vguali, sarà F A [g] vguale ad F B; si che, fatto centro in F, e coll'interuallo F A, ouero F B, [h] si descriua il circolo A B G, la circonferenza di quello passarà per il punto B. Dico che la portione B G A è quella che si cerca.



d 23. del 1.
e 11. del 1.
f 23. del 1.
g 6. del 1.
h 3. post.

Perche la retta A D fà angolo retto col diametro A E, per il Corollario alla 16. propositione di questo, tocca il circolo A B G nel punto A; la retta A B lo sega, perciò l'angolo D A B, [K] contenuto dalla tangente D A, e dalla segante A B, è vguale all'angolo nell'alterna portione B G A; mà l'angolo D A B, per costruttione è vguale all'angolo C, sarà l'angolo nella portione B G A [l] vguale all'angolo C. Per la qual cosa s'è descritta la portione B G A sopra la data retta A B, la quale contiene vn angolo vguale all'angolo dato C, eh'era da farsi nel primo luogo.

K 32. del 3.
l 1. assioma.

Finalmente sia il dato angolo ottuso, come il notato H. Sopra la retta A B, nel punto A, [m] si costituisca l'angolo B A I vguale all'angolo H; sopra la retta A I, nel punto I, [n] s'erigga la perpendicolare A E; sarà l'angolo E A D retto, e perciò l'angolo E A B [o] sarà acuto. Nel punto B, sopra la retta A B, [p] si faccia l'angolo F B A vguale all'angolo F A B; i due angoli F A B, F B A, sono minori di due retti, e le rette A F, B F concorrono in qualche punto F; e perche gli angoli F A B, F B A sono frà di loro vguali, sarà F A [q] vguale ad F B; si che, fatto centro in F, coll'interuallo F A, ouero F B, si descriua [r] il circolo A B G, quello passarà per il punto B. Dico che la portione A K B sarà quella, che si cerca.

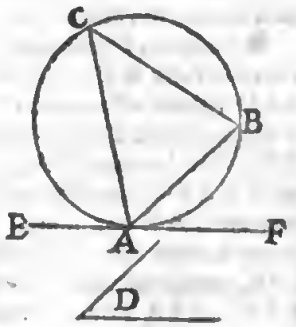
m 23. del 1.
n 11. del 1.
o 17. del 1.
p 23. del 1.
q 6. del 1.
r 3. postul.

Perche l'angolo I A F è retto, per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta I A tocca il circolo nel punto A, la retta A B lo sega;

[f] 32. del 3. [g] 1. assioma. farà l'angolo I A B [f] vguale all'angolo nell'alterna portione A K B; mà l'angolo IAB è fatto vguale all'angolo H, farà l'angolo H [g] vguale all'angolo AKB: dalche la portione A K B è quella, che si cerca, come fù proposto fare, e dimostrare.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXXIV.

Da vn dato circolo tagliare vna portione, che capisca vn angolo vguale ad vn angolo dato.

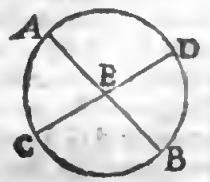


Sia il dato circolo ABC, dal quale si vuole tagliare vna portione, che capisca vn angolo vguale all' angolo dato D. Si [a] Corol. alla 16. del 3. tiri la retta EF, [a] che tocchi il circolo ABC in qualche punto A; nel punto A, sopra [b] 23. del 3. la retta AF, si costituisca l'angolo F A B [b] vguale al dato angolo D. Dico che la portione ACB sarà quella, che si cerca.

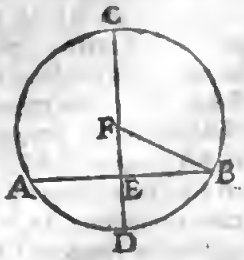
Perche la retta FA tocca il circolo A B C nel punto A, e la retta AB lo sega; sarà l'angolo F A B [c] vguale all'angolo nell'alterna [c] 32. del 3. portione A C B; mà l'angolo F A B è fatto vguale all'angolo D, la portione dunque A C B capirà l'angolo vguale all'angolo D, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXV.

Se nel circolo due rette linee si segano scambieuolmente, il rettangolo contenuto dalle parti dell'vna è vguale al rettangolo contenuto dalle parti dell'altra.



Nel circolo ACBD, si seghino le rette AB, C D in qualche punto E. Dico, che il rettangolo contenuto dalle parti A E, E B, è vguale al rettangolo contenuto dalle parti CE, ED. O, le rette AB, CD, passano ambedue per il centro del circolo, ò passa vna di quelle per il centro, ò nissuna. Passino prima le due AB, CD per il centro E; saranno le rette EB, ED, EA, EC frà di loro vguali, e perciò il rettangolo contenuto dalle parti AE, EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due CE, ED. ch'era da dimostrarsi per il primo caso.



Di nuouo supposto, ch'vna di quelle, come C D passi per il centro F, e diuida la retta A B fuori del centro in due parti vguali in E; saranno gli angoli in E [a] retti. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due A E, E B è vguale al rettangolo contenuto dalle due C E, E D. Dal [b] 1. postul. centro F al punto B [b] si tiri la retta F B. Perche la retta CD è diuisa in due parti vguali in F, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in E, il rettangolo contenuto

[a] 3. del 3.

dalle

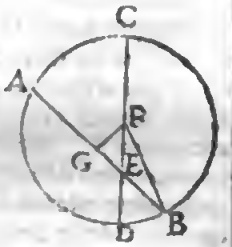
dalle parti ineguali CE,ED,col quadrato dell'intermedia portione FE, [c] è vguale al quadrato di FD, cioè [d] al quadrato di F B : mà nel triangolo FEB,angolo retto in E, il quadrato del lato FB [e] è vguale à i quadrati de' lati BE, EF; farà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di EF, [f] vguale à i quadtati delle due BE, EF : dall'vna, e l'altra parte ſe ne leui il quadrato della commune E F; reſtarà il rettangolo contenuto dalle due C E, E D [g] vguale al quadrato di E B : mà il quadrato di EB è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ſtante che AE è vguale ad EB; farà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 5. del 2.
[d] 15. defin. del 1.
[e] 47. del 1.
[f] 2. aſſioma.
[g] 9. aſſioma.

Paſſi ſimilmente la retta CD per il centro F, e ſegh i la retta AB fuori del centro, non in due parti vguali, in qualche punto E. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Si diuida la retta A B [h] in due parti vguali in G, e ſi tiri la retta G F; gli angoli in G [K] ſaranno retti. Si tiri la retta F B : farà il quadrato di FB [l] vguale à i quadrati de i due lati FG, GB, ed il quadrato di FE farà vguale à i quadrati de due lati EG, GF.

[h] 10. del 1.
[K] 3. del 3.
[l] 47. del 1.

Perche la retta AB è diuiſa in due parti vguali in G, ed in due ineguali in E, farà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali A E, E B, col quadrato dell'intermedia portione G E, [m] vguale al quadrato di G B, ch'è metà della linea; all'vna, ed all'altra parte di queſta vgualità, s'aggiunga il quadrato di GF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF, [n] vguale à i quadrati de i due lati BG, GF; mà i quadrati de i due lati BG, GF [o] ſono vguali al quadrato di F B; farà il quadrato di F B vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, con i quadrati delle due EG, GF; [e] perche i quadtati de i due lati E G, G F ſono vguali al quadrato di F E; farà il quadrato di FB vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE.



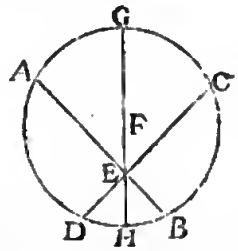
[m] 5. del 2.
[n] 2. aſſioma.
[o] 47. del 1.

La retta CD è diuiſa in due parti vguali in F, ed in due ineguali in E; il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, [p] è vguale al quadrato di FD, cioè vguale al quadrato di FB : ma il quadrato di FB fù moſtrato vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col quadrato di FE; farà il rettangolo contenuto dalle due CE, ED, col quadrato di FE, [q] vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, col medeſimo quadrato di FE; ſe ne leui vgualmente il quadrato di FE, reſta il rettangolo contenuto dalle due CE, ED [r] vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

[p] 5. del 2.
[q] 1. aſſioma.
[r] 3. aſſioma.

Finalmente, ſuppoſto, che niuna delle rette AB, CD paſſi per il centro F. Dico, ſimilmente, che il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, E B. Dal centro F al punto E ſi tiri la retta FE, la quale ſi continui ſino alla circonferenza in G, ed H. Perche la retta GH paſsa per il centro del circolo, e ſega la retta AB, fuori del centro, per quel che s'è dimoſtrato, il rettangolo

contenuto dalle rette G E, E H è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB. Similmente la retta G H passa per il centro F, e sega la retta A B fuori del centro nel punto E, per quel che s'è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle rette CE, ED è vguale al rettangolo contenuto dalle due GE, E H; ma si disse, che il rettangolo contenuto dalle due AE, EB è vguale al medesimo rettangolo contenuto dalle rette G E, E H; sarà il rettangolo contenuto dalle parti CE, ED [c] vguale al rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, come fù proposto dimostrare.

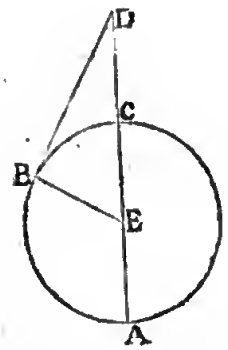


c 1. assioma.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXVI.

Se da qualche punto preso fuori d'vn circolo siano tirate due rette linee, vna che seghi il circolo, e l'altra, che lo tocchi; il rettangolo contenuto dalla segante, e dalla parte esterna, è vguale al quadrato della tangente.

Fuori del circolo A B C sia preso qualunque punto D, dal quale siano tirate le rette DA, DB, cioè D A, che seghi il circolo, come in A, & C, e la retta DB lo tocchi in qualche punto B. Dico che il rettangolo contenuto dalla segante A D, e dalla parte esterna D C, è vguale al quadrato della tangente D B. Supposto prima, che la segante D A passi per il centro E del circolo, dal contatto B al centro E [a] si tiri la retta BE; sarà l'angolo EBD [b] retto, ed il quadrato di DE [c] sarà vguale à i quadrati de i due lati DB, BE.

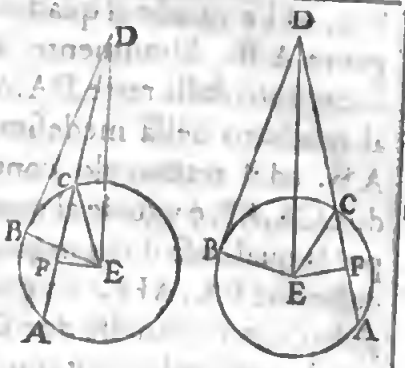


a 1. postul.
b 18. del 3.
c 47. del 1.

Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in E, e l'è aggiũta la retta CD; sarà il rettangolo contenuto dalla composta AD, e dall'aggiunta DC, col quadrato di CE, [d] vguale al quadrato della retta D E; ma il quadrato di DE è vguale à i quadrati de lati DB, BE; sarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di EC, [e] vguale à i quadrati delle due DB, BE: se ne leuino vgualmente i quadrati delle rette EC, EB, [f] resta il rettangolo contenuto da tutta la segante AD, e dalla parte esterna DC, vguale al quadrato della tangente DB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

d 6. del 2.
e 1. assioma.
f 3. assioma.

Se



Se la retta D A non paſſa per il centro E, ma ſega la circonferenza, come in A, & C: Si diuida la retta AC [g] in due parti vguali in F, ſi tiri la retta FE: gli angoli in F [h] ſaranno retti; ſi tirino le rette EB, EC, ED. L'angolo E B D [K] ſarà retto, ed il quadrato di E D [l] ſarà vguale à i quadrati de i due lati EB, BD. Similmente perche gli angoli in F ſono retti; il quadrato di E D è vguale à i quadrati de i due lati EF, FD; e nel triangolo EFC, il quadrato di EC è vguale à i quadrati de' due lati EF, FC.

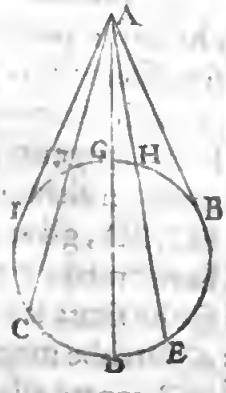
g 10. del 1.
h 3. del 3.
K 18. del 3.
l 47. del 1.

Perche la retta AC è diuiſa in due parti vguali in F, e l'è aggiunta la retta CD; ſarà il rettangolo contenuto dalla compoſta AD, e dall' aggiunta DC, col quadrato di CF, [m] vguale al quadrato della retta FD; all' vna, ed all'altra parte s'aggiunga il quadrato di EF; ne viene il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i quadrati delle due CF, FE, [n] vguale à i quadrati delle due D F, FE; i quadrati de' due lati DF, FE ſono vguali al quadrato di DE; ſarà il quadrato di DE vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, con i due quadrati di CF, FE; mà i quadrati delle due CF, FE ſono vguali al quadrato di C E; ſarà il quadrato di D E vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato della retta C E: e perche il quadrato di D E è vguale à i quadrati de' due lati DB, BE; li quadrati dunque delle due DB, B E ſono vguali al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, col quadrato di CE; ſe ne leuino i quadrati dell'vguali EB, EC, reſta il rettangolo contenuto dalla ſegante AD, e dalla parte eſterna DC, [o] vguale al quadrato della tangente DB, ch'era da dimoſtrarſi.

m 6. del 2.
n 2. aſſiom.
o 3. aſſiom.

COROLLARIO I.

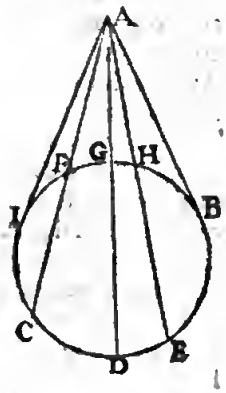
Da quel che s'è detto ſi caua, che ſe da vn punto preſo fuori d'vn circolo ſono tirate quante ſi voglia rette linee, che ſeghino il circolo, i rettangoli contenuti dalle ſeganti, e dalle parti eſterne ſono frà di loro vguali. Perche ſe dal punto A fuori del circolo CDB ſiano tirate quante ſi voglia rette AC, AD, AE, che ſeghino il circolo, e ſia ancora tirata la tangente AB, per quel che s'è dimoſtrato, il rettangolo contenuto dalle rette



EA,

EA, AH è vguale al quadrato della tangente AB. Similmente il rettangolo contenuto dalle rette DA, AG, è vguale al quadrato della medesima tangente AB, ed il rettangolo contenuto dalle due CA, AF, è vguale al quadrato di AB; per la qual cosa il rettangolo contenuto dalle due EA, AH, [p] è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AG; ouero al rettangolo contenuto dalle due CA, AF.

p 3. assiom.



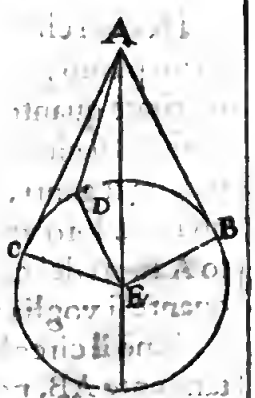
COROLLARIO II.

Se dal punto A sia tirata la retta AI, che tocchi il circolo in qualche punto I, sarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG vguale al quadrato di AI; mà il rettangolo contenuto dalle due DA, AG è vguale al quadrato di AB, sarà il quadrato di AB vguale al quadrato di AI, e la retta AB vguale ad AI; d'onde è manifesto, che se da qualche punto A fuori d'vn circolo siano tirate due rette AB, AI, che tocchino il circolo, quelle due tangenti sono frà di loro vguali.

COROLLARIO III.

Si caua ancora da quel che s'è detto, che da vn punto fuori d'vn circolo non si possono tirare più di due rette, che tocchino il circolo; perche se dopo tirate le due tangenti AB, AC se ne potesse tirare vn altra, come AD, tirate le rette EC, ED, gli angoli EDA, ECA sarebbero [q] retti, e perciò frà di loro vguali; si che tirata la retta AE, l'angolo ADE nõ sarebbe maggiore dell'angolo ACE, ch'è contro alla 21. propositione del primo libro: non dun-

q 18. del 3.

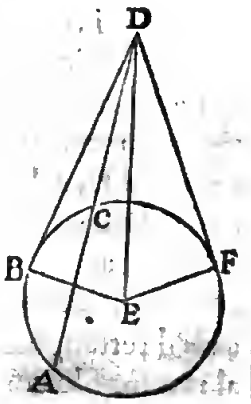


que

que dal medeſimo punto ſi poſſono tirare più di due rette, che tocchino il medeſimo circolo.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVII.

Se da qualche punto preſo fuori d'vn circolo ſiano tirate due rette linee, delle quali vna ſeghi il circolo, e l'altra concorra con la circonferenza, ed il rettangolo contenuto dalla ſegante, e dalla parte eſterna, ſia vguale al quadrato della concorrente, la concorrente toccarà il circolo nel punto del concorſo.



Sia preſo qualche pũto D fuori del circolo ABC, dal quale ſiano tirate le rette DA, DB, cioè che la retta DA ſeghi il circolo come in A, & C, e la retta DB concorra con la circonferenza nel punto B in modo, ch'il rettangolo contenuto dalle rette AD, DC ſia vguale al quadrato della concorrente DB. Dico, che la retta DB tocca il circolo nel punto B.

Dal punto D ſia tirata la retta DF, [a] che tocchi il circolo in qualche punto F, dal centro E ſi tirino le rette EF, ED, EB; ſarà l'angolo EFD [b] retto. Perche la retta DA ſega il circolo, e la retta DF lo tocca, il rettangolo contenuto dalle due AD, DC, [c] ſarà vguale al quadrato della retta DF; mà per ipoteſi, il rettangolo contenuto dalle medeſime due AD, DC, è vguale al quadrato della retta DB, ſarà il quadrato della retta DF [d] vguale al quadrato della retta DB; e la retta DF ſarà vguale alla retta DB. Si conſiderino i due triangoli DEF, DEB: perche i due lati DF, FE ſono vguali à i due lati DB, BE, e la baſe DE è commune, ſarà l'angolo DFE [e] vguale all'angolo DBE; mà l'angolo DFE è retto, ſarà l'angolo DBE [f] retto; e per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta DB tocca il circolo nel punto B, che era da dimoſtrarſi.

a 17. del 3.
b 18. del 3.
c 36. del 3.
d 1. aſſiom.
e 8. del 1.
f 10. aſſiom.

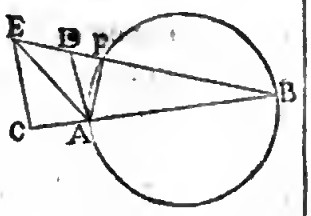
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifeſto, che quãdo da vn punto fuori d'vn circolo ſono tirate due rette vguali, che concorrino con la circonferenza del medeſimo circolo, ed vna di quelle tocca il circolo, ancora l'altra toccarà il medeſimo circolo; poiche eſſendoſi prima dimoſtrato, che le due DF, DB ſono frà di loro vguali, e col ſuppoſto che la retta DF

tocchi il circolo, s'è poi dimostrato, che la retta DB ancora tocca il circolo.

SCOLIO.

Trattando qui Euclide delle passioni, che accadono alle rette, che segano il circolo, non sarà inutile porre in questo luogo il seguente Theorema.



Nel circolo, il di cui diametro AB sia continuato quanto si vuole verso C, e cadano le rette DA, EC perpendicolari alla retta CB, vna delle quali, come DA, cada nell'estremo A del diametro, e l'altra doue si vuole nella continuatione CA; dall'estremo B sia tirata la retta BE, la quale seghi le perpendicolari, come in D, ed E, e la circonferenza del circolo in qualche punto F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due DB, BF è vguale al quadrato del diametro AB; ch'il rettangolo contenuto dalle rette BF, FD è vguale al quadrato di FA, e ch'il rettangolo contenuto dalle rette BF, DE, è vguale al rettangolo contenuto dalle rette BA, AG.

E prima dico, che il rettangolo contenuto dalle due DB, BF è vguale al quadrato del diametro AB. Perche l'angolo DAB è retto, la retta DA [a] *tocca il circolo in A, ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DF, sarà vguale* [b] *al quadrato di DA. In oltre perche il rettangolo contenuto dalle due DB, BF, col rettãgolo cõtenuto dalle due BD, DF* [c] *è vguale al quadrato di DB cioè vguale à i quadrati* [d] *delle due DA, AB; ma il rettãgolo delle due BD, DF* [e] *è vguale al quadrato di DA; sarà il rettangolo contenuto dalle due DB, BF* [f] *vguale al quadrato del diametro AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo dico, che il rettangolo contenuto dalle due BF, FD è vguale al quadrato di AF. Essendo l'angolo AFB nel mezzo circolo, retto, i quadrati de i due lati AF, FD [g] *saranno vguali al quadrato di AD; mà il quadrato di AD* [h] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BD, DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [K] *vguale à i quadrati delle due DF, FA: e perche il rettangolo contenuto dalle due BD, DF* [l] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF; sarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col quadrato di DF,* [m] *vguale à i quadrati de' due lati AF, FD; se ne leui il commune quadrato di DF, resta il rettangolo contenuto dalle due BF, FD* [n] *vguale al quadrato di AF, ch'era*

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 2. del 2.
d 47. del 1.
e 36. del 3.
f 3. assioma.
g 47. del 1.
h 36. del 3.
K 1. assiom.
l 3. del 2.
m 2. assiom.
n 3. assioma.

da

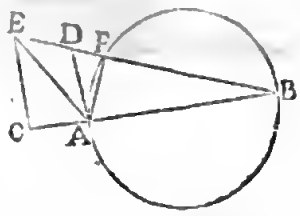
da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

Finalmente dico, ch'il rettangolo contenuto dalle due BF, DE è vguale al rettangolo contenuto dalle due B A, A C. Si tiri la retta A E, ſarà l'angolo EAB ottuſo, e pereiò ſaranno i quadrati delle due EA, A B col doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, o vguali al quadrato di EB; mà il quadrato di A E p è vguale à i quadrati delle due A F, F E, ed il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due AF, FB; ſarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due B F, F E, vguali al quadrato di E B. E perche il quadrato di E B è vguale à i quadrati delle due BF, FE q col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE; ſarà il doppio rettangolo contenuto dalle due B A, A C, col doppio quadrato di AF, e con i quadrati delle due BF, FE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE, con i quadrati delle medeſime BF, FE. Dall'vna, e l'altra parte ſe ne leuino i quadrati delle due B F, F E, reſta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC, r col doppio quadrato di FA, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, FE. In oltre perche la retta FE è diuiſa in D, e la retta B F è non diuiſa, ſarà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE, s vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE: mà il rettangolo contenuto dalle due BF, FD, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale al quadrato di FA, ſarà il quadrato di FA, col rettangolo contenuto dalle due BF, DE, vguale al rettangolo contenuto dalle due B F, F E; e duplata l'vna, e l'altra parte dell'egualità, ne verrà il doppio quadrato di A F, col doppio rettangolo contenuto da BF, DE, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, F E. Si è dimoſtrato, ch'il doppio rettangolo contenuto dalle due BF, F E, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BA, A C, col doppio quadrato di A F; ſarà il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, A C, col doppio quadrato di FA, u vguale al doppio quadrato di F A, col doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE: ſe ne leui vgualmente il doppio quadrato di F A, reſta il doppio rettangolo contenuto dalle due BA, AC x vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due BF, DE; e le loro metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, DE, ch'era da dimoſtrarſi.

o 12. del 2.
p 47. del 1.
q 4. del 2.
r 3. aſſiom.
s 1. del 2.
u 1. aſſiom.
x 3. aſſiom.

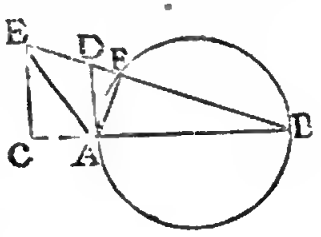
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifeſto, ch'il rettangolo contenuto dalle due B A, A C, col quadrato di A F, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE.



Perche eſſendo il rettangolo contenuto dalle due B F, F D vguale al quadrato di F A, ed il rettangolo contenuto dalle due BA, A C è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF DE; ſarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FD, col ret-

tangolo contenuto dalle due B F, D E: mà il rettangolo contenuto dalle due B F, F D, col rettangolo contenuto dalle due B F, D E, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, F E; sarà il rettangolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di FA, vguale al rettangolo contenuto dalle due BF, FE, come si disse.



COROLLARIO.

Quindi è manifesto, che se sarà vn triangolo rettangolo, come E C B, angolo retto in C, e nel lato C B è preso qualche punto A, dal quale cada la retta A F, perpendicolare al lato EB, il rettangolo contenuto dalle parti BF, FE, sarà tanto maggiore del rettangolo contenuto dalle parti B A, A C, per quanto è il quadrato della perpendicolare A F.

Trattandosi delle passioni delle rette, che segano il circolo, stimo bene aggiungere qui il seguente Theorema.

Se da vn'estremo del diametro del circolo sono tirate quante si voglia rette linee, le quali seghino la circonferenza del circolo, e seghino ancora qualche retta linea perpendicolare al medesimo diametro; i rettangoli contenuti dalle rette interposte frà quell'estremo, e la circonferenza del circolo, e dalle rette interposte frà il detto estremo, e la perpendicolare al diametro, sono frà di loro vguali.

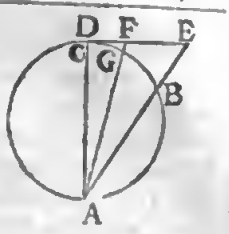
Sia il circolo ABC, il di cui diametro AC, e sia ED perpendicolare al diametro AC, e dall'estremo A del diametro siano tirate quante si voglia rette linee AE, AF, le quali seghino la perpendicolare, come in E, ed F, e la circonferenza del circolo come in B, & G. Dico ch'il rettangolo contenuto dalle due EA, AB è vguale alrettangolo contenuto dalle due FA, AG; ed anco è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC.

Supposto prima, che la perpendicolare cada nell'estremo del diametro, quella [a] *toccarà il circolo nel punto D, e sarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB* [b] *vguale al quadrato di ED. In oltre essendo l'angolo EDA retto, il quadrato di A E* [c] *sarà vguale à i quadrati de i due lati A D, D E; mà il quadrato di A E è vguale al rettangolo contenuto dalle due AE, EB,* [d] *col*

a Corol. alla 16. del 3.
b 36. del 3.
c 47. del 1.
d 2. del 2.

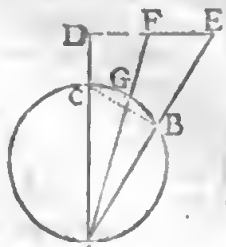
rettan-

rettangolo contenuto dalle due EA, AB; saranno queſti due rettangoli e vguali à i quadrati de' due lati ED, DA. Fù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, eſſere vguale al quadrato di ED, ſarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB, vguale al quadrato di AD; nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due FA, AG è vguale al medeſimo quadrato di AD, e perciò il rettangolo contenuto dalle due EA, AB ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle due FA, AG, il che era da dimoſtrarſi nel primo luogo,

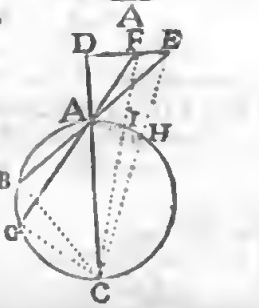


e 1. aſſiom.

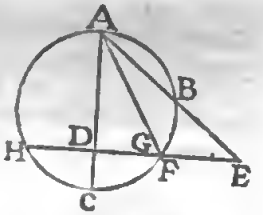
Di nuouo cada la perpendicolare ED nella continuatione CD; ſi tirino le rette CB, CG: ſarà l'angolo CBA f nel mezzo circolo retto; ſi che nel triangolo ADE, angolo retto in D, dal punto C nel lato AD, cade la retta CB, perpendicolare ad AE; e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle rette AC, CD, col quadrato di CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE: vgualmente ſ'aggiunga il quadrato di AB, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CD, E con i quadrati delle due CB, BA, cioè h col quadrato di AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BE, col quadrato di AB; cioè K vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB. Mà il rettangolo contenuto dalle due AC, CD, col quadrato di AC, l è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC; ſarà il rettangolo contenuto dalle due DA, AC, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due FA, AG, è vguale al rettangolo contenuto dalle due DA, AC. Per la qual coſa i rettangoli contenuti da EA, AB; da FA, AG; e da DA, AC, ſono frà di loro vguali: ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.



f 31. del 3.



g 1. aſſioma.
h 47. del 1.
K 3. del 2.
l 3. del 2.

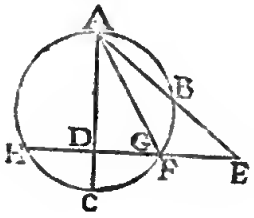


Nella terza figura ſi tirino le rette CB, CG, CE, CF, AH, AI. Gli angoli CBE, CGF, CHA, CIA, ne i mezzi circoli m ſono retti, e per l'antecedente Corollario, il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, col quadrato di AH, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CH, HE. Similmente il rettangolo contenuto dalle due BA, AE, col quadrato di AH, è vguale al medeſimo rettangolo contenuto dalle due CH, HE; dal che il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, col quadrato di AH, è vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AE, col quadrato di AH: ſe ne leui il commune quadrato di AH, reſta il rettangolo contenuto dalle due CA, AD, vguale al rettangolo contenuto dalle due BA, AE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il rettangolo contenuto dalle due GA, AF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due CA, AD. Per la qual coſa i rettangoli contenuti da BA, AE; da GA, AF; e da

m 31. del 3.

CA, AD, ſono frà di loro vguali, eh'era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente nella quarta figura ſi prolunghi E D ſino ad H. Eſſendo l'angolo in D retto, ſarà FD n *vguale ad HD, ed il rettangolo contenuto dalle due EF, FD, è vguale al rettangolo contenuto dalle due EF, DH; dal che il doppio rettangolo contenuto dalle due EF; FD,* o *è vguale al rettangolo contennto dalle due EF, FH: vgualmente s'aggiunga il quadrato di E F; ne viene* p *il rettangolo contenuto dalle due HE, E F, cioè* q *quello contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due E F, F D col quadrato di E F. In oltre, eſſendo l'angolo ADF retto, ſarà l'angolo eſterno AFE* r *ottuſo, e perciò il quadrato di A E* t *ſarà vguale à i quadrati de' due lati AF, FE, col doppio rettangolo contenuto dalle due E F, F D: mà il quadrato di AE è vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB,* u *col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; ſarà il quadrato di AF, col quadrato di E F, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due EF, FD, vguale al rettangolo contenuto dalle due EA, AB, col rettangolo contenuto dalle due AE, EB; ſù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AE, EB, vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due E F, FD, col quadrato di FE, ſarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AB vguale al quadrato di A F. Di più eſſendo H D vguale ad F D, ſarà il quadrato di F D vguale al rettangolo contenuto dalle due HD, DF: mà il rettangolo delle due HD, DF* x *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, D C; ſarà il rettangolo delle due AD, D C,* y *vguale al quadrato di F D: vgualmente s'aggiunga il quadrato di AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due CA, AD,* z *vguale à i quadrati delle due FD, DA, cioè* & *vguale al quadrato di FA: mà il rettangolo contenuto dalle due EA, A B ſù dimoſtrato vguale al medeſimo quadrato di AF; ſarà il rettangolo contenuto dalle due C A, A D vguale al rettangolo contenuto dalle due E A, AB, come ſù propoſto dimoſtrare.*



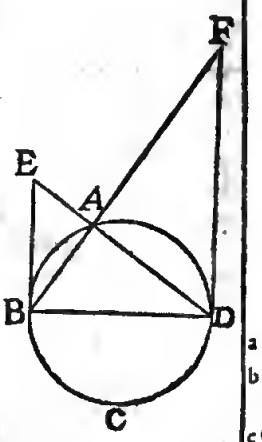
n 3. del 3.
o 1. del 2.
p 3. del 2.
q Corollario alla 36. del 3
r 16. del 1.
t 12. del 2.
u 2. del 2.
x 35. del 3.
y 1. athom.
z 2. athom.
& 47. del 1.

La prima parte del ſeguente Theorema la ſpiega Geronimo Cardano nel Libro 16. De ſubtilitate, però con differente dimoſtratione.

Se negli eſtremi d'vn diametro del circolo ſono eleuate rette perpendicolari à quel diametro; e dalli medeſimi eſtremi ſono tirate due rette, le quali ſcambieuolmente ſi ſeghino in vn iſteſſo punto con la circonferenza del circolo, e continuate concorrano con le perpendicolari; il rettangolo contenuto da ogn'vna delle ſeganti nella ſua parte interna è vguale al quadrato del diametro; e l'vno, e l'altro rettangolo, contenuto dalle parti delle ſeganti, in-

terpo-

terpoſte fra la circonferenza, e le perpendicolari, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro.



Sia il circolo ABCD, il di cui diametro BD, e negli eſtremi B, & D ſiano eleuate le rette BE, DF perpendicolari al diametro BD, e da qualche punto A preſo nella circonferenza BAD à gli eſtremi B, & D del diametro, ſiano tirate le rette BA, DA, le quali continuate concorrino con le perpendicolari, come in E, ed F. Dico, ch'il rettangolo contenuto dalle rette FB, BA; ouero il rettangolo contenuto dalle rette ED, DA, è vguale al quadrato del diametro BD, e che i due rettangoli contenuti, cioè vno dalle parti FA, AB, l'altro dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato del diametro BD.

Perche l'angolo BAD [a] *nel mezzo circolo è retto, ſarà il quadrato di BD* [b] *vguale à i quadrati de i due lati BA, AD; in oltre eſſendo gli angoli FDB, EBD retti, le rette FD, EB* [c] *toccaranno il circolo ne i punti D, & B, e ſarà il quadrato di FB* [d] *vguale à i quadrati de due lati FD, DB, ed il quadrato di ED vguale à i quadrati de i due lati EB, BD; Hor perche i quadrati de i due lati FD, DB ſono vguali al quadrato di FB; ed il quadrato di FB* [e] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due, BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA, i due quadrati de' lati FD, DB, ſaranno vguali al rettangolo contenuto dalle due BF, FA, col rettangolo contenuto dalle due FB, BA; ma il rettangolo contenuto dalle due BF, FA* [f] *è vguale al quadrato della tangente FD; ſarà il rettangolo contenuto dalle due FB, BA,* [g] *vguale al quadrato di BD. Similmente eſſendo i quadrati de i due lati EB, BD vguali al quadrato di ED, ed il quadrato di ED* [h] *è vguale à i rettangoli contenuti, cioè vno dalle due ED, DA, l'altro dalle due DE, EA; ſaranno i quadrati de i due lati EB, BD* [K] *vguali al rettangolo contenuto dalle due ED, DA, col rettangolo contenuto dalle due DE, EA; ma il rettangolo delle due DE, EA* [l] *è vguale al quadrato di EB; ſarà il rettangolo contenuto dalle due ED, DA* [m] *vguale al quadrato di BD, ch' era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Dico di nuouo, che il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col rettangolo contenuto dalle due EA, AD, è vguale al quadrato di BD. Perche il rettangolo contenuto dalle due FA, AB, col quadrato di AB, [n] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FB, BA, cioè, per le coſe dimoſtrate, vguale al quadrato di BD, ed il quadrato di BD* [o] *è vguale à i quadrati de i due lati BA, AD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due FA, AB,* [p] *col quadrato di AB, vguale à i quadrati de i due lati BA, AD. Se ne leui il commune quadrato di AB, reſta il rettangolo contenuto dalle due FA, AB* [q] *vguale al quadrato di AD.*

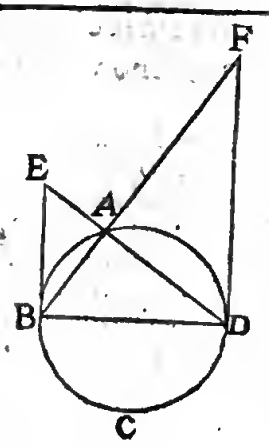
Finalmente perche il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, è vguale [r] *al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA; ed il rettangolo contenuto da ED, & DA, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale*

a 31. del 3.
b 47. del 1.
c Corollario alla 16. del 3
d 47. del 1.
e 2. del 2.
f 16. del 3.
g 3. aſſiom.
h 2. del 2.
K 1. aſſiom.
l 36. del 3.
m 3. aſſiom.
n 2. del 3.
o 47. del 1.
p 1. aſſiom.
q 3. aſſiom.
r 3. del 2.

al

c 47. del 1.

al quadrato di BD, cioè c alli due quadrati di BA, AD; sarà il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, col quadrato di AD, u 1.assiom. *u vguale à i quadrati de i due lati BA, AD;* x 3.assiom. *se ne leui il cõmune quadrato di AD, resta il rettangolo contenuto dalle due EA, AD, x vguale al quadrato di AB; Mà fù dimostrato il rettangolo delle due FA, AB vguale al quadrato di AD; i due rettangoli dunque, vno contenuto dalle due EA, AD, l'altro contenuto dalle due FA, AB, giunti insieme, sono vguali à i quadrati de i due lati BA, AD, cioè vguale al quadrato del diametro BD, ch'era da dimostrarsi.*



COROLLARIO.

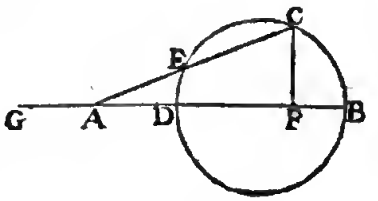
Da quel, che s'è detto, appariſce, che i due rettangoli, vno contenuto dalle parti FA, AB, e l'altro contenuto dalle parti EA, AD, giunti inſieme, ſono vguali al rettangolo contenuto da tutta FB, e dalla parte BA, ouero al rettangolo contenuto da tutta ED, e dalla parte DA.

Il ſeguente Theorema è di Pappo Aleſsandrino nel Settimo Libro.

Se da qualche punto A, preſo fuori del circolo B C D, ſiano tirate due rette AB, AC, delle quali AB paſſi per il centro del circolo, ed AC lo ſeghi, come in E, & C, e dal punto C cada la retta CF perpendicolare al diametro B D. Dico, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto dalla retta compoſta delle due AB, AD, e dalla parte BF.

a 3. del 1.

Si continui D A verſo G, e ſi faccia AG a vguale ad AD, ſi conſideri la retta A F diuiſa in D, e la retta FB non diuiſa; ſarà il rettangolo cõtenuto dalle due AF, FB b *vguale à i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BF, FD, e l'altro dalle due BF, DA; ma il rettangolo contenuto dalle due DF, FB* c *è vguale al quadrato*



b 1.del 2.

c Corol.alla 14.del 2.

drato

drato di FC, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AF, FB, vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di FC.

In oltre ſi cõſideri la retta GB diuiſa in A, e la retta FB come nõ diuiſa; ſarà il rettangolo cõtenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due GA, BF, [d] *vguale al rettangolo contenuto dalle due GB, BF: ma il rettangolo contenuto dalle due GA, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, BF (per eſſere DA vguale ad AG) ſarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF.* d 1.del 2.

Di nuouo, perche la retta AB è diuiſa in F, il rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due BA, AF, [e] *è vguale al quadrato di AB: ma il rettangolo contenuto dalle due BA, AF* [f] *è vguale al rettangolo delle due BF, FA, col quadrato di AF; ſarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due BF, FA, e col quadrato di AF, vguale al quadrato di AB; ma il rettangolo delle due BF, FA, per il num. 1. è vguale al rettangolo delle due AD, FB, col quadrato di CF; ſarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF, con i quadrati delle due AF, FC, vguali al quadrato di AB; e perche i quadrati delle due AF, FC* [g] *ſono vguali al quadrato di AC; ſarà il rettangolo delle due AB, BF, col rettangolo contenuto dalle due AD, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: ma per il num. 2. il rettangolo delle due GB, BF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, BF, col rettangolo delle due AD, BF; ſarà il rettangolo contenuto dalle due GB, BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: e perche la retta GB è compoſta di AB, e d'vna parte vguale ad AD; ſarà dunque il rettangolo contenuto dalla retta, ch'è compoſta di AB, AD, e dalla retta BF, col quadrato di AC, vguale al quadrato di AB. Per la qual coſa il quadrato di AB ſupera il quadrato di AC, per quanto è il rettangolo contenuto da quella retta, ch'è compoſta delle due BA, AD, e dalla retta BF, ch'era da dimoſtrarſi.* e 2.del 2. f 3.del 2. g 47.del 1.

Fine del Terzo Elemento.

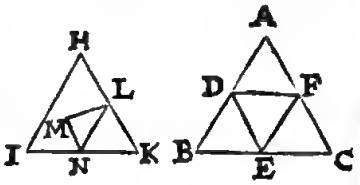
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVARTO.

DEFINITIONI.

I.

La figura rettilinea si dice essere iscritta dentro vn altra figura rettilinea, quando ciascun'angolo della figura iscritta tocca ciascun lato di quella, nella quale è iscritta.

La figura rettilinea, accioche sia iscritta dentro d'vn altra figura rettilinea, deue con tutti i suoi angoli toccare i lati della figura, nella quale è iscritta. Per esempio la figura rettilinea M N L, la quale tocca i lati H K, K I, con gli angoli L, ed N, ma non tocca il lato H I coll'angolo M, non si dice essere iscritta nella figura H I K; ma la figura D E F, che tocca i lati della figura A B C con tutti i suoi angoli, si dice essere iscritta nella figura A B C.



II.

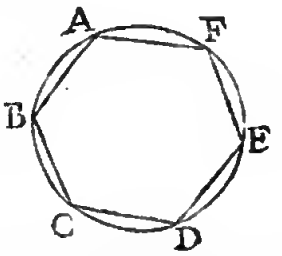
La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno alla figura rettilinea, quando tutti i lati della circoscritta toccano gli angoli della figura iscritta.

Per esempio la figura H I K, che tocca con due soli lati gli angoli della figura M N L, non si dice essere circoscritta, stante che tutti i lati della circoscritta deuono toccare gli angoli dell'iscritta, come appare nella figura A B C, che con tutti i suoi lati tocca gli angoli della figura D E F iscritta.

III.

La figura rettilinea si dice essere iscritta nel circolo, quando ogn'angolo della figura iscritta tocca la circonferenza del circolo, nel quale è iscritto.

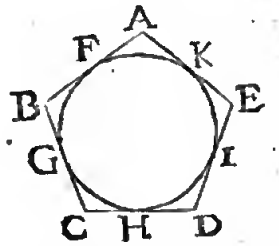
La figura rettilinea ABCDEF, che con tutti i suoi angoli tocca la circonferenza, si dice essere iscritta nel circolo ACE.



IV.

La figura rettilinea si dice essere circoscritta intorno al circolo, quand'ogni lato della figura circoscritta tocca il circolo.

La figura rettilinea ABCDE tocca il circolo con tutti i suoi lati ne i punti F, G, H, I, K, e questa si dice essere circoscritta al circolo: ma se uno, ò più lati non toccassero il circolo, benche lo toccassero gli altri, non si direbbe circoscritta al circolo.



V.

Il circolo si dice essere iscritto nella figura rettilinea, quando tocca tutti i lati della figura circoscritta.

Com'apparisce nel circolo F G H I K, che tocca tutti i lati della figura rettilinea ABCDE, che gli è circoscritta.

VI.

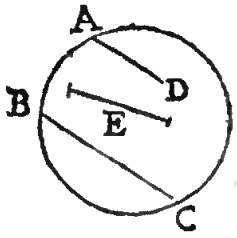
Il circolo si dice essere circoscritto intorno alla figura rettilinea, quando la circonferenza tocca tutti gli angoli della figura iscritta.

Cioè il circolo ABCDEF, che con la sua circonferenza tocca tutti gli angoli della figura interna, si dice essere circoscritto alla figura interna. figura della 3. defin.

VII.

La linea retta si dice essere addattata nel circolo, quando concorre con tutti due gli estremi nella circonferenza del circolo, al quale è addattata.

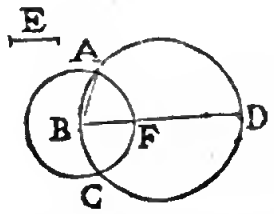
Nel circolo ABC la retta E, che con i suoi estremi in modo alcuno non concorre cõ la circonferẽza del circolo, e la retta AD, che concorre col solo estremo A, non si dice addattata nel circolo; mà la retta BC, che concorre con ambidue gli estremi B, & C con la circonferenza del circolo, si dice essere addattata nel circolo ABC.



PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Dato vn circolo, ed vna retta linea, che non sia maggiore del diametro, addattare nel dato circolo vna retta linea vguale alla retta data.

Sia il dato circolo A B C D, e la retta linea data sia E, si vuole nel circolo ABCD addattare vna retta linea vguale alla retta data E: è necessario però, che la data retta linea E non sia maggiore del diametro.



Nel circolo ABCD si troui il diametro B D [a]; se il diametro BD è vguale alla retta data, sarà BD la retta addattata, vguale alla retta E; Se il diametro BD è maggiore della retta E, dal diametro BD si tagli la parte BF [b] vguale alla retta E; fatto centro in B, coll'interuallo BF, [c] si descriua il circolo CFA, il quale segarà il primo, come in A, & C; dal pũto A al punto B [d] si tiri la retta AB. Dico che la retta AB è addattata nel circolo ABC, ed è vguale alla data retta E.

Perche il punto B è centro del circolo CFA, sarà BA [e] vguale alla retta BF; ma la retta E, per costruttione, è vguale alla medesima retta BF; sarà la retta BA [f] vguale alla retta E; e perche i punti A, & B sono nella circonferenza del circolo ABC; sarà la retta AB addattata al circolo ABC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 1. del 3.

b 3. del 1.
c 3. postul.
d 1. postul.

e 15. defin. del 1.

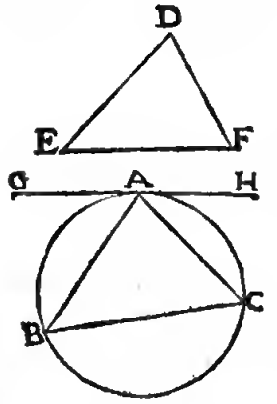
f 1. assioma.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

In vn dato circolo iscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

Sia

Sia dato il circolo A B C, ed il triangolo DEF; nel circolo ABC si vuole iscriuere vn triangolo equiangolo al triangolo DEF.



Si tiri la retta GH, [a] che tocchi il circolo ABC in qualche punto A; nel punto A, sopra la retta AG, [b] si costituisca l'angolo GAB vguale all' angolo F; e nel medesimo punto A, sopra la retta AH, si costituisca l'angolo H A C vguale all'angolo E. Perche gli angoli HAC, GAB, sono vguali à i due angoli E, ed F, e li due angoli E, ed F, [c] sono minori di due angoli retti; li due angoli HAC, G A B, sono minori di due angoli retti; mà i tre angoli HAC, CAB, BAG [d] sono vguali à due angoli retti: perciò i due angoli H A C, G A B, sono minori di due angoli retti, per quanto è l'angolo CAB, che s'interpone; e perciò la retta AC, non cade nello spatio GAB, ne la retta AB cade nello spatio C A H: si prolunghino dunque le rette AC, AB fino alla circonferenza, come in B, & C, e si tiri la retta BC. Dico, ch'il triangolo ABC è equiangolo al triangolo DEF.

a 17. del 3.
b 23. del 1.
c 17. del 1.
d 32. del 1.

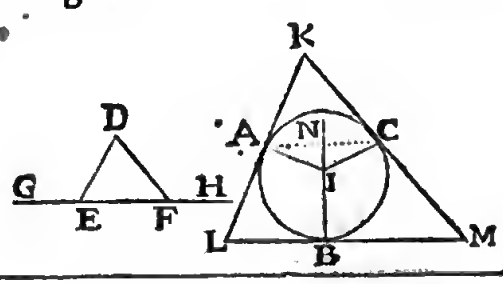
Perche la retta GA, per costruttione, tocca il circolo nel punto A, e la retta AB sega il medesimo circolo; l'angolo GAB, [e] contenuto dalla tangente GA, e dalla segante AB, è vguale all'angolo ACB nell' alterna portione; ma l'angolo GAB è vguale per costruttione all' angolo F, sarà l'angolo ACB [f] vguale all'angolo F. Similmente la retta HA tocca il circolo nel punto A, la tetta AC lo sega; l'angolo dunque HAC [g] è vguale all'angolo ABC nell'alterna portione; ma l'angolo HAC è fatto vguale all'angolo E, sarà l'angolo ABC [h] vguale all'angolo E. Finalmente ne i triangoli DEF, ABC, i due angoli E, ed F, sono vguali à i due ABC, ACB, ed il rimanente angolo D [K] sarà vguale al rimanente angolo BAC. Per la qual cosa nel circolo A B C è iscritto il triangolo A B C; equiangolo al triangolo DEF, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 32. del 3.
f 1. assioma.
g 32. del 3.
h 1. assioma.
K 32. del 1.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

Intorno ad vn dato circolo circoscriuere vn triangolo equiangolo ad vn dato triangolo.

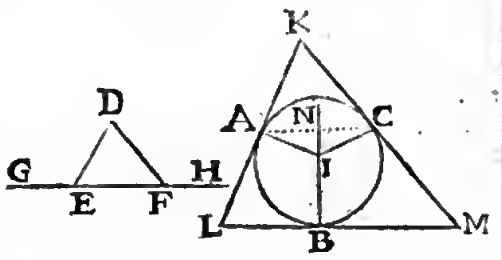
Sia dato il circolo ABC intorno al quale s'habbia à circoscriuere vn triangolo equiangolo al dato triangolo DEF: si continui il lato E F [a] verso G, & H; si troui il centro del circolo ABC, [b] che sia il punto I, dal quale si tiri



a 2. post.
b 1. del 3.

qua-

c 23. del 1. qualunque ſemidiametro A I ; nel punto I ſopra la retta A I, c ſi coſtituiſca l'angolo AIB vguale all'angolo eſterno DEG ; e nel punto I, ſo-
d 25. del 1. pra la retta BI, d ſi ponga l'angolo BIC, vguale all'angolo eſterno DFH;
e 11. del 1. ne i punti A, B, C, ſopra le rette AI, IB, IC, e ſi eriggano rette perpendicolari, cioè AK ſopra la retta AI, la retta KC perpendicolare ad IC, e la retta BM, perpendicolare ad IB ; ſi prolunghino dall'vna, e l'altra
f 13. del 1. parte, e ſi continui BI verſo N. Perche i due angoli CIB, CIN f ſono vguali à due angoli retti, e li due angoli DFH, DFE ſono vguali à due
g 1. aſſiom. angoli retti ; li due angoli CIB, CIN, ſaranno vguali g à i due DFH, DFE ; ma l'angolo BIC è vguale all'angolo DFH ; ſarà l'angolo CIN vguale all'angolo D F E. Conſiderando i due angoli A I B, A I N, e li due D E G, D E F, ſi dimoſtrarà nell'iſteſſo modo, che l'angolo DEF è vguale all'angolo A I N ; dalche li due angoli D F E, D E F ſono
h 17. del 1. vguali à i due A I N, C I N : ma i due angoli D E F, D F E ſono h minori di due angoli retti, perciò i due A I N, C I N ſono minori di due
K 14. del 1. angoli retti ; dalche K le rette C I, I A, non coſtituiſcono vna ſola retta linea, ma contengono l'angolo CIA ; ſi tiri la retta AC, quella caderà frà i punti I, & K, e ſegarà gli angoli KCI, KAI. E perche gli angoli KCI, KAI ſono retti, i due angoli KCA, KAC ſaranno minori di due angoli retti, e per lo Scolio dopo la 31. propoſitione del 1. le rette AK, CK continuate concorrono in qualche punto K. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette KM, LM, concorrono in qualche punto M ; e che i lati M L, KL, concorrono in qualche punto L.



Nel quadrilatero LAIB, i due angoli LBI, LAI ſono per coſtruttione retti, ma tutti li quattro angoli del quadrilatero, per lo Scolio alla 32. propoſitione del primo, ſono vguali à quattro angoli retti, li due angoli AIB, ALB ſarāno vguali à due angoli retti ; e perche li due angoli DEG, l 13. del 1. DEF l ſono vguali à due angoli retti ; li due angoli DEG, DEF ſaranno
m 1. aſſiom. vguali m à i due AIB, ALB ; ſe ne leuino gli vguali angoli AIB, DEG,
n 3. aſſiom. reſta l'angolo L, n vguale all'angolo DEF. Nel quadrilatero I B M C, gli angoli MCI, MBI ſono per coſtruttione retti ; dalche i due C M B,
o 13. del 1. CIB ſono vguali à due angoli retti : E perche i due angoli DFH, DFE o ſono vguali à due retti, i due angoli dunque BIC, BMC ſono vguali à i due angoli DFH, DFE ; ſe ne leuino gli vguali angoli DFH, BIC reſta
p 3. aſſioma. l'angolo M p vguale all'angolo DFE. Ne i triangoli KLM, DEF, i due angoli DEF, DFE ſono vguali à i due M, ed L, ed il rimanente angolo
q 32. del 1. D q ſarà vguale al reſtante angolo K ; per la qual coſa i triangoli DEF, KLM ſono equiangoli. Finalmente perche le rette IC, IA, IB fanno, per coſtruttione, angoli retti con le rette MK, KL, LM, per il Corollario alla 16. propoſitione del 3. Libro, i lati KL, KM, LM toccano il cīrcolo ne i punti A, B, C. Per la qual coſa intorno al circolo ABC s'è circoſcritto

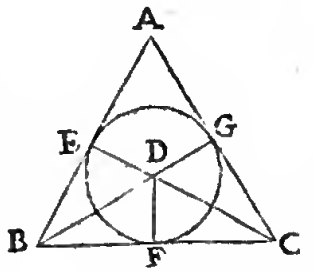
il

il triangolo KLM, equiangolo al dato triangolo DEF, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA IV. PROPOSITONE IV.

Dentro d'vn dato triangolo iscriuere vn circolo.

Sia il dato triangolo A B C, dentro del quale s'habbia ad iscriuere vn circolo.



Si diuidano gli angoli B, & C [a] in due parti vguali con le rette BD, C D, le quali concorreranno in qualche punto D; dal punto D à i lati del triangolo si facciano cadere [b] le perpendicolari DE, DF, DG; fatto centro in D, coll'interuallo DE, ouero DF, ouero DG, [c] si descriua il circolo EFG. Dico che il Circolo EFG è iscritto dentro del triangolo ABC.

[a] 9. del 1.

[b] 12. del 1.

[c] 3. postul.

Perche gli angoli DGC, DFC sono retti, e gli angoli DCG, D C F, per costruttione, sono frà di loro vguali, saranno i due angoli D G C, DCG, del triangolo DGC, vguali a i due angoli DFC, DCF, del triangolo DFC; il lato DC è commune, sarà il lato FC [d] vguale al lato CG, ed il lato DG vguale al lato DF. Similmente gli angoli DFB, DEB sono retti, gli angoli DBF, DBE sono frà di loro vguali; saranno i due angoli DFB, DBF, del triangolo DFB vguali à i due angoli DEB, DBE, del triangolo DEB; il lato B D è commune, sarà il lato BF [e] vguale al lato BE, ed il lato ED vguale al lato DF; mà il lato DF fù dimostrato vguale al lato DG, le tre rette DE, D F, D G [f] sono frà di loro vguali, ed il punto D sarà il centro del circolo, che passa per i punti F, G, E. Inoltre, perche i semidiametri DF, DG, DE fanno, per costruttione angoli retti con i lati del triangolo; perciò i lati AB, BC, C A, [g] toccano il circolo ne i punti E, F, G. Per la qual cosa dentro del triangolo A B C s'è iscritto il circolo EFG, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

[d] 26. del 1.

[e] 26. del 1.

[f] 1. assioma.

[g] Corollario alla 6. del 1.

SCOLIO.

Accioche si sappia di quanto due lati d'vn triangolo superano il terzo, Gio: Battista Benedetti fece il seguente Theorema.

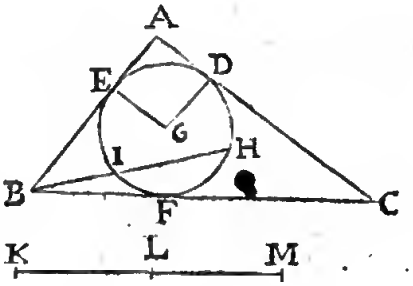
Se dentro à qualunque triangolo sia iscritto vn circolo, e da vn angolo del triangolo sia tirata vna retta fino al concauo della circonferenza; i due lati, che contengono l'angolo, dal quale è stata tirata la retta, che sega il circolo, sono maggiori del terzo lato per vna retta, il di cui qua-

drato

drato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalla retta, che ſega il circolo, e dalla parte eſterna.

Sia iſcritto il circolo EFD dentro à qualunque triangolo ABC, e da vno de gli angoli, come B, ſia tirata la retta BH, che ſeghi il circolo in qualſiuoglia modo, come in H, ed I. Dico che i lati AB, BC ſono maggiori del lato AC, per vna retta, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI.

a 3. del 1. *Si faccia KL [a] vguale ad EB, ed LM vguale ad FB; ſarà tutta KM vguale alle due BE, BF. In oltre, perche le due BE, BF toccano il circolo in E, ed F, per il ſecondo Corollario alla 36. propoſitione del terzo, le rette BE, BF ſono frà di loro vguali. Per iſteſſa ragione EA è vguale ad AD, e la retta DC è vguale alla retta CF. Hor eſſendo BE vguale à BF, ſarà KL vguale ad LM, ed il*



b Scolio alla 4. prop. del 2 *quadrato di KM ſarà [b] il quadruplo del quadrato di LM; mà LM è vguale ad FB; il quadrato dunque di KM ſarà il quadruplo del quadrato di BF.*

c 36. del 3. *E perche il quadrato di BF [c] è vguale al rettangolo contenuto dalle rette HB, BI; ſarà il quadrato di KM il quadruplo rettangolo cõtenuto dalle rette HB, BI; dal che il quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI ſarà vguale al quadrato di KM; ſuppoſto queſto. Perche CF è vguale à CD, ed AD vguale ad AE; ſe alla retta CF s'aggiunge la retta AE, ed alla retta CD*

d 2. aſſioma. *s'aggiunge la retta AD, ne vengono le due CF, AE inſieme, [d] vguali alla retta AC: per la qual coſa i lati AB, BC ſuperano il lato AC per la quantità delle rette BF, BE, cioè per la quantità KM: mà il quadrato di KM è dimoſtrato vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, i lati dunque AB, BC ſuperano il lato AC per quanto è la retta KM, il di cui quadrato è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle rette HB, BI, ch'era da dimoſtrarſi.*

COROLLARIO I.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che i lati AB, BC ſuperano il lato AC, per la retta vguale alle due tangenti BE, BF, cioè vguale al doppio di BE, ouero di BF. E per l'iſteſſa ragione i lati AB, AC ſuperano il lato BC per il doppio di AE, ouero AD, ed i lati AC, CB ſuperano il lato AB per il doppio della retta CD, ouero CF.

COROLLARIO II.

Appare da quel, che s'è detto, che ſe l'angolo B A C è retto, i lati A B, A C ſuperano il lato C B per quanto è il diametro del circolo; ſtante che eſſendo gli angoli in D, ed A retti, i lati DG, AE ſaranno [e] paralleli: parimente eſſendo gli angoli in A, & E retti, i lati EG, AD ſaranno paralleli; e perciò il quadrilatero EG DA [f] ſarà parallelogrammo, ed i lati oppoſti AD, EG, ouero AE, DG, [g] ſono frà di loro vguali; ſi che i due lati E G, G D ſono vguali à i due AD, A E; mà i due D G, G E ſono vguali al diametro del circolo E D F; però i due A D, A E ſono vguali al diametro del detto circolo.

e 28.del 1.
f 35. del 1.
g 34.del 1.

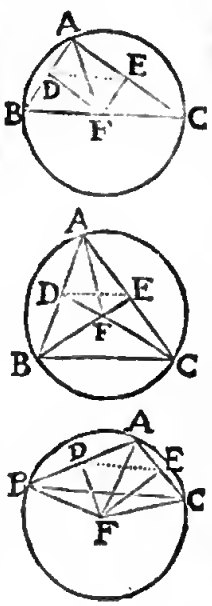
PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Intorno ad vn dato triangolo circoſcriuere vn circolo.

Sia dato il triangolo ABC, intorno al quale s'habbia da circoſcriuere vn circolo.

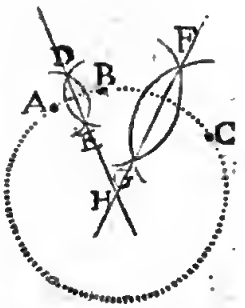
Si diuidano due qualunque lati AB, A C [a] in due parti vguali in D, ed E; ne i punti D, ed E [b] ſi pongano le rette EF, DF ad angoli retti con i lati A C, A B; ſi tiri la retta DE. Perche gli angoli AEF, A D F ſono retti, detrattone gli angoli AED, ADE; reſtano gli angoli F E D, F D E minori di due angoli retti; e per lo Scolio alla 31.propoſitione del primo, le rette EF, D F continuate concorrono in qualche punto F; ſi tirino le rette FA, FC, FB; e fatto centro in F, [c] coll'interuallo FA, ouero FB, ouero FC, ſi deſcriua il circolo CAB. Dico ch'il circolo CAB è circoſcritto al dato triangolo ABC.

Ne i triangoli FDA, FDB, i due lati AD, DF ſono vguali à i due BD, DF; gli angoli in D ſono retti, ſarà la baſe FA [d] vguale alla baſe BF. Similmente ne i triangoli FEA, FEC, i due lati AE, EF ſono vguali à i due lati CE, EF; gli angoli in E ſono retti, ſarà la baſe F C vguale alla baſe A F: mà AF fù dimoſtrata vguale ad FB, le tre rette FB, FA, FC [e] ſono frà di loro vguali, ed il circolo deſcritto intorno al centro F paſſa per li punti B, A, C; dalche è circoſcritto il circolo BAC intorno al dato triangolo, ch'era da farſi; e dimoſtrarſi.



a 10.del 1.
b 11.del 1.
c 3.poſtul.
d 4. del 1.
e 1.aſſiom.

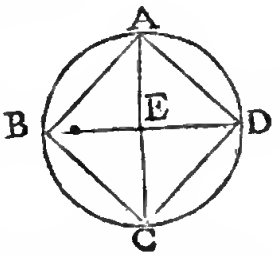
SCOLIO.



Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo, come ſi poſſa far paſſare vna circonferenza di circolo per tre punti dati, che non ſiano in vna medeſima retta linea. Per eſſempio: ſiano i dati punti A, B, C, che non ſiano in vna medeſima retta linea, per i quali ſi voglia far paſſare vna circonferenza di circolo. Si prendano i tre punti A, B, C come angoli del triangolo BAC, e per l'antecedente propoſitione, intorno al triangolo ABC ſi circoſcriua il circolo C B A: e per operare con breuità, ſi faccia centro in C, & B, e con qualunque interuallo ſi deſcriuano gli archi F G, i quali s'interſegaranno in F, & G. Di nuouo fatto centro in B, & A, e con qualunque interuallo, ſi deſcriuano gli archi D E, i quali ſi ſegaranno in D, ed E; per l'interſegationi D, E, ſi faccia paſſare la retta DE, come anco per le interſegationi F, & G, ſi faccia paſſare la retta FGH; quelle concorreranno in qualche punto H. Si faccia centro in H, coll'interuallo HB, ouero HA, ouero HC, ſi deſcriua vn circolo, il quale, per la dimoſtratione antecedente, paſſarà per li tre punti A, B, C, come s'è detto.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE VI.

In vn dato circolo iſcriuere vn quadrato.



Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, nel quale s' habbia da iſcriuere vn quadrato. Si tirino due diametri, come A C, B D, che ſi ſeghino ſcambieuolmente ad angoli retti nel centro E; e ſi congiunghino gli eſtremi [a] con le rette AB, BC, C D, D A. Dico ch'il quadrilatero ABCD è il quadrato iſcritto nel circolo ABCD. Perche gli angoli nel centro E ſono retti, perciò ſono frà di loro vguali, e gli archi oppoſti AB, B C, C D, D A [b] ſono frà di loro vguali: mà gli vguali archi ſono [c] ſotteſi da rette linee vguali; le rette linee dunque AB, BC, CD, DA ſono frà di loro vguali. Finalmente perche le rette AC; BD per coſtruttione ſono diametri del circolo, perciò ogn'vna delle portioni BCD, CDA, DAB, ABC, ſarà mezzo circolo; mà l'angolo [d] nel mezzo circolo è retto, ſaranno gli angoli ABC, BCD, CDA, D A B retti; ed il quadrilatero A B C D ſarà [e] quadrato. Per la qual coſa nel circolo ABCD s'è iſcritto il quadrato A B C D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 1. poſtul.
b 2. del 1.
c 29. del 3.
d 31. del 3.
e 29. defin. del primo.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE VII.

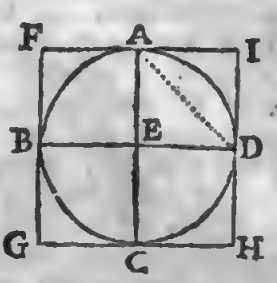
Intorno ad vn dato circolo circoſcriuere vn quadrato.

Sia

Sia dato il circolo ABCD, il di cui centro E, intorno al quale s'habbia da circoscriuere vn quadrato.

Nel dato circolo si tirino due diametri, come AC, BD, i quali si seghino ad angoli retti nel centro E; per li punti A, B, C, D, si facciano passare le rette FG, GH, HI, IF, [a] che facciano angoli retti con i diametri AC, BD, si tiri la retta AD. Perche gli angoli EDI, EAE sono retti, detrattone i due angoli EDA, EAD, restano i due angoli IDA, IAD, minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propositione del primo, le rette HI, FI, continuate concorrono in qualche punto I. Nell'istesso modo si proverà, che continuate l'altre rette, IH, GH, GF, concorreranno come in H, G, ed F. Dico ch'il quadrilatero FGHI è il quadrato circoscritto al circolo ABCD.

[a] 11. del 1.



Perche gli angoli in B, & E, per costruttione sono retti, saranno le rette FG, AC, [b] frà di loro parallele. Similmente essendo gli angoli in E, & D retti, la retta IH sarà parallela ad AC, dal che le rette FG, IH sono frà di loro parallele. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette FI, BD, GH sono frà di loro parallele; e perciò il quadrilatero FGHI, [c] sarà parallelogrammo, e sarà FG [d] vguale ad HI, ed il lato FI vguale al lato GH. Inoltre perche FG è parallela ad AC, e la retta FA è parallela à GC, sarà il quadrilatero FGCA [e] parallelogrammo, ed il lato FG [f] sarà vguale ad AC. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'il quadrilatero BGHD è parallelogrammo, ed il lato GH è vguale à BD. Mà i diametri AC, BD sono frà di loro vguali, i lati dunque FG, GH sono frà di loro vguali: fù dimostrato il lato GH vguale ad FI; ed il lato FG vguale ad IH, i quattro lati FG, GH, HI, IF [g] saranno frà di loro vguali. Finalmente perche le rette FG, AC sono frà di loro parallele, gli angoli CAF, GFA [h] sono vguali à due angoli retti, e gli angoli FGC, ACG sono vguali à due angoli retti: mà gli angoli FAC, GCA sono retti; gli angoli dunque [K] in F, & G sono ancora retti. Nel parallelogrammo FGHI l'angolo F è vguale all'angolo opposto H, e l'angolo G vguale all'opposto I; mà gli angoli in F, & G sono retti, in conseguenza gli angoli in H, & I saranno retti; e perciò il quadrilatero FGHI [l] sarà quadrato. E perche i lati FG, GH, HI, IF fanno angoli retti con i diametri AC, BD, per il Corollario alla 16. propositione di questo, tutti toccano il circolo, ed il quadrato FGHI è circoscritto al circolo ABCD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

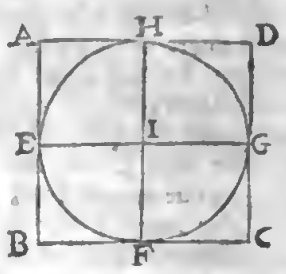
[b] 28. del 1.
[c] 35. defin. del primo.
[d] 34. del 1.
[e] 35. defin. del primo.
[f] 34. del 1.
[g] 1. assiom.
[h] 29. del 1.
[K] 34. del 1.
[l] 29. defin. del primo.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Dentro d'vn dato quadrato iscriuere vn circolo.

Sia il dato quadrato ABCD, nel quale si voglia iscriuere il circolo.

Si diuidano tutti quattro i lati del quadrato [a] in due parti vguali in H, E, F, G; si congiungano i punti oppoſti [b] con le rette EG, HF, le quali ſi ſegaranno in qualche punto I; fatto centro nell'punto I, coll'interuallo d'vna delle rette IE, IF, IG, IH, [c] ſi deſcriua il circolo HEFG. Perche i lati AB, DC ſono vguali, e paralleli, le loro meta, cioè EB, GC, ſono frà di loro vguali, e parallele; dal che le rette EG, BC [d] ſono frà di loro vguali, e parallele. Nell iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette AD, EG ſono vguali, e parallele: e ſimilmente che le rette AB, HF, come ancora DC, HF, ſono vguali, e parallele; e perciò i quadrilateri ID, IA, IB, IC, [e] ſono parallelogrammi, e ſarà IF [f] vguale ad EB, ed il lato IE vguale ad FB; come anco IG vguale ad HD, ed il lato HI vguale à GD. Mà le rette EB, BF, HD, DG ſono frà di loro vguali, ſtante che ſono metà de i lati del quadrato ABCD; ſaranno le rette IE, IF, IG, IH frà di loro vguali: dal che il circolo EFGH deſcritto intorno al centro I, paſſa per li punti F, G, H, I. Finalmente perche le rette AB, HF, ſono parallele, gli angoli HFB, ABF [g] ſono vguali à due angoli retti; mà l'angolo in B è retto, ſarà l'angolo in F retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli angoli in G, H, E ſono retti; e perciò i lati AB, BC, CD, DA, [h] toccano il circolo ne i punti E, F, G, H. Per la qual coſa il circolo HEFG è iſcritto nel quadrato ABCD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



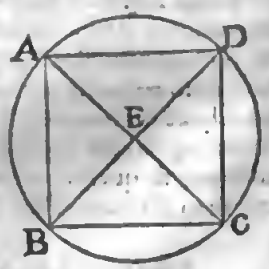
a 10. del 1.
b 1. poſtul
c 3. poſt.
d 33. del 1.
e 35. defin del primo
f 34. del 1.
g 29. del 1.
h Corollario alla 16. propoſitione del 3.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE IX.

Intorno ad vn dato quadrato circoſcriuere vn circolo.

Sia dato il quadrato ABCD, intorno al quale ſi vuole circoſcriuere vn circolo.

Si tirino i diametri AC, BD, i quali ſi ſegaranno in qualche punto E. Perche il quadrilatero ABCD è quadrato, perciò il lato AB [a] è vguale al lato AD, il triangolo ABD è iſoſcele, e gli angoli ABD, ADB [b] ſono frà di loro vguali; mà l'angolo BAD è retto, ogn'vno de'i due angoli dunque ABD, ADB è la metà d'vn'angolo retto, & ogn'vno de i rimanenti angoli CBD, CDB ſarà la metà d'vn' angolo retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vno de gli angoli BCA, BAC, ouero DCA, DAC, è la metà d'vn angolo retto; e perciò tutti ſono frà di loro vguali. Hor eſſendo gli angoli EDA, EAD frà di loro vguali, ſarà il lato EA [c] vguale al lato ED. Similmente perche gli angoli EDC, ECD ſono frà di



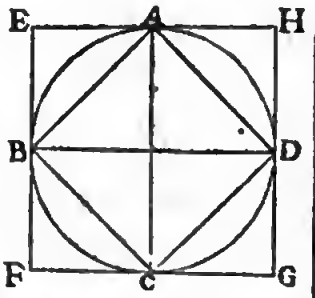
a 29. defin. del primo.
b 5. del 1.
c 6. del 1.

loro

di loro vguali, ſarà il lato E D vguale al lato E C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'il lato EB è vguale al lato EC, e perciò le quattro rette EB, EC, ED, EA ſono frà di loro vguali; Si che fatto centro nel punto E, e coll'interuallo EB ſi deſcriua il circolo A B C D; quello paſſarà per li punti A, B, C, D; e coſi ſarà circoſcritto il circolo ABCD intorno al dato quadrato, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

SCOLIO DEL CLAVIO.

Se nel circolo è iſcritto, e circoſcritto il quadrato; quello, ch'è circoſcritto, è il doppio dell'iſcritto.

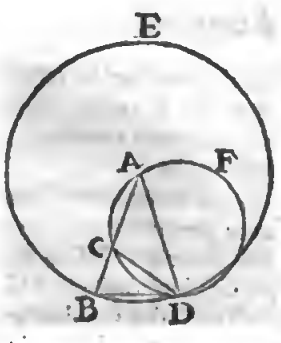


Sia il quadrato iſcritto nel circolo, il notato ABCD, ſi tirino i diametri [a] *AC, BD, ed intorno al circolo ABCD ſia circoſcritto* [b] *il quadrato EFGH in modo, che tocchi il circolo ne i punti A, B, C, D, farà con i diametri AC, BD, angoli retti, e perciò AC* [c] *ſarà parallela ad EF, dal che il quadrilatero AEFC ſarà parallelogrammo, ed il lato AC* [d] *ſarà vguale ad EF. Nel triangolo CDA, angolo retto in D, il quadrato del lato AC* [e] *è vguale à i quadrati de i due lati CD, DA; ma CD, come lato del quadrato iſcritto, è vguale ad AD; ſarà il quadrato di AC il doppio del quadrato di CD, cioè del quadrato iſcritto A B C D. Fù dimoſtrato il lato AC vguale ad EF, ſarà il quadrato di EF, cioè il quadrato circoſcritto EFGH, il doppio del quadrato iſcritto ABCD, ch'era da dimoſtrarſi.*

a 1. del. 3.
b 7. del 3.
c 18. del 1.
d 34. del 1.
e 47. del 1.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE X.

Coſtruire vn triangolo iſoſcele, del quale ciaſcun angolo ſopra la baſe ſia il doppio dell'angolo verticale.

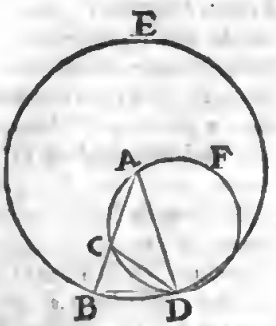


S'eſponga qualunque retta linea AB, la quale ſi diuida talmente in C, [a] *che il rettangolo contenuto da tutta, e dalla parte BC, ſia vguale al quadrato del rimanente AC; poi fatto centro in A,* [b] *coll'interuallo AB, ſi deſcriua il circolo BDE, nel quale dal punto B s'addatti la retta BD* [c] *vguale alla retta AC, e ſi tiri la retta AD. Perche le rette AB, AD, per la definitione del circolo, ſono frà di loro vguali, il triangolo A B D ſarà iſoſcele, e gli angoli A B D, ADB* [d] *ſono frà di loro vguali. Dico, che ciaſcun'angolo A D B, ABD è il doppio dell'angolo BAD. Si tiri la retta CD, ed intorno al triangolo ACD* [e] *ſi*

a 11. del 2.
b 3. poſtul.
c 1. del 4.
d 5. del 1.
e 5. del 4.

cir-

circoſcriua il circolo ACDF. Perche il rettangolo contenuto dalle rette AB, BC, per coſtruttione, è vguale al quadrato di AC, e la retta BD è poſta vguale ad AC; ſarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al quadrato della retta BD. Dal punto B, ch'è fuori del circolo CDF, ſono tirate le due rette BA, BD, delle quali la retta BD concorre col circolo CDF, la retta BA lo ſega, ed il rettangolo contenuto dalla ſegante AB, e dalla parte eſterna BC, per quel che s'è dimoſtrato, è vguale al quadrato della concorrente BD; la retta BD [f] tocca il circolo CDF nel punto D, la retta DC lo ſega, l'angolo dunque CDB, [g] contenuto dalla ſegante, e tangente, è vguale all'angolo BAD, nell'alterna portione: s'aggiunga all'vno, ed all'altro l'angolo CDA, tutto l'angolo BDA [h] ſarà vguale à i due angoli CDA, CAD. Nel triangolo CDA il lato AC è continuato verſo B, l'angolo BCD [K] eſterno è vguale à i due angoli CDA, CAD interni, ed oppoſti; ma queſti furono dimoſtrati vguali all'angolo ADB; ſarà l'angolo ADB vguale all'angolo BCD. Si diſſe l'angolo ADB eſſere vguale all'angolo ABD; gli angoli dunque DCB, DBC [l] ſono frà di loro vguali, ed il lato DC [m] ſarà vguale al lato DB: ma il lato AC, per coſtruttione, è vguale al medeſimo lato DB; perciò il lato AC [n] ſarà vguale al lato CD, e gli angoli CDA, CAD [o] ſaranno frà di loro vguali. E perche l'angolo BDC fù dimoſtrato vguale all'angolo BAD; ſarà tutto l'angolo ADB il doppio dell'angolo BAD; ma l'angolo ADB è vguale all'angolo ABD; ſarà l'angolo ABD il doppio dell'angolo A, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



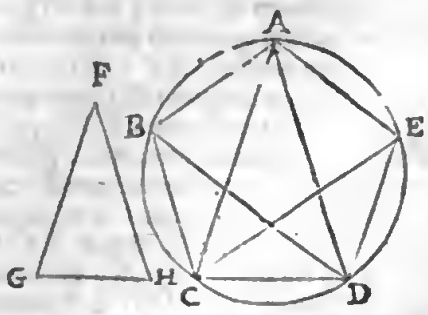
f 37. del 3.
g 32. del 3.
h 2. aſſiom.
K 3 2. del 1.
l 1. aſſiom.
m 6. del 1.
n 1. aſſiom.
o 5. del 1.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XI.

In vn dato circolo iſcriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCDE, nel quale ſi voglia iſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

Si coſtituiſca, per l'antecedente propoſitione, il triangolo iſoſcele FGH, in modo, che ciaſcun'angolo FGH, FHG ſia il doppio dell'angolo F. Poi s'iſcriua nel dato circolo il triangolo ACD [a] equiangolo al triangolo FGH; ſarà ciaſcun'



a 2. del 4.

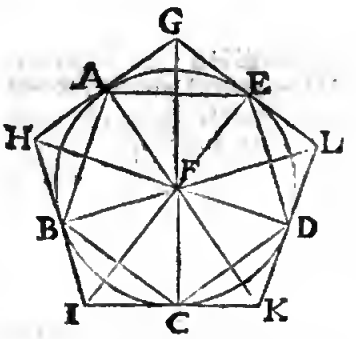
ango-

angolo ACD, ADC, il doppio dell'angolo CAD. Si diuidano gli angoli ACD, ADC [b] in due parti vguali con le rette DB, CE; i cinque angoli ACE, ECD, ADB, BDC, DAC saranno frà di loro vguali; dal che gli archi opposti DE, EA, AB, BC, CD [c] sono fra di loro vguali; ma gli archi vguali [d] sono sottesi da rette linee vguali, saranno le rette DE, EA, AB, BC, CD frà di loro vguali, ed il pentagono A B C D E sarà equilatero. In oltre, perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente s'aggiunga l'arco AED, ne viene l'arco BAED vguale all arco CDEA; ma gli archi vguali sono [e] opposti ad angoli vguali, quando sono angoli alla circonferenza del medesimo circolo, sarà l'angolo ABC vguale all'angolo BCD. Similmente perche l'arco BC è vguale all'arco ED, vgualmente s'aggiunga l'arco B A E, ne viene l'arco B A E D vguale all'arco CBAE; e perciò gli angoli BCD, CDE, che sono opposti à quegli archi vguali, [f] sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si proverà, che l'angolo EAB è vguale all'angolo ABC. Per la qual cosa nel circolo dato è iscritto il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

b 9. del 1.
c 26. del 3.
d 29. del 3.
e 27. del 3.
f 27. del 3.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XII.

Intorno ad vn dato circolo circoscriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo.

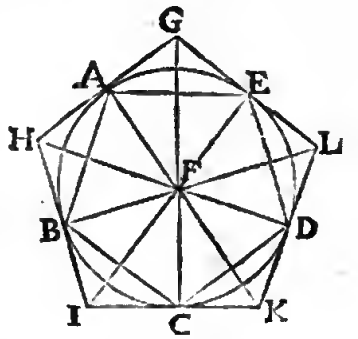


Sia il dato circolo ABCDE, il di cui centro F, intorno al quale si voglia circoscriuere vn pentagono equilatero, ed equiangolo.

S'iscriua nel circolo A B C D E, il pentagono A B C D E equilatero, & equiangolo, e dal centro F à i punti A, B, C, D, E, [b] si tirino le rette FA, FB, FC, FD, FE; per li punti A, B, C, D, E, si facciano passare le rette G H, HI, IK, KL, LG, [c] che facciano angoli retti con le rette tirate dal centro. Perche gli angoli FEG, FAG sono retti, detrattone i due angoli FEA, FAE, restano i due angoli G E A, GAE minori di due angoli retti, e per lo Scolio alla 31. propositione, continuate le rette HG, LG concorreranno in qualche punto G. Nell' istesso modo si dimostrerà, che le altre concorrono ne i punti H, I, K, L; si tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL. Perche gli angoli in A, B, C, D, E, sono retti, perciò i lati GH, HI, IK, KL, LE [d] toccano il circolo ne i punti A, B, C, D, E; e per il secondo Corollario alla 36. propositione del terzo, le tangenti HB, HA sono frà di loro vguali. E per l'istessa ragione la retta GA, è vguale ad EG; la retta LE è vguale ad LD; come ancora KD vguale alla retta KC, & IC, ad IB. Si considerino i triangoli HFA, HFB, de'quali il lato FA è vguale al lato F B, il lato F H è commune;

a 11. del 4.
b 1. po stul.
c 11. del 1.
d Corellario alla 16. del 3.

mune ; ſaranno i due lati FH, FA vguali à i due FH, FB ; la baſe HA è
e 8. del 1. vguale alla baſe HB, ſarà l'angolo AFH e vguale all'angolo BFH; e l'angolo AHF vguale all'angolo BHF; dalche l'angolo BFA ſarà il doppio dell'angolo HFA, e l'angolo BHA il doppio dell'angolo AHF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrarà, che l'angolo AFE è il doppio dell'angolo AFG, e l'angolo AGE è il doppio dell'angolo AGF. In oltre perche i lati AE, AB ſono fra di loro vguali, come lati del pentagono interno;
f 28. del 3. ſarà l'arco AE f vguale all'arco AB, e
g 27. del 3. gli angoli EFA, AFB al centro g ſono frà di loro vguali; dalche le loro metà, cioè gli angoli GFA, HFA ſono fra di loro vguali. Ne i triangoli FAG, FAH, i due angoli GFA, GAF ſono vguali à i due angoli HFA, HAF, il lato AF è commune;
h 26. del 1. ſarà il lato FG h vguale al lato FH; il lato GA vguale al lato AH; e l'angolo FGA vguale all'angolo FHA. Ma gli angoli BHA, EGA, per quel che s'è dimoſtrato, ſono il doppio degli



K 6. aſſioma. angoli vguali FGH, FHG; gli angoli dunque BHA, EGA K ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſso modo ſi dimoſtrerà, che gli altri angoli L, K, I, ognuno è vguale all'angolo G, ouero H; e perciò il pentagono GHIKL è equiangolo. In oltre, eſſendoſi dimoſtrata la retta GA vguale ad AH, ſarà GH il doppio di GA. E nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà IH eſſere il doppio di HB: ma la retta AH fù dimoſtrata vguale ad HB, ſarà il lato GH vguale al lato IH. E nell'iſteſso modo ſi dimoſtrarà, che gli altri lati GL, LK, KI, ognuno è vguale ad HG, ouero HI: e perciò ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa intorno al circolo ABCDE, s'è circoſcritto il pentagono GHIKL, equilatero, & equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

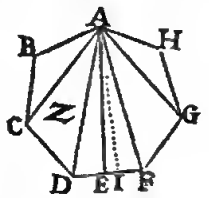
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che ſe dentro d'vn circolo ſarà iſcritta qualunque figura equilatera, & equiangola, e dal centro del circolo à gli angoli di queſta ſaranno tirate rette linee, per gli eſtremi delle quali ſi facciano paſſare rette linee, che facciano angoli retti con le medeſime tirate dal centro; quelle continuate concorreranno inſieme; e ſarà circoſcritta intorno al circolo vna figura di tanti lati vguali, ed angoli vguali, per quanti ne hà la figura iſcritta.

SCO-

SCOLIO DEL CLAVIO.

In ogni figura equilatera, & equiangola, ſe ſarà di lati di numero imparo, la retta linea tirata da vno de gli angoli, diuidendo il lato oppoſto in due parti vguali, diuiderà l'angolo in due parti vguali, e ſarà perpendicolare al lato oppoſto; e ſe diuide l'angolo in due parti vguali, diuiderà il lato oppoſto in due parti vguali, & ad angoli retti; & nella figura di lati di numero paro, la retta tirata da vn angolo all'angolo oppoſto, diuide quegli angoli in due parti vguali: e ſe la retta diuide vn angolo in due parti vguali, continuata ſegarà l'altr'angolo in due parti vguali.



Sia la figura di lati di numero imparo Z, & dall'angolo A ſia tirata la retta A E, che diuida il lato oppoſto DF in due parti vguali; e la figura di lati di numero paro ſia X, nella quale dall'angolo A all'angolo oppoſto E [a] ſia tirata la retta AE, ed ambedue le figure ſiano equilatere, ed equiangole. Dico prima, che l'angolo A è diuiſo dalla retta AE in due parti vguali, e che gli angoli AEF, AED ſono fra di loro vguali. Dall'angolo A à gli altri angoli ſi tirino le rette A G, A F, AD, AC. Perche i due lati AH, HG ſono vguali à i due lati AB, BC, e l'angolo AHG è vguale all'angolo ABC; ſarà la baſe AG [b] vguale alla baſe AC, l'angolo H A G vguale all'angolo B A C, e l'angolo H G A vguale all'angolo BCA. E perche gli angoli HGF, BCD, per ipoteſi ſono vguali, detrattone gli vguali angoli HGA, BCA, reſta l'angolo AGF [c] vguale all'angolo ACD. Ne i triangoli AFG, ADC, i due lati AG, GF ſono vguali a i due lati AC, CD, l'angolo AGF è moſtrato vguale all'angolo AC D; ſarà la baſe A F [d] vguale alla baſe AD; l'angolo G A F vguale all'angolo C A D; e l'angolo G F A vguale all'angolo CDA; che detratti da gli vguali angoli GFD, CDF, reſta l'angolo A F E [e] vguale all'angolo A D E. Similmente ne i triangoli A F E, ADE, i due lati AF, FE ſono vguali à i due lati AD, DE, l'angolo A F E è vguale all'angolo ADE, la baſe AE è commune, ſarà [f] l'angolo F A E vguale all'angolo D A E; e l'angolo F E A vguale all'angolo D E A, e tutto l'angolo E A H, [g] vguale à tutto l'angolo EAB. Per la qual coſa la retta EA, nella figura Z, diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ed è perpendicolare [h] al lato D F, ſtante che gli angoli FEA, DEA ſono vguali, cioè retti; e nella figura X la retta AE diuide gli angoli BA H, DEF in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1. poſt.

b 4. del 1.

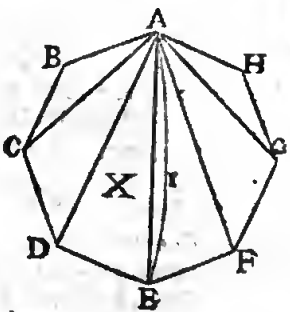
c 3. aſſiom.

d 4. del 1.

e 3. aſſioma.

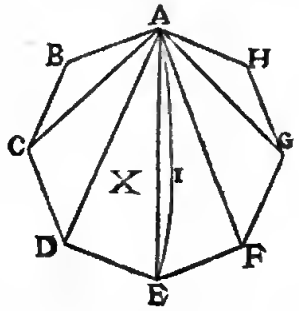
f 4. del 1.

g 1. aſſiom.



h 10. defin. del 1.

Di nuouo, ſuppoſto che la retta AE ſeghi l'angolo BAH in due parti vguali. Dico che nella figura Z diuide il lato oppoſto DF in due parti vguali, & ad angoli retti; e nella figura X diuide l'angolo DEF in due parti vguali. Se la retta AE non diuide il lato DF, ò l'angolo DEF in due parti vguali, ſi diuida il lato DF in due parti vguali, come in I, e ſi tiri la retta IA; e nella figura X ſi tiri la retta EIA. Per quel che s'è dimoſtrato, la retta IA diuide l'angolo BAH in due parti vguali, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che la retta EA diuida l'angolo BAH in due parti vguali: non dunque nella figura Z la retta IA diuide il lato DF in due parti vguali in I, mà la retta AE lo diuide in due parti vguali in E. E nella figura X, la retta AEI non ſega gli angoli DEF, BAH in due parti vguali; mà la retta AE, che ſega l'angolo BAH in due parti vguali, ſegarà ancora l'angolo DEF in due parti vguali. Nella figura Z ſi dimoſtri, come prima ſi fece, che AD è vguale ad FA; e perche i lati AE, EF ſono vguali à i due AE, ED, e la baſe AF è vguale alla baſe AD, ſarà l'angolo AEF K *vguale all'angolo AED; e perciò la retta AE è perpendicolare al lato DF, ch'era da dimoſtrarſi.*



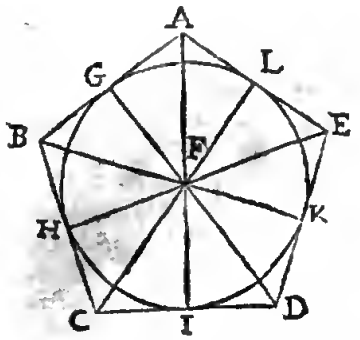
K 8. del 1.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

In vn dato pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcriuere vn circolo.

Sia dato il pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, nel quale s'habbia ad iſcriuere vn circolo.

Si diuidano due angoli proſſimi, come i due CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF; per l'antecedente Scolio, le rette AF, BF continuate ſegano i lati oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegaranno ſcambieuolmente in qualche punto F; ſi tirino le rette FE, FD, FC, e ſi conſiderino i due triangoli ABF, AEF, de' quali i due lati EA, AF ſono vguali alli due lati BA, AF; l'angolo EAF è vguale, per coſtruttione all'angolo BAF; ſarà la baſe FB [b] vguale alla baſe FE, e l'angolo AEF vguale all'angolo ABF. Dagli vguali angoli AED, ABC ſe ne leuino gli vguali angoli AEF, ABF, reſta l'angolo DEF [c] vguale all'angolo CBF; mà l'angolo CBF, per coſtruttione, è la metà dell'angolo ABC; ſarà l'angolo DEF la metà dell'angolo DEA; dal che la retta FE diuide l'angolo DEA in due par-



a 9. del 1.

b 4. del 1.

c 3. aſſioma

parti vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli D, & C, in due parti vguali. Dal punto F à i lati del pentagono [d] ſi facciano cadere le perpendicolari FL, FG, FH, FI, FK. Ne i triangoli FLA, FGA, i due angoli FLA, FAL ſono vguali à i due angoli FGA, FAG, il lato AF è commune, ſarà AL [e] vguale ad AG, ed il lato FL vguale ad FG. Similmente ne i triangoli FGB, FHB, i due angoli FGB, FBG ſono vguali à i due FHB, FBH, il lato FB è commune, ſarà il lato FG vguale ad FH. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vna delle rette FI, FK è vguale ad FL, e perciò tutte le rette FL, FG, FH, FI, FK [f] ſono frà di loro vguali, ed il circolo deſcritto intorno al centro F paſſarà per li punti G, H, I, K, L. Finalmente perche i lati del pentagono fanno angoli retti con li ſemidiametri FL, FG, FH, FI, FK, per il Corollario alla 16. propoſ. del 3. toccano il circolo ne i punti G, H, I, K, L. Per la qual coſa il circolo GHIKL è iſcritto nel dato pentagono, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

d 12. del 1.

e 26. del 1.

f 1. aſſiom.

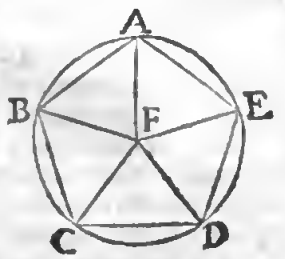
SCOLIO DEL CLAVIO.

Nell'iſteſſo modo ſi può iſcriuere vn circolo in qualunque data figura equilatera, & equiangola; cioè ſempre ſi diuidono due angoli più proſſimi in due parti vguali, ed il concorſo delle rette, che diuidono i due angoli ſi fà dentro della figura; ſtante che, in quelle di lati di numero imparo, le rette, che diuidono gli angoli in due parti vguali, per lo Scolio alla 12. propoſitione, ſegano i lati oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegano ſcambieuolmente dentro della figura; ed in quelli di lati di numero paro, le rette, che diuidono i due angoli in due parti vguali, diuidono ancora gli angoli oppoſti in due parti vguali, e perciò ſi ſegano ſcambieuolmente dentro della figura. Poi dal punto del concorſo ſi facciano cadere [a] rette linee perpendicolari à i lati della figura, & fatto centro nel detto concorſo, coll'interuallo d'vna delle dette perpendicolari, ſi deſcriua il circolo, che ſarà quello iſcritto dentro della propoſta figura.

a 12. del 1.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

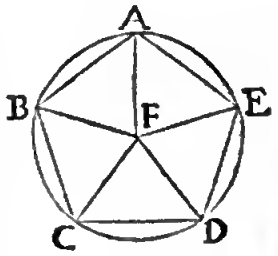
Intorno ad vn dato pentagono equilatero, & equiangolo, circoſcriuere vn circolo.



Sia il dato pentagono ABCDE equilatero, & equiangolo, intorno al quale s'habbia da circoſcriuere vn circolo. Si diuidano due angoli più proſſimi, come CBA, BAE, [a] in due parti vguali con le rette AF, BF, le quali continuate concorreranno dentro del pentagono ABCDE, ſtante che ogn'vna, ſe ſi continua, ſega il lato oppoſto in due patti vguali, come fù dimoſtrato nello Scolio alla 12. propoſ.; dal punto F ſi tirino le rette FE, FD, FC; e ſi conſiderino i due triangoli FAE, FAB, de'quali i due lati FA, AE ſono vguali à i due lati FA, AB; l'an-

a 9. del 1.

b 4. del 1. golo FAE, per coſtruttione, è vguale all'angolo FAB, ſarà la baſe F E [b] vguale alla baſe FB, e l'angolo FEA vguale all'angolo FBA. E perche gli angoli CBA, DEA ſono frà di loro vguali, e l'angolo FBA è la metà dell'angolo CBA; ſarà l'angolo FEA la metà dell'angolo DEA, e perciò la retta F E diuide l'angolo DEA in due parti vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette FD, FC diuidono gli angoli BCD, CDE in due parti vguali. Si conſiderino i triangoli ABF, FBC, de'quali i due lati AB, BF ſono vguali à i due lati CB, BF, l'angolo CBF è v-



c 4. del 1. guale all'angolo ABF, ſarà la baſe CF [c] vguale alla baſe FA. Finalmente, perche gli angoli del pentagono ABCDE ſono frà di loro

d 7. aſſiom. vguali, le loro metà [d] ſaranno frà di loro vguali; e perciò l'angolo FAB è vguale all'angolo FBA, ed il lato FA

e 6. del 1. [e] è vguale al lato FB: mà il lato FB è dimoſtrato vguale ad FE, e la retta FA vguale ad FC; le rette FE, FA, FB,

f 1. aſſioma. FC [f] ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che la retta FD è vguale ad FE; ſi che fatto centro in F,

g 3. poſtul. coll'interuallo FA, ouero FB, [g] ſi deſcriua il circolo, quello paſſarà per li punti B, C, D, E, A, e ſarà circoſcritto il circolo ABCDE, intorno al dato pentagono equilatero, & equiangolo; ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

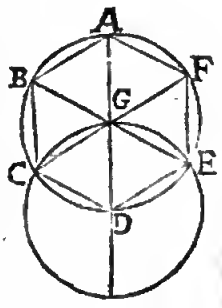
SCOLIO DEL CLAVIO.

Nell'iſteſſo modo ſi può circoſcriuere il circolo intorno à qualunque figura equilatera, ed equiangola, cioè col diuidere due angoli più proſſimi in due parti vguali, e facendo centro nel concorſo di quelle rette, che diuidono gli angoli, coll'interuallo d'vna di eſſe, ſi deſcriua il circolo, che ſarà circoſcritto intorno alla data figura equilatera, ed equiangola.

PROBLEMA XV. PROPOSITIONE XV.

Dentro d'vn dato circolo iſcriuere vn eſagono equilatero, ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABCD, il di cui centro G, dentro al quale s' habbia ad iſcriuere vn eſagono equilatero, ed equiangolo.



a 1. del 3. Si tiri [a] il diametro A D, e fatto centro in D, coll'

b 3. poſtul. interuallo DG, [b] ſi deſcriua il circolo CGE; ſegarà il dato circolo come in C, & E; ſi tirino le rette EG,

c 1. poſt. C G, [c] e ſi prolunghino [d] ſino alla circonferenza in

d 2. poſt. B, ed F; ſi tirino le rette AB, BC, CD, DE, EF, FA, e ſarà iſcritto nel daro circolo l'eſagono ABCDEF. Dico, che queſto è equilatero, ed equiangolo.

Per

Per la definitione del circolo le rette CG, GD, GE ſono frà di loro vguali; e per l'iſteſſa ragione le tre rette DC, DG, DE ſono frà di loro vguali, per la qual coſa i due triangoli GCD, GDE [c] ſono equilateri, e perciò [f] equiangoli; e perche tre angoli di qualſiuoglia triangolo ſono vguali [g] à due angoli retti, ſarà tanto l'angolo DGC, quanto l'angolo DGE, la terza parte di due angoli retti, e tutti due inſieme, cioè l'angolo CGE, ſarà le due terze parti di due angoli retti; mà i due angoli EGC, EGF [h] ſono vguali à due angoli retti, ſarà l'angolo EGF la terza parte di due angoli retti; dal che i trè angoli FGE, EGD, DGC ſono frà di loro vguali; mà gli angoli al vertice [k] ſono frà di loro vguali; li ſei angoli dunque nel centro dell'eſagono ſono frà di loro vguali, e gli archi oppoſti [l] ſono frà di loro vguali; mà gli archi vguali [m] ſono ſotteſi da rette linee vguali; ſaranno i lati AB, BC, CD, DE, EF, FA, frà di loro vguali, e l'eſagono iſcritto ſarà equilatero. Finalmente perche l'arco AB è vguale all'arco CD, vgualmente ſe gli aggiunga l'arco DEFA; tutto l'arco CDEFA [n] ſarà vguale all'arco DEFAB; e gli angoli oppoſti nella circonferenza, cioè gli angoli DCB, CBA, [o] ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli angoli dell'eſagono ABCDEF, ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa l'eſagono iſcritto ſarà equilatero, ed equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

e 23. defin. del 1.
f 5. del 1.
g 32. del 1.
h 13. del 1.
K 15. del 1.
l 26. del 3.
m 29. del 3.
n 2. aſſioma.
o 27. del 3.

COROLLARIO.

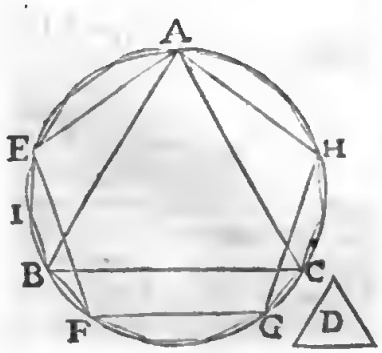
Perche DE, lato dell'eſagono, è vguale alla retta DG ſemidiametro del circolo; ſarà manifeſto, ch'il lato dell'eſagono è vguale al ſemidiametro del circolo, nel quale è iſcritto.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Nel dato circolo iſcriuere vn quindecagono equilatero ed equiangolo.

Sia il dato circolo ABC, nel quale s'habbia ad iſcriuere vn quindecagono equilatero, ed equiangolo.

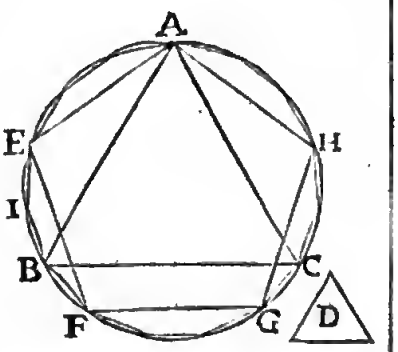
Si deſcriua [a] qualunque triangolo equilatero D, il quale per la quinta propoſitione del primo libro ſarà equiangolo; s'iſcriua nel circolo ABC [b] il triangolo ABC equiangolo al triangolo D, quello ſarà [c] equilatero; e perche rette linee vguali [d] detraggono archi vguali, ſarà l'arco ſotteſo dal lato AB, la terza parte di tutta la circonferenza del circolo, e perciò di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue eſſere quindici, la retta AB ne ſottenderà



a 1. del 1.
b 2. del 3.
c 6. del 1.
d 28. del 3.

cinque.

cinque. Di nuouo s'iſcriua nel circolo ABC [e] il pentagono equilatero, & equiangolo AEFGH in modo, che l'angolo A del pentagono termini nell'angolo A del triangolo A B C; eſſendo i cinque lati del pentagono frà di loro vguali, ſottenderanno [f] archi vguali, e perciò l'arco ſotteſo dal lato AE ſarà la quinta parte di tutta la circonferenza del circolo. Si che di quelle parti, delle quali tutta la circonferenza deue eſſere quindici, l'arco AE ne conterrà tre; mà ſi diſſe che l'arco AB, ne conteneua cinque, ſe dall'arco AB ſe ne detrae l'arco AE, reſta l'arco EB, il quale conterrà due di quelle parti: diuiſo l'arco EB [g] in due parti vguali in I, l'arco IB ſarà la decimaquinta parte di tutta la circonferenza del circolo; ſi tiri la retta IB, ſarà IB, il lato del quinto decagono; s'addattino [h] nel dato circolo altre quattordici rette linee vguali ad IB, che ſottenderanno [k] gli altri quattordici archi vguali all'arco IB; e ſarà iſcritto il quinto decagono che ſi cerca. Finalmente perche l'arco EB contiene due di quelle quindici parti, nelle quali è diuiſa tutta la circonferenza del circolo, il rimanente EACB ſarà tredici delle medeſime parti. Similmente perche IF contiene due di quelle quindici parti, il reſtante I A C F, ne conterrà tredici; perciò l'arco EACB ſarà vguale all'arco I A C F; dalche gli angoli oppoſti FBI, BIE [l] ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli altri angoli ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa nel dato circolo s'è iſcritto il quindecagono equilatero, ed equiangolo, ch'era da farſi, e dimoſtraſi.



e 11. del 4.
f 28. del 3.
g 30. del 3.
h 1. del 4.
K 28. del 3
l 27. del 3.

Fine del Quarto Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO QVINTO.

DEFINITIONI.

I.

La quantità minore ſi dice eſſer parte della maggiore, quando la minore miſura giuſtamente la maggiore.

DELLE quantità ineguali, la minore ſi dice miſurare giuſtamente la maggiore all'hora quando, diuiſa la maggiore nelle parti vguali, alla minore non ſoprauanza cos'alcuna. Come ſe ſiano eſpoſte le quantità ineguali AB, CD, del medeſimo genere, e ſia AB maggiore di CD; ſe concepiremo diuiſa la quantità AB nelle parti vguali alla quantità CD, che ſiano AE, EF, FB, e che non ſoprauanzi cos' alcuna; la quantità CD ſi dirà miſurare giuſtamente la quantità AB; ed all'incontro la quantità AB ſi dirà eſſere giuſtamente miſurata dalla minore CD. Ma ſe, oltre le parti AE, EF, FB, ſoprauanzaſſe qualche quantità minore di CD; all'hora la minore CD, non miſura giuſtamente la maggiore AB, ne la maggiore AB è miſurata giuſtamente dalla minore CD. Hor douendoſi in queſto quinto Libro fare la comparatione delle quantità riſpetto alle loro grandezze, ſpiega Euclide che coſa douremo intendere, quando nelle comparationi da farſi lui eſprime queſta voce, Parte, e dice, ch'all'hora la quantità minore comparata alla maggiore, la chiama parte, quando miſura la maggiore giuſtamente; e così la minore CD ſi chiamerà parte della maggiore AB, quando miſurerà giuſtamente la maggiore AB. Ma ſe CD non miſura giuſtamente la maggiore AB, all'hora CD non ſi chiamerà parte della maggiore AB.

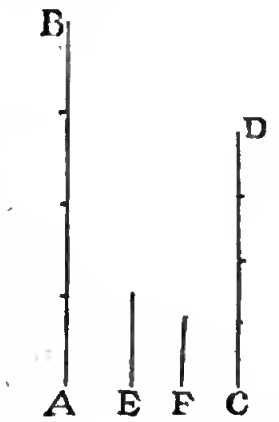
II.

La quantità maggiore ſi dice eſſere multiplice della quantità minore, quando la maggiore è miſurata giuſtamente dalla minore.

Quando ſi fà la comparatione frà due quantità ineguali, ò ſi fà la comparatione dalla minore alla maggiore, ouero dalla maggiore alla minore: facendoſi la comparatione dalla minore alla maggiore, ſe la minore miſura giuſtamente la maggiore, la minore, per la definitione antecedente, ſi dice eſſer parte della maggiore. Ma facendoſi la comparatione dalla maggiore alla minore, ſe la maggiore ſarà miſurata giuſtamente dalla minore, la maggiore ſi dirà eſſer multiplice della minore.

SCOLIO.

Le quantità, che ſono miſurate vgualmente da altretante quantità, ſi dicono eſſere vguali multiplici di quelle quantità, dalle quali ſono vgualmente miſurate.



Come ſe le quantità AB, CD foſſero miſurate vgualmente dalle quantità E, ed F, cioè che la quantità E miſuri tante volte AB, ſenza che ſoprauanzi coſ'alcuna, per quante volte la quantità F miſura CD, ſenza auanzo alcuno; in tal caſo le quantità AB, CD, ſi dicono eſſere vguali multiplici delle quantità E, ed F. Donde è manifeſto, che ſe ſaranno propoſte due, ò più quantità, come E, F, e ſi vogliano ritrouare altretante quantità, che ſiano vgualmente multiplici delle propoſte, baſta à trouare altretante quantità, come AB, CD, che ſiano vgualmente miſurate dalle propoſte E, F; e per quel, che s'è detto, le quantità AB, CD, ſaranno vgualmente multiplici delle quantità E, F; ed il medeſimo ſi farà, ſe le quantità propoſte ſaranno più di due.

III.

Proportione è la ſcambieuole relatione frà due quantità del medeſimo genere, riſpetto alle loro grandezze.

Quan-

Quando ſi fà la comparatione fra due terminate quantità del medeſimo genere, come linea à linea, ſuperficie à ſuperficie, corpo à corpo, moto à moto, tempo à tempo, tono à tono &c. in riguardo à quello, che appartiene alle loro grandezze, cioè ſecondo quello, che vna quantità è maggiore, ò vguale, ò minore dell'altra, tal relatione ſi chiama proportione. Come facendoſi la comparatione fra la quantità terminata AB, e la quantità terminata CD, del medeſimo genere, e trouandoſi, che AB ſia miſurata dalla quantità CD, verbi gratia, due volte, ſi dice ordinariamente la quantità AB eſſere il doppio della quantità CD; cioè AB riſpetto alla quantità C D è il doppio. Hor in vece di dire la relatione, che hà la quantità AB riſpetto alla quantità CD, diremo la proportione, che hà la quantità AB alla quantità CD, eſſere il doppio; di modo che quella voce proportione non eſprime altro, ſe non che quella relatione, ò reſpettiuità, ch'è fra l'vna, e l'altra quantità, eſprimendo come l'vna è maggiore, ò minore, ouero vguale all'altra.

Nota che le quantità, frà le quali ſi fa la comparatione, ſi chiamano termini della proportione; come ſe ſi farà la comparatione frà le quantità AB, CD, le medeſime AB, CD ſi chiamano termini della proportione, e la quantità AB nominata nel primo luogo, ſi chiama primo termine, ouero antecedente; e la quantità CD, nominata nel ſecondo luogo, ſi chiama ſecondo termine, ouero conſeguente. E così facendoſi la comparatione della quantità CD alla quantità AB, ſarà CD il primo termine, ò antecedente, & AB ſarà il ſecondo termine, ò conſeguente.

I V.

Analogia, ò proportionalità, è la ſimilitudine delle proportioni.

Le proportioni ſi dicono eſſere ſimili fra di loro, quando ſono fra di loro vguali, e ſi dicono ancora eſſere le medeſime; cioè l'iſteſſo è dire, la proportione, ch'è fra la quantità A, e la quantità B, è ſimile alla proportione, ch'è fra la quantità C alla quantità D; quanto è dire, la proportione della quantità A alla quantità B, è vguale alla proportione della quantità C alla quantità D; e l'iſteſſo è dire, la proportione di A à B, è la medeſima, che la proportione di C à D, ouero che A à B è come C à D. Suppoſto queſto, chiaramente ſi vede, ch'Euclide in queſta diffinitione, non hà voluto intender altro, ſe non che dare il nome alle ſimili, ò vogliamo dire, vguali proportioni, comparate fra di loro; come ſe la proportione della quantità A alla quantità B foſſe vguale alla proportione, ch'è fra la quantità C, e la quantità D. Queſta vgualità, ò ſimilitudine, che ſarebbe fra la proportione di A à B, e la proportione di C à D, ſi chiama Analogia, ouero Proportionalità.

V.

Quelle quantità ſi dicono hauere proportione frà di loro, le quali multiplicate ſi poſſono ſcambieuolmente ſuperare.

Il ſenſo di queſta definitione è, che di due quantità, multiplicandone vna ſecondo tutte le multiplicationi, ſe vno di quei multiplici ſupera l' altra quantità, diremo che quelle due quantità hanno ſcambieuolmente proportione, come ſe foſſero propoſte le quantità A, B, e ſi voglia vedere ſe hanno proportione; ſi prenda C multiplice di B, ſecondo qualunque multiplicatione; ſe la quantità C ſupera A, diremo che A, & B hanno ſcambieuolmente proportione. Se poi C non è maggiore di A; ſi prenda altro multiplice maggiore di C, come D, e ſe queſto non foſſe maggiore di A, biſogna concepirne vn altro maggiore di D, e con queſt'ordine per tutte le multiplicationi. Se in tutte le multiplicationi ſi peruerrà à qualche multiplice, che ſia maggiore di A, concluderemo, che le quantità A, B, hanno ſcambieuole proportione; ma ſe niuno degl'infinti multiplici è maggiore di A, le quantità A, B, non hauranno ſcambieuole proportione: e queſto ſia detto per modo d'eſempio; poiche queſta definitione non è fatta per trouare, ſe fra due quantità propoſte ſia, ò non ſia proportione, ſecondo il modo tenuto antecedentemente; perche eſſendo infiniti i multiplici, ſe fra due quantità non cadeſſe proportione alcuna mai ſi peruerrebbe alla notitia che fra quelle quantità non cade proportione alcuna; ma è fatta acciochè ſi concepiſca di qual natura ſiano le quantità, che hanno proportione, come ſono le quantità terminate del medeſimo genere; e di qual natura ſiano quelle, che non hanno proportione, come ſono le quantità indeterminate comparate alle terminate, e le quantità di diuerſo genere; poiche multiplicandoſi vna quantità terminata per qualunque gran multiplice, mai produrrà quantità maggiore all'indeterminata; e perciò le quantità terminate non hanno proportione all' indeterminate; ne la linea multiplicata ſecondo qualunque gran multiplice, produrrà quantità, che ſi poſſa dire maggiore di qualunque picciola ſuperficie, e così multiplicata ogni gran ſuperficie per qualunque gran multiplice, cioè preſo il multiplice d'vna ſuperficie, ſecondo qualunque gran multiplicatione, mai produrrà quantità maggiore di qualunque piccioliſſimo corpo; e così fra le coſe, che ſono di diuerſo genere non cade proportione alcuna. E di quì è manifeſta la ragione, perche Euclide nella terza definitione dice, che la proportione è la ſcambieuole relatione fra due quantità del medeſimo genere.

ANNOTATIONE.

Per render chiara, ed intelligibile la ſeguente definitione, ſtimata ſin hora oſcura, e cauata da principio remoto, premetto le ſeguenti dimoſtrationi.

PRIMA.

Se due quantità ſono miſurate giuſtamente da vn altra quantità ; ſe ſono miſurate vgualmente , ſono frà di loro vguali ; e ſe non ſono miſurate vgualmente , quella , ch'è miſurata più volte , ſarà maggiore .

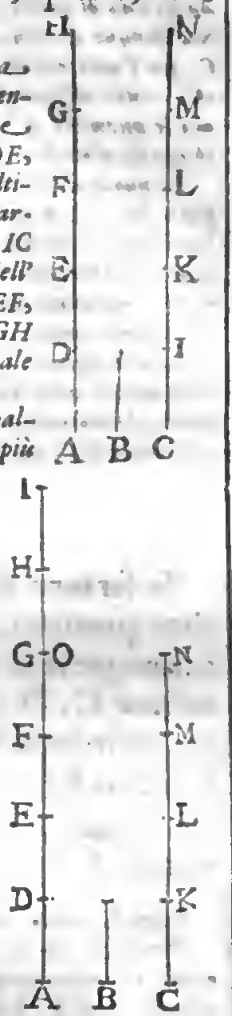
Siano le quantità A , & C miſurate giuſtamente dalla quantità B , e ſuppoſto prima , che ſiano miſurate vgualmente . Dico che A è vguale alla quantità C . Si diuidano le quantità A, & C nelle parti vguali à B, che ſiano AD, DE, EF, FG, GH ; & CI, IK, KL ; LM, MN ; ſarà la moltitudine delle parti in AH vguale alla moltitudine delle parti in CN . Hor eſſendo AD vguale alla quantità B , & IC vguale alla medeſima B , ſarà AD [a] vguale ad IC . Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà , che DE è vguale ad IK, che EF, è vguale à KL , che FG è vguale ad LM , e ſimilmente GH vguale ad MN . Per la qual coſa tutta AH [b] ſarà vguale à CN , ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo .

Di nuouo nella figura ſeguente non ſiano A , & C vgualmente miſurate dalla quantità B , mà A I ſia miſurata più volte da B di quello ch'è miſurata CN . Dico che A I è maggiore di CN .

Si diuida A nelle parti vguali à B , e ſiano quelle AD , DE, EF , FG , GH, HI ; e ſi diuida C nelle parti vguali à B , che ſiano CK, K L, L M, M N . Si prendano in AI tante parti quante neſono in CN , che ſiano quelle notate in AO . Perche tante parti ſono in A O per quante neſono in C N , le due AO , C N ſaranno miſurate vgualmente da B ; e , per quel che s'è dimoſtrato , le quantità A O , C N , ſono frà di loro vguali . E perche A I , per ipoteſi , contiene maggior numero di parti di quelle che ſono in C N , conterrà ancora maggior numero di parti di quelle , che ſono in C O . Per la qual coſa A I ſarà maggiore di A O ; mà A O è vguale à CN, ſarà AI maggiore di CN, come fù propoſto dimoſtrare .

[a] 1. aſſioma del 1.

[b] 2. aſſioma.



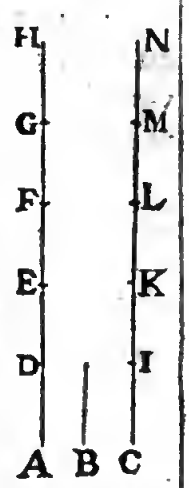
SECONDA.

Se due quantità ſono miſurate giuſtamente da vn altra quantità ; ſe quelle due ſono vguali , ſaranno miſurate vgualmente ; e ſe ſono ineguali , la maggiore ſarà miſurata più volte , che la minore .

Siano le due quantità A, & C, le quali ſiano miſurate giuſtamente dalla quantità B . Dico, che ſe ſono frà di loro vguali, ſaranno miſurate vgualmen-

te da B ; e se sono ineguali , la maggiore sarà misurata più volte da A, che la minore .

Supposto prima , che A sia vguale à C . Dico che tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata dalla medesima B . Se A, & C non sono misurate vgualmente da B, vna di quelle sarà misurata più volte , che l'altra . Sia dunque A misurata più volte di quello , ch'è misurata C ; per l'antecedente dimostratione A sarà maggiore di C, ch'è contro all'ipotesi ; non dunque A è misurata più volte, mà le quantità A , & C , sono vgualmente misurate da B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo .



Di nuouo sia A maggiore di C . Dico che A è misurata più volte da B di quello , ch'è misurata C . Se A non è misurata più volte da B di quello , ch'è misurata C , ò sarà misurata tante volte , per quante volte è misurata C ; ouero sarà misurata minori volte . Se A è misurata tante volte, per quante volte è misurata C, per l'antecedente dimostratione, sarà A vguale à C, ch'è contro all'ipotesi ; se poi A è misurata minori volte da B di quello, ch'è misurata C, per l'antecedente dimostratione , A sarà minore di C, ch'è contro all'ipotesi . Non dunque A è vguale , ne minore di C, mà sarà maggiore , ch'era da dimostrarsi .

TERZA.

Se saranno due quantità A , B , vguali multiplici di due altre quantità C , D , secondo qualunque multiplicatione ; e siano prese le quantità E , F , vguali multiplici delle medesime C , D , secondo qualunque multiplicatione . Dico , ch'in tutte l'infinite multiplicationi , se A è vguale ad E, ancora B sarà vguale ad F; se A è maggiore di E, ancora B sarà maggiore di F : e se A è minore di E, ancora B sarà minore di F .

Supposto prima , che A sia vguale ad E . Dico che B sarà vguale ad F.

Perche A , & B , per ipotesi , sono vguali multiplici delle due C, D , tante volte A è misurata da C , per quante volte B è misurata da D . Similmente essendo le due E , F vguali multiplici delle due C ; D , tante volte E sarà misurata da C , per quante volte F è misurata da D . In oltre perche A si suppone vguale ad E, per l'antecedente dimostratione , tante volte A sarà misurata da C , per quante volte E è misurata dalla medesima C ; ma la quantità A è misurata da C tante volte , per quante volte B è misurata da D , sarà B misurata da D tante volte , per quante volte E è misurata da C ; per ipotesi E è misurata da C tante volte , per quante volte F è misurata da D, sarà B misurata tante volte da D , per quante volte F è misurata da D ; e per la

pri-

prima dimoſtratione di queſto libro, ſarà B vguale ad F, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia maggiore di E. Dico che B ſarà maggiore di F.

Perche A, ed E, per ipoteſi, ſono miſurate giuſtamente da C: e ſi ſuppone A maggiore di E, per l'antecedente dimoſtratione ſarà A miſurata più volte da C di quello, ch'è miſurata E dalla medeſima C. Ma A, per ipoteſi, è miſurata tante volte da C, per quante volte B è miſurata da D; ſarà B miſurata più volte da D di quello, che E è miſurata da C. S'è moſtrato E eſſere miſurata tante volte da C, per quante volte F è miſurata da D; perciò B ſarà miſurata più volte da D di quello, ch'è miſurata F dalla medeſima D; e per la prima dimoſtratione, B ſarà maggiore di F.

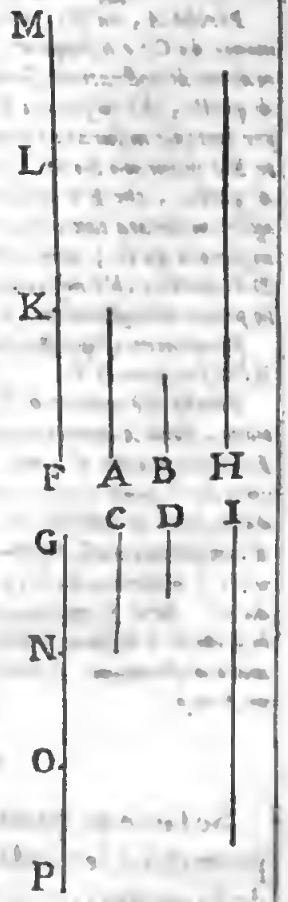
Finalmente, ſuppoſto che A ſia minore di E. Dico che B ſarà minore di F.

Perche A è minore di E, per l'antecedente dimoſtratione, ſarà A minori volte miſurata da C di quello, che E è miſurata da C; ma s'è dimoſtrato che A è miſurata da C tante volte, per quante volte B è miſurata da D; ſarà B minori volte miſurata da D, di quello che E è miſurata da C. Fù ſimilmẽte dimoſtrato eſſere tante volte E miſurata da C, per quante volte F è miſurata da D, ſarà B miſurata minori volte da D di quello, che F è miſurata dalla medeſima D; e per la prima dimoſtratione, B ſarà minore di F, ch'era da dimoſtrarſi.

QVARTA.

Se ſaranno quattro quantità, e la prima è multiplice, ò parte della ſeconda, come la terza è multiplice, o parte della quarta; preſo gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; come ancora preſo gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione. Dico che ſempre ſe il multiplice della prima è vguale al multiplice della ſeconda, ancora il multiplice della terza ſarà vguale al multiplice della quarta: ſe il multiplice della prima è maggiore del multiplice della ſeconda, ancora il multiplice della terza ſarà maggiore del multiplice della quarta; e ſe il multiplice della prima è minore del multiplice della ſeconda, ancora il

multiplice della terza ſarà minore del multiplice della quarta.



Siano le quattro quantità A, B, C, D, delle quali la prima A, e la terza C, ſiano vgualmente multiplici, ò parti della ſeconda B, e quarta D, cioè che A ſia multiplice, ò parte di B, come C è multiplice, ò parte di D; e preſo gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano F, & G: ſimilmente ſiano preſi gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano H, ed I. Dico che ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I: ſe F è maggiore di H, ancora G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I. Suppoſto prima che A, & C, ſiano vguali multiplici di B, & D.

Perche F, & G ſono vguali multiplici di A, & C, tante volte F ſarà miſurata da A, per quante volte G è miſurata da C. Si diuida la quantità F nelle parti vguali ad A, e ſiano FK, KL, LM; e ſi diuida la quantità G nelle parti vguali à C, che ſiano GN, NO, OP. Perche FK è vguale ad A, per la ſeconda dimoſtratione, tante volte FK ſarà miſurata da B, per quante volte A è miſurata dalla medeſima B. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che tante volte GN è miſurata da D, per quante volte C è miſurata dalla medeſima D. Mà la quantità A, per ipoteſi, è miſurata da B tante volte, per quante volte C è miſurata da D; ſarà FK miſurata tante volte da B, per quante volte GN è miſurata da D. In oltre perche KL, LM, ogn'vna è vguale ad FK; e le parti NO, OP ogn'vna è vguale à GN; tante volte KL ſarà miſurata da B per quante volte NO è miſurata da D; e tante volte LM ſarà miſurata da B, per quante volte OP è miſurata da D. Per la qual coſa tutta FM ſarà tante volte miſurata da B, per quante volte GP è miſurata da D; e perciò FM, GP ſono vguali multiplici delle due B, D. Mà, per ipoteſi, le due H, I, ſono vguali multiplici delle medeſime B, D; per l'antecedente dimoſtratione, ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I; ſe F è maggiore di H, anco G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I, come fù propoſto dimoſtrare.

Sia di nuouo A tal parte di B, quale C è parte di D; ſaranno le due B, & D vgualmente multiplici di A, & C; ed operandoſi come ſopra s'è fatto, ſi dimoſtrerà, che H, ed I, ſono vguali multiplici di A, & C: mà, per ipoteſi, F & G, ſono vguali multiplici delle medeſime A, & C: per l'antecedente dimo-

ſtratio-

ſtratione ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I: ſe F è maggiore di H ancora G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I. E perche F, & G ſono vguali multiplici di A, & C, ſecondo qualunque multiplicatione, ed anco H, ed I ſono vguali multiplici di B, & D, ſecondo qualunque multiplicatione; in conſeguenza in ogni multiplicatione ſempre ſuccederà, che ſe F è vguale ad H, ancora G ſarà vguale ad I: ſe F è maggiore di H, ancora G ſarà maggiore di I; e ſe F è minore di H, ancora G ſarà minore di I, ch'era da dimoſtrarſi.

V I.

All' hora di quattro quantità la prima alla ſeconda ſi dirà hauere l'iſteſſa proportione, quale hà la terza alla quarta, quando preſi gli vguali multiplici della prima, e terza quantità, ſecondo qualunque multiplicatione; ed anco preſi gli vguali multiplici, della ſeconda, e quarta quantità, ſecondo qualunque multiplicatione; il multiplice della prima, eſſendo maggiore del multiplice della ſeconda, anco il multiplice della terza ſia maggiore del multiplice della quarta. Ouero ſe il multiplice della prima è minore, ò vguale al multiplice della ſeconda, anco il multiplice della terza ſia minore, ò vguale al multiplice della quarta.

Dopo, che s'è dimoſtrato nell'annotatione, all'antecedente numero quarto, darſi in natura quattro quantità, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; e preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione; ſempre, ed in ogni multiplicatione, gli vguali multiplici della prima, e terza, ò ſono ambidue maggiori de gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta: ò ſono ambidue minori; ò ambidue vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; cioè ſe il multiplice della prima è maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della ſeconda; anco il multiplice della terza ſarà ò maggiore, ò minore, ò vguale al multiplice della quarta; non ſarà più oſcuro il concetto di queſta ſeſta definitione, ne potrà dirſi, che ſia cauata da principio remoto, per il che ſtimauano non dimoſtrate tutte le propoſitioni di queſto quinto libro. E ſe ſi diceſſe, che la dimoſtratione da me fatta milita, quando delle quattro quantità la prima, e terza ſono vgualmente multiplici, ouero vgualmente parti della ſeconda, e quarta: gli riſpondo hora per ſempre, non eſſer neceſſario dimoſtrare quali ſiano tutte le quantità, che poſſono cadere ſotto il medeſimo ſimptoma, baſtando à me hauer dimoſtrato, ch'in natura ſi danno quattro quantità, che cadono ſotto tal ſimptoma; cioè che gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, ò ſono vguali, ò ſono minori, ò maggiori, come ſopra s'è detto, de gli vguali mul-

ti-

tiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione; per poter poi definire, come fà Euclide, che quando nelle coſe ſeguenti hauremo quattro quantità, ed in qualche modo ſi proverà, che gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, ſono ambidue maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione: la proportione della prima alla ſeconda la chiameremo eſſere l'iſteſſa, ò vguale, alla proportione, ch'è dalla terza alla quarta. Ed all'incontro, quando ſi dirà la prima alla ſeconda hauere l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta, non ſi debba intendere altro, ſe non, che gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, cioè ſecondo tutte le multiplicationi, ſiano ſempre ambidue ò maggiori, ò minori, ouero vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo tutte le multiplicationi. Come per eſſempio, ſiano eſpoſte le quattro quantità A, B, C, D, e ſiano preſi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano K, F. Similmente ſiano preſi gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D ſecondo qualunque multiplicatione che ſiano le due G, & H: e proueremo in qualche modo, che ſe K è vguale à G, ancora F è vguale ad H; e ſe K è maggiore, ò minore di G, ancora F è maggiore, o minore di H; all'hora la proportione di A à B, la chiameremo eſſere la medeſima qual'è la proportione di C à D. Ed all'incontro, ſe ſupporremo, che la prima A alla ſeconda B habbia l'iſteſſa proportione, quale hà C à D, concepiremo queſta proportionalità, ò Analogia eſſere di quella natura di proportione, che gli vguali multiplici K, F, preſi ſecondo qualunque multiplicatione, ambidue ſono vguali, ò minori, ò maggiori, de gli vguali multiplici G, H, preſi parimente ſecondo qualunque multiplicatione; cioè che, ſe K è maggiore di G, ancora F è maggiore di H; e ſe K è vguale, ò minore di G, ancora F è vguale, ò minore di H.

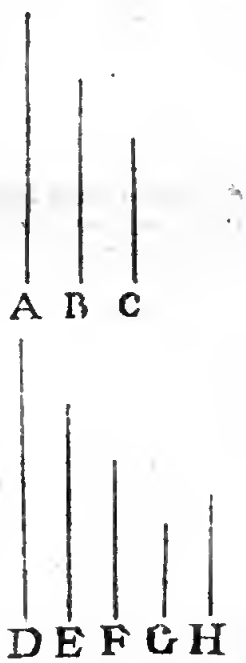
Qui è d'auertirſi, che haurei potuto prouare l'antecedente quarta dimoſtratione, ſeruendomi della terza propoſitione di queſto quinto libro, mà per non turbare in cos'alcuna l'ordine tenuto da Euclide col porre le definitioni frà le propoſitioni, mi ſono contentato dimoſtrarlo con modo poco differente à quello, che tiene Euclide in eſſa terza propoſitione. E qui mi ſi porge occaſione accennare l'artificio d'Euclide in queſta gran compoſitione, il quale in tutti queſti Elementi non s'è ſeruito d'alcun principio, che non foſſe totalmente noto, ò pure foſſe facile à dimoſtrarſi con altre propoſitioni dimoſtrate, mediante le propoſitioni poſte prima di ſeruirſi di quel princi-

pio. E perche ſimili propoſitioni, che poteuano dimoſtrare tal principio, non ſono ſtate da lui ſtimate propriamente Elementi, non t'è curato connumerarle frà le propoſitioni di queſti elementi, e ſarebbe improprio fare giuditio diuerſo d'vn tale Autore.

Deueſi notare, che l'antecedente ſeſta definitione non ſerue per conoſcere quando ſono date quattro quantità, ſe quelle ſiano nella medeſima proportione; perche il modo di conoſcere, ſe quattro date quantità habbiano l'iſteſſa proportione, ſi hauerà nella 16. propoſ. del ſeſto libro, come à ſuo luogo ſi farà noto; e queſta ſeſta definit. ſerue ſolo per ſpiegatione di quello, ch'intende Euclide, e che noi douemo intendere, quando nelle coſe ſeguenti ſi dirà la proportione della prima alla ſeconda quantità è l'iſteſſa, che la proportione della terza alla quarta quantità; e quando dalle coſe ſeguenti haueremo cauato il modo da conoſcere ſe di quattro quantità la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta, douremo concepire eſſere di quella natura di medeſima proportione, che cade ſotto le conditioni poſte da Euclide nella ſeſta definitione.

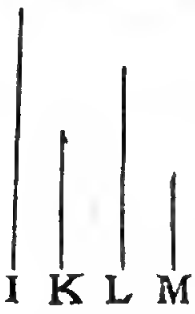
VII.

Quelle quantità, che hanno la medeſima proportione, ſi chiamano quantità proportionali.



Dopo ch'Euclide hà definita l'vgualità delle proportioni, cioè hà ſpiegato quello, che douemo intendere, quando ſi dirà due proportioni eſſere le medeſime, ò vguali, ouero ſimili; hà voluto anco dare il nome à quelle grandezze, frà le quali cadono queſte vguali proportioni. Per eſſempio ſe ſaranno tre quantità come A, B, C, e la prima A alla ſeconda B, hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la quantità B alla quantità C; le tre grandezze A, B, C ſi chiameranno quantità proportionali. Similmente ſe le quantità ſaranno più di trè, come D, E, F, G, H, e la prima D alla ſeconda E hà l'iſteſſa proportione, quale hà la quantità E ad F; e la proportione di E ad F è l'iſteſſa, che la proportione di F à G; & F à G hà l'iſteſſa proportione, quale hà G ad H; le quantità D, E, F, G, H, ſi chiamano quantità proportionali. E perche le proportioni antedette continuamente ſono le medeſime, cioè ſono vguali, tale anologia ſi chiama continua; e per l'auuenire le grandezze D, E, F, G, H ſi chiameranno quantità continue proportionali. Nota che ſe le proportioni, che cadono frà quattro grandezze, non ſono continuatamente vguali, purche la proportione, che cade frà due di quelle, ſia vguale alla proportione, ch'è frà l'altre due, quelle quattro quantità ſi dicono ancora quantità proportionali.

Come per eſempio nelle quattro quantità I, K, L, M, ſe la proportione, che hà la grandezza I alla grandezza K, ſia la medeſima, cioè vguale alla proportione, che hà L ad M; benche la proportione di K ad L, nõ ſia vguale alla proportione, di I à K, ouero di L ad M: cõ tutto ciò le quattro grandezze I, K, L, M ſi chiamano quantità proportionali; e tale analogia ſi dice diſcontinua, ſtante che non è da per tutto la medeſima. Nelle coſe ſeguenti dunque quando diremo, che quattro quantità ſono proportionali, concepiremo, che la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; e quando diremo che le quantità ſono continue proportionali, concepiremo la prima alla ſeconda eſſere come la ſeconda alla terza; e la ſeconda alla terza, come la terza alla quarta; e coſi la quarta alla quinta, e con queſt'ordine in infinito.



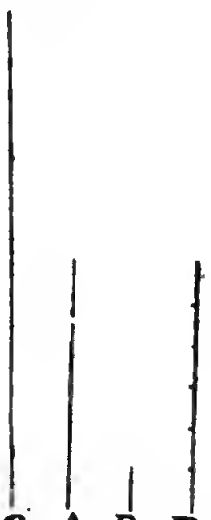
QVINTA.

E poſſibile darſi due quantità ineguali, delle quali preſo il multiplice della maggiore, ſecondo qualunque multiplicatione; e preſo il multiplice della minore, ſecondo qualche multiplicatione maggiore; il multiplice della minore ſia minore del multiplice della maggiore.

Siano eſpoſte le due quantità A, B, ineguali, delle quali A ſia maggiore di B. Dico che preſo C multiplice di A, ſecondo qualunque multiplicatione, e preſo D multiplice di B, con maggior multiplicatione di quella, che C è multiplice di A, può eſſere che D ſia minore di C.

Suppoſto prima, che A ſia vguale à D. Perche C ſi ſuppone multiplice di A, benche naſca da multiplicatione quanto ſi voglia minore, riſpetto à quella, con la quale D è multiplice di B; ſarà ſempre C miſurata più d'vna volta da A; e perciò la quantità C ſarà maggiore di A; mà, per ipoteſi, A è vguale à D, ſarà C maggiore di D.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia maggiore di D; eſſendo C multiplice di A, benche la quantità C naſca da qualſiuoglia picciola multiplicatione, per quel, che s'è detto, ſempre ſarà maggiore di A; mà per ipoteſi, A è maggiore di D, ſarà C molto maggiore della quantità D, ch'era da dimoſtrarſi.

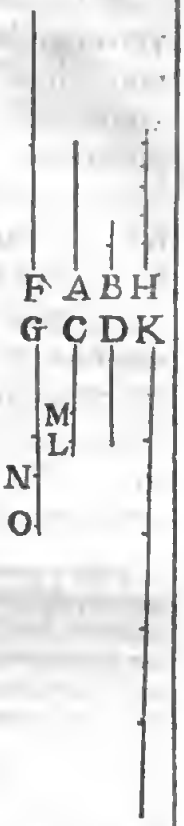


SESTA.

E poſſibile darſi quattro quantità, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima, e terza ſecondo qualunque multiplicatione; e preſi gli vguali multiplici della ſecon-

da

da, e quarta con maggior multiplicatione di prima: ſe il multiplice della prima è maggiore del multiplice della ſeconda, il multiplice della terza non ſia maggiore del multiplice della quarta.



Siano le quattro quantità A, B, CL, D, e ſia la prima A maggiore della ſeconda B, e la terza CL non ſia maggiore di D: ſiano preſi gli vguali multiplici della prima A, e terza CL, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano F, & GO; e di nuouo ſiano preſi gli vguali multiplici della ſeconda B, e della quarta D, con maggior multiplicatione di quella, con la quale F, & GO ſono vguali multiplici di A, & CL, in modo che H ſia minore di F, il che è poſſibile per l'antecedente dimoſtratione. Dico ch'eſſendo F maggiore di H la quantità GO non ſarà maggiore di K.

Suppoſto prima, che CL ſia vguale à D. Perche le quantità F, GO ſono vguali multiplici delle quantità A & CL; tante volte F ſarà miſurata da A, per quante volte GO è miſurata da CL. Similmente eſſendo H multiplice di B, come K è multiplice di D; tante volte H ſarà miſurata da B, per quante volte K è miſurata da D. In oltre perche H è multiplice di B ſecondo maggior multiplicatione di quella, con la quale F è multiplice di A; ſarà H miſurata più volte da B di quello, che F è miſurata da A. Mà ſi diſſe, che H è miſurata da B tante volte per quante volte K è miſurata da D; ſarà K miſurata più volte da D, di quello che F è miſurata da A. Fù moſtrato che F è miſurata da A tante volte, per quante volte GO è miſurata da CL; ſarà K miſurata più volte da D di quello, che GO è miſurata da CL. Mà la quantità CL è ſuppoſta vguale à D, ſarà K miſurata più volte da D, di quello, che GO è miſurata dalla medeſima D; e per la prima dimoſtratione di queſto libro, la quantità GO ſarà minore di K.

Di nuouo, ſuppoſto che la terza quantità ſia CM minore di D, e ſia preſa GN multiplice di CM, come F è multiplice di A. Si concepiſca ingrandita la quantità CM ſino ad L in modo, che ſia vguale à D. E ſia di nuouo GO multiplice di CL, come F è multiplice di A. Poi operandoſi, come prima s'è fatto, ſi dimoſtrerà GO eſſere minore di K. Finalmente eſſendo F multiplice di A, come GO è multiplice di CL; e come GN è multiplice di CM: ſarà GO multiplice di CL come GN è multiplice di CM: dal che GO ſarà miſurata tante volte da CL, per quante volte GN è miſurata da CM. Mà CL è maggiore di CM; ſarà GO maggiore di GN; ſi è moſtrata GO minore di K, in conſeguenza GN ſarà molto minore della quantità K. Per la qual coſa le quantità A, B, CL, ouero CM, & D, ſono le quattro quantità, delle quali preſi gli vguali multiplici della prima A, e terza CL, ouero CM, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano F, & GO, ouero GN; e preſi gli

vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D, con multiplicatione maggiore: Se F è maggiore di H, la quantità G non ſarà maggiore di K, ch'era da dimoſtrarſi.

V I I I.

Se ſaranno quattro quantità, delle quali ſiano preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; e ſimilmente ſiano preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione: ſe in tutte le multiplicationi non ſempre gli vguali multiplici della prima, e terza ſono tutti due (preſi ſeparatamente) maggiori de gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ò tutti due minori, ò tutti due vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; mà che in qualche multiplicatione, eſſendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della ſeconda, il multiplice della terza non ſia maggiore del multiplice della quarta: in tal caſo la prima alla ſeconda ſi dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta.

Dalla quarta, e ſeſta dimoſtratione ſi caua, che quando di quattro quantità ſono preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; e ſono preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, con qualunque multiplicatione: due caſi ſi poſſono dare, ò che in tutte le multiplicationi, ſempre gli vguali multiplici della prima, e terza ſono ambidue maggiori, ò ambidue minori, ò vero vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta: ò queſto non ſuccede ſempre in tutte le multiplicationi, mà che alcune volte, eſſendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della ſeconda, il multiplice della terza non ſia maggiore del multiplice della quarta; quanto al primo caſo, la prima ſi dirà hauere l'iſteſſa proportione alla ſeconda, quale hà la terza alla quarta, come ſi diſſe nella ſeſta definitione: e nel ſecondo caſo la prima alla ſeconda ſi dirà hauere maggior proportione, che la terza alla quarta quantità.

Da quel, che s'è detto, facilmente ſe ne caua la conuerſa, cioè, che ſe ſaranno quattro quantità, e ſi ſupporrà la prima alla ſeconda hauere maggior proportione, che la terza alla quarta, ſecondo la natura della maggior proportione poco auanti definita; preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, e preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione: in queſte infinite multiplicationi qualcheduna neceſſariamente ve ne ſarà, la quale farà, ch'eſſendo il multiplice della prima maggiore del multiplice della ſeconda, il multiplice della terza non ſarà maggiore del multiplice della quarta: perche ſe tal multi-

pli-

plice non vi foſſe, ne ſeguirebbe, ch'in tutte le multiplicationi gli vguali multipliei della prima, e terza, ò tutti due ſarebbero maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta: ed all' hora per la ſeſta definitione, la prima alla ſeconda ſi direbbe hauere l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; il che ſarebbe contro all'ipoteſi; mentre la ſuppoſitione è, che la prima alla ſeconda s'intenda hauere maggior proportione, che la terza alla quarta.

I. X.

La proportionalità non ſi può coſtituire in meno di tre termini.

Perche la proportionalità, per la quarta difinitione, è la ſimilitudine delle proportioni; ed ogni proportione ſi diſſe eſſere la ſcambieuole relatione di due termini; perciò la proportionalità, che conſta di più d'vna proportione, è neceſſario, che ſi coſtituiſca non in due termini, mà in più di due termini, mentre quella, che ſi coſtituiſce frà due ſoli termini nella terza definitione, fù chiamata proportione, e non proportionalità. Hor coſtituendoſi la proportionalità in più di due termini, non ſarà difficile à concepire, che non ſi può coſtituire in meno di tre termini. Come ſe diceſſimo, che la proportione di A à B è ſimile, ò è l'iſteſſa, che quella di B à C; doue ſi vedono due proportioni ſimili coſtituite frà i tre termini A, B, C.

X.

La proportione ſi dice eſſere compoſta d'altre proportioni, quando è generata dalla multiplicatione di quelle proportioni, dalle quali ſi dice eſſere compoſta.

In niſſun luogo hò ſtimato più corrotto il teſto d'Euclide, quanto in queſto, poiche quì dà la definitione della proportione duplicata, triplicata &c. che deriua dalla compoſitione delle proportioni, come appreſſo ſi dirà; e nel ſeſto Libro al num. 5. pone poi la definitione della compoſitione delle proportioni; le quali, perche tutte due conuengono alle proportioni vniuerſali, ancora tutte due deuono eſſer poſte in queſto quinto Libro, doue tratta delle proportioni in genere. E perche ſi potrebbe dire, ch'Euclide definiſce la compoſitione delle proportioni nel ſeſto Libro, ſtante che iui comincia à ſeruirſene; per l'iſteſſa ragione doueua ancora porre nel ſeſto Libro la definitione della proportione duplicata, triplicata &c. mentre che in niſſun altro luogo comincia à ſeruirſene, ſe non che nel ſeſto Libro. Potiamo dunque probabilmente credere, ch'il teſto ſia adulterato, non eſſendo veriſimile, che quel grand'huomo che hà dato ſi bell'ordine à queſti Elementi, haueſſe equiuocato nel collocare vna ſola definitione. Ond'io per non laſciare difettoſa queſt'opera per ſi picciola coſa, hò ſtimato bene leuare dal ſeſto Libro la quinta definitione, e reſtituirla quì,

come proprio ſuo luogo, e così diciamo, che quando vna proportione naſce dalla multiplicatione di due, ò più proportioni, quella ſi dice eſſer compoſta dalle proportioni multiplicate.

X I.

Quando le grandezze ſono continue proportionali; la prima ſi dice hauere duplicata proportione alla terza di quella, che hà alla ſeconda. Oltre à ciò la prima alla quarta ſi dice hauere triplicata proportione di quella, che hà alla ſeconda; e con queſt'ordine ſempre la prima all'vltima ſi dice hauere proportione tante volte multiplicata di quella, che hà alla ſeconda, per quanto è vno meno la moltitudine delle grandezze proportionali.

Quì è d'auuertirſi, eh' Euclide non dice, che quando trè grandezze ſono proportionali, la proportione della prima alla terza è duplicata di quella, che hà alla ſeconda; ne che la proportione della prima alla quarta, è triplicata della proportione della prima alla ſeconda; ma la proportione della prima alla terza la Chiama *duplicata di quella proportione, che hà la prima alla ſeconda; e la proportione della prima alla quarta la* Chiama *triplicata di quella proportione, che hà la prima alla ſeconda; volendo inferire, che quando dice la duplicata proportione della prima alla ſeconda, ſi debba intendere, come ſe dicesſe, la proportione della prima alla terza; e quando dice la proportione triplicata della prima alla ſeconda, vaglia l'iſteſſo, come ſe diceſſe, la proportione della prima alla quarta. Per eſſempio, ſiano le trè quantità proportionali C, D, E, che la proportione di C à D ſia l'iſteſſa, che la proportione di D ad E; e s'intendano due altre quantità, come A, & B. Hor quando Euclide dice, che la proportione della grandezza A alla grandezza B è duplicata della proportione, che hà C à D, non intende altro, ſe non che la proportione di A à B è l'iſteſſa, che la proportione della prima A alla terza E; ed in queſto ſenſo ſe ne ſerue da per tutto. E ben vero, che queſta definitione, benche ſia ſufficentiſſima à rendere dimoſtrate tutte le coſe, nelle quali ſe ne ſerue Euclide, con tutto ciò confonde aſſai l'intendimento di chi ſtudia, il che naſce dal non eſſerſi dimoſtrato, che la proportione della prima alla terza ſia veramente duplicata di quella, ch'è della prima alla ſeconda; e che la proportione della prima alla quarta ſia veramente triplicata di quella, ch'è della prima alla ſeconda. E pare che queſta definitione ſia appoggiata ad vna coſa incerta; perilche malamente gli ſtudioſi v'applicano l'animo à concepirne il*

vero

vero ſenſo. Hor per leuare ogni ambiguità, che poſſa rendere oſcuro il concetto di queſta definitione. Dico che quando trè quantità ſono proportionali, la proportione della prima alla terza non ſolamente la chiamiamo dupplicata, mà che realmente è duplicata di quella, ch'è della prima alla ſecõda; e che di quattro quantità continue proportionali la proportione della prima alla quarta è triplicata di quella, ch'è dalla prima alla ſeconda, e con queſt'ordine ſempre la prima all'vltima hà proportione tante volte multiplicata di quella, che hà alla ſeconda, per vn meno la moltitudine delle quantità proportionali. Il che tutto è dimoſtrato nell'annotatione dopo la 18. propoſitione del ſeſto Libro.

XII.

Delle quantità proportionali, gli antecedenti ſi dicono homologhi, cioè ſimili à gli antecedenti; ed i conſeguenti à i conſeguenti.

Due ſimilitudini ſi deuono concepire, quando conſideriamo le grandezze proportionali. La prima è la ſimilitudine delle proportioni, che cadono frà quelle grandezze proportionali, per la quale ſi dicono quantità proportionali; come ſe la proportione dell'antecedente A al conſeguente B, è vguale, ò l'iſteſſa, che la proportione dell'antecedente C al conſeguente D, queſte due proportioni ſi dicono ſimili frà di loro; poiche tanto è dire la proportione di A à B è l'iſteſſa, che la proportione di C à D; quanto è dire, che la proportione di A à B è ſimile alla proportione di C à D. L'altra ſimilitudine da conſiderarſi è nelle quantità frà le quali cadono le ſimili proportioni; come ſe la proportione dell'antecedente A al conſequente B è ſimile alla proportione dell'antecedente C al conſeguente D, li due antecedenti A, & C, ſi dicono eſſer ſimili frà di loro, e ſimili ancora ſi dicono i conſeguenti B, & D frà di loro; e per leuare la confuſione di queſte due ſimilitudini, in luogo di dire, che gli antecedenti A, & C ſono ſimili, diremo, che gli antecedenti A, & C ſono homologhi, che ſignifica l'iſteſſo: e coſi li conſeguenti B, & D li chiameremo ancora homologhi.

XIII.

Proportione alterna, ouero permutata, è quando ſi fà la comparatione dell'antecedente all'antecedente, e del conſeguente al conſeguente.

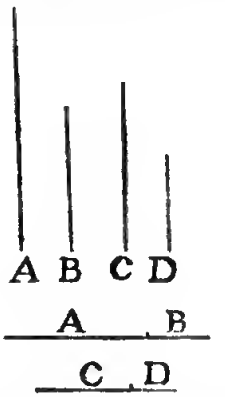
Quando s' haueranno quattro quantità, come A, B, C, D, ed eſſendoſi fatta la comparatione dell'antecedente A al conſeguente B, e dell' antecedente C all' conſeguente D; e ſi dirà permutando, queſta voce Permutando ſignifica, che ſi debba fare la comparatione dell'antecedente A all'antecedente C, e dell' conſeguente B al conſeguente D.

La

XIV.

La proportione inuersa non è altro, se non che fare la comparatione de i conseguenti à gli antecedenti, pigliando i conseguenti come antecedenti, e gli antecedenti come conseguenti.

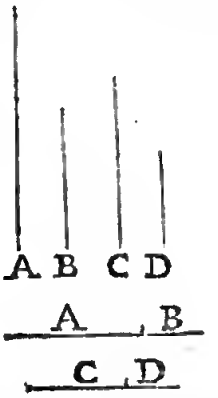
Se saranno quattro quantità, come A, B, C, D, ed essendosi fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, e si dirà Inuertendo; si dourà fare la comparatione del conseguente B all'antecedente A, e del conseguente D all'antecedente C.



XV.

La compositione della proportione è il fare la comparatione frà la composta dell'antecedente, e conseguente insieme, al conseguente.

Si considerino le quattro quantità A, B, C, D; se, essendosi fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, si dirà Componendo; all'hora si farà la comparatione delle due AB, prese insieme, al conseguente B, e delle due CD, prese insieme, al conseguente D.



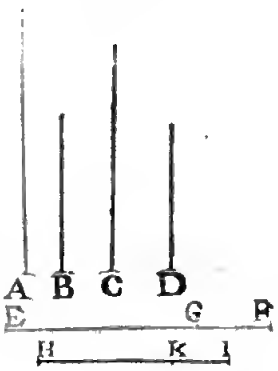
XVI.

La diuisione della proportione è il fare la comparatione della differenza, ch'è frà l'antecedente, e conseguente, all'istesso conseguente. purche gl'antecedenti superino i conseguenti

Cioè se sarà fatta la comparatione dell'antecedente A al conseguente B, e dell'antecedente C al conseguente D, e si dirà Diuidendo; si farà la comparatione della differenza che è frà l'antecedente A ed il conseguente B al

conse-

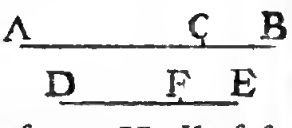
conſeguente B, e della differenza, ch'è frà l'antecedente C, e conſeguente D, al conſequente D. Similmente ſe ſarà ſatta la comparatione dell'antecedente EF al conſeguẽte FG, e dell'antecedente HI al conſeguente IK, diuidendo, ſi ſarà la comparatione della differenza EG al conſeguente GF, e della differenza HK al conſeguente KI: auuertendo, che EG è la differenza di quãto l'antecedente EF ſupera il conſeguente FG; e che HK è la differenza di quanto l'antecedente HI ſupera il conſeguente IK



XVII.

La conuerſione della proportione è il fare la comparatione frà l'antecedente, e la differenza, ch'è frà l'antecedente, ed il conſeguente, purche gl'antecedenti ſuperino i conſeguenti.

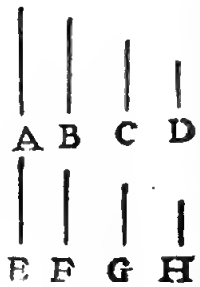
Sia l'antecedente AB, ed il conſeguente BC, ſarà AC la differenza di quanto l'antecedente AB ſupera il conſeguente BC. Similmente ſia DE antecedente, ed il conſeguente ſia EF, ſarà DF la differenza frà l'anteeedente DE, ed il conſeguente EF. Hor ſe ſarà ſatta la comparatione dell'antecedente AB al conſeguente BC, e dell'antecedente DE al conſeguente EF, dicendoſi, per la conuerſione della proportione, ſi farà la comparatione dell'antecedente AB alla differenza AC, e dell'antecedente DE, alla differenza DF.



XVIII.

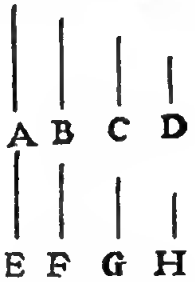
Per l'egualità è quando ſono più di due quantità da vna parte, ed altretante quantità da vn altra; e tanto nelle prime, quanto nell'altre, ſi fà la ſimile comparatione della prima all'vltima.

Come ſe ſiano le quantità A, B, C, D, da vna parte, & altretante quantità, come E, F, G, H, da vn altra parte; e ſatta la comparatione di A à B, e di E ad F; e ſimilmente ſatta la comparatione di B à C, e di F à G; come ancora ſatta la comparatione di C à D, e di G ad H, e con queſt'ordine ſe vi ſaranno altre quantità: ſe ſi dirà, Per l'egualità, ſi ſarà la comparatione della prima A all'vltima D, e della prima E all'vltima H.



XIX.

Proportione ordinata ſi dice, quando ſono più di due quantità da vna parte, & altretante quantità da vn altra parte; e la prima alla ſeconda, nelle prime, ſia come la prima alla ſeconda, nell'altre; e ſimilmente la ſeconda alla terza, nelle prime, ſia come la ſeconda alla terza nell'altre; e la terza alla quarta, nelle prime, come la terza alla quarta, nell'altre; e con queſt'ordine ſe vi ſaranno più quantità.



Per eſempio, ſe A à B è come E ad F, e la proportione di B à C è come quella di F à G; come ancora C à D ſia come G ad H; e con queſt'ordine ſe le grandezze ſaranno di maggior moltitudine; ſecondo queſta diſpoſitione le dette quantità ſi dicono eſſere nella proportione ordinata.

XX.

La perturbata proportione è quando ſono trè quantità da vna parte, e tre altre da vn altra parte; e la prima alla ſeconda, nelle prime, ſia come la ſeconda alla terza nelle altre; e la ſeconda alla terza, nelle prime, è come la prima alla ſeconda, nelle altre.

S'intendano le tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte; e la proportione della prima A alla ſeconda B, ſia come quella della ſeconda E alla terza F; e ſimilmente la proportione della ſeconda B alla terza C ſia come quella della prima D alla ſeconda E; le dette quantità A, B, C, & D, E, F, ſi dicono eſſere nella perturbata proportione.

ANNOTATIONE.

Perche la varia interpretatione data da Graui Autori à queſte definitioni del quinto libro, può apportare non picciola confuſione à i ſtudioſi di queſta ſcienza, parmi aſſai vtile, prima di paſſare alle dimoſtrationi delle proportioni, che cadono frà le grandezze in genere, come ſono le dimoſtrationi, che ſeguono in queſto quinto libro; porre in chiaro tutte le difficoltà, ed inſieme eſaminare di quanto valore ſiano l'eccettioni date fin' hora à queſte definitioni d'Euclide. E per procedere con ordine, ſpiegaremo il ſenſo litterale d'Euclide à miſura, che ſi eſporranno l'eccettioni date.

In trè coſe ſtimano, ch'Euclide habbia vacillato in queſto quinto libro, cioè.

Nel

Nel definire la proportionalità in più modi; In hauer ſtabilita la ſeſta definitione ſopra vna paſſione remota: Ed in hauer dimoſtrato in ſpecie nel VII. Libro quello, che hà dimoſtrato in genere nel quinto Libro. E quanto al primo capo giudicano, che la quarta, e ſeſta definitione del quinto Libro, non ſiano due definitioni diſtinte, e ſeparate, mà che tutte due coſtituiſcano vna ſola definitione. Il dubio conſiſte nel fatto, nè potremo cauare chiarezza maggiore, ſe non che dalle proprie parole d'Euclide. Definiſce prima queſto Autore, che coſa ſia proportione, nel ſeguente modo. Ratio eſt, duarum magnitudinum eiuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo. *Cioè, che la proportione è la ſcambieuole relatione frà due quantità del medeſimo genere, riſpetto alle loro grandezze; come fù ſpiegato nella terza definitione di queſto. E qui è d'auuertirſi, che doue Euclide dice* Ratio, *noi, ſeguendo l'vſo comune, diciamo Proportione; e doue dice* Proportio, *diciamo Proportionalità. Soggiunge poi nella quarta definitione.* Proportio verò, eſt rationum ſimilitudo, *cioè chiama la ſimilitudine delle proportioni, con queſta voce, Proportionalità. E nella ſeſta definitione dice.* In eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à ſecundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiſcumque ſit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque, vel vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, vel vna excedunt; ſi ea ſumantur, quæ inter ſe reſpondent; *cioè. Quattro quantità ſi dicono hauere la medeſima proportione, ouero ſimili proportioni, quando gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, ſono tutti due ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli eguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione: come fù pienamente ſpiegato nella ſeſta definitione di queſto. Quindi appare, ch'Euclide nella terza definitione, aſſegna il nome alla ſcambieuole relatione, ch'è frà due quantità del medeſimo genere, col chiamarla proportione; nella quarta definitione chiama proportionalità la ſimilitudine ò vgualità delle proportioni; e nella ſeſta definitione, ſpiega quali conditioni deuono hauere quattro quantità, acciòche frà loro ſi dica caderui quella proportionalità ſpiegata nella quarta definitione. Donde è manifeſto, che la quarta, e ſeſta definitione ſono totalmente diſtinte, e non hanno vn medeſimo ſignificato, come vogliono i contradicenti, i quali ſoggiungono ancora, ch'Euclide non ſodisfatto della ſeſta definitione poſta nel quinto, replicò il medeſimo in altro modo nella 20. definitione del ſettimo Libro. Qui deſiderarei ſapere, chi forzò Euclide à porre nel quinto Libro quella ſeſta definitione, della quale non era ſodisfatto, per replicarne vna migliore nel ſettimo Libro (dico migliore, perche vno de gli Autori, che s'oppongono alla ſeſta definitione d'Euclide, ſi ſerue di queſta 20. definitione del ſettimo nel luogo, doue lui dimoſtra le proportioni delle quantità in genere) Io per me non ſono di quelli, che ſtimano di tanto poco intendimento Euclide, che non ſapeſſe valerſi nel quinto Libro di quella medeſima 20. definitione, che lui medeſimo poſe nel ſettimo Libro; mentre altri, credendoſi di far bene, non ſenza qualche induſtria l'hanno fatto. Temo però, che la coſa ſtia tutta altrimente di quello, che queſti Autori s'imaginano. Mi ſi dica di gratia, che coſa hà la quantità continua di commune con la quantità diſcreta? Certo che ſe faremo eſatta riſteſſione alla natura dell'vna, e dell'altra, trouare-*

mo, che non altro hanno di commune, ſe non che grandezza è l'vna, e grandezza è l'altra; del rimanente la quantità continua riguarda la ſola eſtenſione, e la diſcreta la ſemplice moltitudine. La quantita continua comincia dal punto, e la diſcreta comincia coll'vnità in modo, ch'il punto non è parte della quantità continua; e l'vnità è parte della quantità diſcreta. La quantità continua ſi può accreſcere, e diminuire quanto ſi vuole; la diſcreta ſi può accreſcere, mà non diminuire quanto ſi vuole, ſtante che l'vnità è ſua minima parte. Sempre la quantità continua ſi può diuidere in due parti vguali; e la diſcreta non ſempre. La quantità continua, ò è lunghezza, ò ſuperficie, ouero corpo; e di queſte la lunghezza non hà niente di commune con la ſuperficie, ne col corpo; la ſuperficie è totalmente diuerſa dalla linea, e dal corpo; ed il corpo in niſſun modo può eſſere conſiderato come ſuperficie, ò come linea; e la quantità diſcreta può eſſere conſiderata come lunghezza, come piano, e come ſolido; cioè quel medeſimo numero compoſto, che conſideriamo come numero ſolido, lo poſſiamo conſiderare, come numero piano, ed ancora come lunghezza. Nella quantità continua à tutti i piani ſi può trouare vn quadrato vguale, ed à i ſolidi vn cubo vguale: perilche ad ogni piano ſi puo trouare il lato di quel quadrato, che gli è vguale, & ad ogni ſolido ſi può trouare il lato di quel cubo, che gli è vguale: mà non tutti i numeri poſſono eſſere numeri quadrati, ò numeri cubi; e perciò non tutti hanno lato, ò radice quadrata, ne lato, ò radice cuba. Alle grandezze, nella quantità continua, ſempre ſe le può trouare la terza, ò quarta, e quante altre quantità ſi vogliano, proportionali; mà nella quantità diſcreta non à tutti i numeri ſe gli può trouare il terzo, quarto, ed altro numero nella medeſima proportione. Nella quantità diſcreta ſi danno le grandezze minime in vna data proportione, il che non ſuccede nella quantità continua. E finalmente le grandezze, nella quantità continua, non ſempre ſono commenſurabili, e le grandezze, nella quantità diſcreta, ſono ſempre commenſurabili. D'onde ne ſegue, ch'eſſendo tanta diuerſità frà la quantità continua, e la diſcreta; le paſſioni, che accadono all'vna, non tutte poſſono conuenire all'altra. Per eſempio nella quantità diſcreta, i numeri primi ſono minimi nella loro proportione; mà nella quantità continua non ſi trouano grandezze, che ſiano minime nella loro proportione. Hor ſe le paſſioni, che accadono nella quantità continua non conuengono tutte con quelle della quantità diſcreta, fù ben neceſſitato Euclide ad aſſegnare principij proprij, ed atti à ſpiegare quelle paſsioni nella quantità diſcreta, che non conuengono alla quantità continua. E perche, come s'è detto, le grandezze nella quantità diſcreta, ſono tutte commenſurabili; le paſſioni di queſte tutte riguardano i modi, come ſcambieuolmente ſi miſurano; cioè come vna grandezza miſura, ò non miſura vn altra, ò più grandezze; e come più grandezze miſurano, ò non miſurano altre grandezze; da i quali ne naſcono altre paſſioni, come appariſce nel ſettimo, ottauo, e nono Elemento. E per tal ragione, benche Euclide habbia dimoſtrato in genere in queſto quinto Elemento tutte le paſsioni delle proportioni, per il che ſono dimoſtrate ancora le proportioni de' numeri; con tutto ciò, bauendo riguardo alle particolari paſſioni, che doueua dimoſtrare nella quantità diſcreta, ſtabilì nuoua definitione alla proportione de' numeri, come ſi vede nella 24. definitione del ſettimo Elemento; la quale è ſolamente diretta à ſpiegare la natura delle proportioni

alle

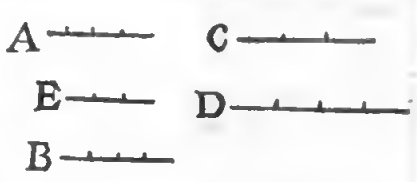
alle grandezze commenſurabili, come ſono i numeri. E perche la proportionalità è la ſimilitudine delle proportioni, hauendo per le ragioni ſopradette, ſtabilita la definitione delle proportioni numeriche, ſecondo che richiede la natura della commenſurabilità, fù neceſſitato con nuoua definitione à ſpiegare quali conditioni deuono hauere i numeri, acciòche frà loro ſi dica caderui proportionalità; cioè quali conditioni deuono hauere i numeri, che lui chiama numeri proportionali. E queſta è la 20. definitione del ſettimo Elemento, la quale douendo intieramente conuenire con la definitione delle proportioni numeriche, l'eſpoſe diuerſamente dalla ſeſta definitione di queſto quinto Elemento; ne potè fare altrimente, perche queſta ſeſta definitione abbraccia il commenſurabile, e l'incommenſurabile; e l'altra riguarda ſolamente la commenſurabilità de numeri. D'onde è manifeſto, ch'Euclide non poſe nel ſettimo Elemento la definitione delle quantità proportionali à cauſa, che non foſſe ſodisfatto di quello, che haueua definito nel quinto Elemento; mà fù neceſſitato à farlo per ſpiegare quelle paſſioni ne i numeri, che in niſſun modo poſſono eſſere nella quantità continua. E queſto ſia detto per moſtrare, che non è vn forte argumentare il dire, che hauendo Euclide ſpiegato in ſpecie nel ſettimo Libro quello, che hà ſpiegato in genere nel quinto, ne ſegua poi, ch'il quinto Libro non ſia dimoſtrato.

Diſcuſſo queſto picciolo dubbio (che in modo alcuno non può apportare detrimento ad Euclide, mentre quand'anche la quarta definitione del quinto Libro foſſe ſuperflua, queſto non ſà che il quinto Libro non ſia perfettiſſimamente dimoſtrato) veniamo à ſpianare le difficoltà maggiori, le quali tutte parmi, che ſi reſtringano alla ſeſta definitione, che dicono hauere l'origine da paſſione remota, com'è quella, che ſi diano quattro quantità in natura in modo, che gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, tutti due ſiano ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione. E perche queſta difficoltà è già ſuperata, come appariſce nella dimoſtratione, che antecede alla ſeſta definitione di queſto, non reſta più luogo da dubitare, che le paſſioni del quinto Libro non ſiano tutte ben dimoſtrate; benche Euclide ſtimaſſe che non foſſe tanto neceſſario di farui particolare dimoſtratione: poiche ſe hauremo quattro quantità, e ſaranno preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione, e di più ſaranno preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione, due caſi ſi poſſono dare in natura; cioè: O gli vguali multiplici della prima, e terza, in ogni multiplicatione, ſono tutti due maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta; ò pure non ſucceda in ogni multiplicatione, mà che in alcune ſucceda, ed in altre nò. Se non ſuccede in ogni multiplicatione, la proportione della prima alla ſeconda, e della terza alla quarta, le chiama proportioni ineguali: e ſe ſuccede in ogni multiplicatione, le chiama ſimili, cioè vguali proportioni: e così non pare tanto oſcuro queſto principio, che aſſolutamente ſi poteſſe dire, che le paſſioni del quinto Libro foſſero indimoſtrate. Hauerei ſtimato aſſai più oſcuro principio, quando di quattro quantità la prima foſſe maggiore della ſeconda, e la terza non maggiore della quarta, ed Euclide haueſſe ſuppoſto, che la prima alla ſeconda haueſſe maggior proportione, che la terza alla quarta: all'hora con ragione ſi ſarebbe potuto domandare ad

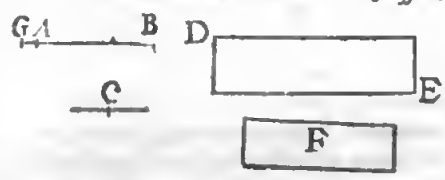
Eucli-

Euclide, per qual cauſa non hà ammeſſo per coſa nota, che le vguali quantità hanno l'iſteſſa proportione ad vna terza del medeſimo genere; e poi prenda per principio chiaro quello, che ſenza dubbio è vn fortiſſimo Theorema da dimoſtrarſi (come ſi può vedere nella 10. & 11. propoſitione del ſeſto Libro delle Collettioni Matematiche di Pappo Aleſſandrino) e non differente à queſto ſi può ſtimare quel principio preſo da graui Autori (che per altro ſono degni di ogni gloria) i quali definiſcono la maggior proportione nel ſeguente modo, Chiamo la proportione della prima alla ſeconda maggiore della proportione commenſurabile, che hà la terza alla quarta, quando la prima auanza quella, la quale alla ſeconda, ſia come la terza alla quarta.

Cioè ſe ſaranno quattro quantità come A, B, C, D, ò che le due A, B ſiano del medeſimo genere, e le due C, D, d'vn altro genere; ò che tutte quattro ſiano del medeſimo genere, e che C à D habbia qualſiuoglia proportione commenſurabile: e qualch'altra quantità E ſia minore di A, ed habbia alla ſeconda B l'iſteſſa proportione commenſurabile, quale hà C à D; la proportione della prima A alla ſeconda B ſi debba chiamare maggiore della proportione commenſurabile, che hà C à D. Dunque accioche la proportione di A à B ſia maggiore della proportione commenſurabile, che hà C à D, ſarà neceſſario, che ſi dia in natura vn altra quantità come la notata E, la quale ſia minore di A, e che habbia l'iſteſſa proportione commenſurabile à B, quale hà C à D, e per maggiore chiarezza ſogliono addurre vna ſimile ſpiegatione.

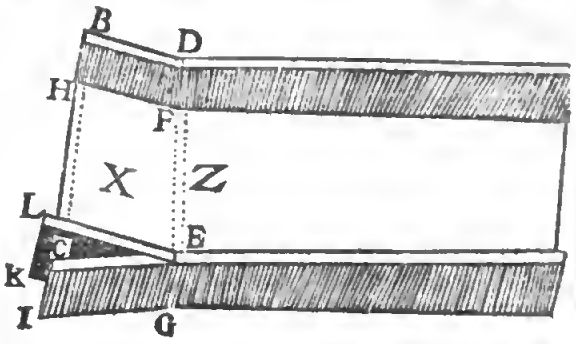


Siano le quattro quantità AB, C, DE, ed F; e ſia AB, per eſſempio, nella proportione ſeſquialtera alla quantità C, e parimente DE ſia nella ſeſquialtera proportione alla quantità F; e così la proportione di AB à C è l'iſteſſa, che la proportione di DE ad F; il che ſe gli può dare per conceſſo, non ſtando quì tutta la difficoltà. Soggiungono poi, che aggiunta ad AB qualche particola GA in modo, che ne riſulti tutta la quantità GB ò commenſurabile, ò non commenſurabile alla quantità C, ſarà chiaro, che GB è maggiore di quel che fà di biſogno, accioche ſia ſeſquialtera à C. E da queſto conchiudono, che GB hà maggior proportione à C di quella, che hà DE alla quantità F. Se aggiunta la particola AG alla quantità AB ne riſultaſſe la compoſta GB commenſurabile alla quantità C, all'hora GB ſarebbe parti di C di maggior multitudine di quello, che DE è parti di F; cioè GB ſarebbe maggiore di quello che fà biſogno accioche ſia parti di C, come DE è parti di F; e l'eccesſo ſarebbe parte, ò parti, ouero multiplice di C, ed in queſto caſo la definitione non ſarebbe mancante, ne ſarebbe neceſſario dimoſtrare, che le quantità vguali hanno l'iſteſſa proportione ad vna terza; ne meno, che delle ineguali quantità la maggiore hà maggiore proportione ad vna terza, che la minore alla medeſima terza; poiche il tutto dipenderebbe dalle difinitioni, come fà Euclide nel 7.



Ele-

Elemento. Ma la difficoltà ſtà, quando, aggiunta la particola AG ad AB, e ne riſulti GB incommenſurabile alla quantità C, nel qual caſo non è AG parte, ò parti, ò moltiplice di C; e perciò non ſappiamo ſe la proportione di GB, à C ſia creſciuta, ò diminuita. E per ſpiegare con qualche ſimilitudine il dubbio, ſi conſideri l'alueo di qualche fiume, come il notato ZX, che da per tutto riteuga vguale decliuio, mà ineguale larghezza; cioè che la larghezza, nello ſpatio BXC ſia maggiore della larghezza nello ſpatio DEZ; e corra l'acqua da Z verſo X in modo, che nel ſito DE faccia la ſettione DFGE, e nel ſito BC faccia la ſettione BHIC. S'intenda in BC riſtretto l'alueo in modo, che la larghezza BL ſia vguale alla larghezza DE, per quel che ſi dimoſtra nel noſtro Trattato delle Acque Correnti, la ſettione BHKL, che fà l'acqua nel ſito BL, ſarà vguale alla ſettione DFGE che fà nel ſito DE; e la velocità dell'acqua nella ſettione BHKL è vguale alla velocità dell'acqua nella ſettione DFGE. Se ſi concepiſce rimoſſo l'argine E

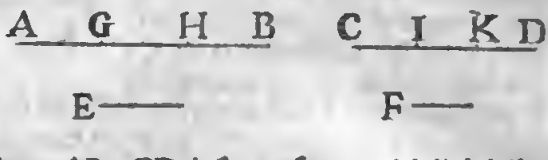


LK, la ſettione dell'acqua ſarà BHIC maggiore della ſettione BHKL, l'acqua nello ſpatio BIGED creſcerà di mole à cauſa, che la velocità dell'acqua nella ſettione BHIC è fatta minore: ſe poi all'acqua in ZX ſoprauiene vn altra piena, la ſettione BHIL creſce d'altezza, e ſi fà più veloce, come il tutto ſi dimoſtra nel luogo citato, e la ſenſata eſperienza lo fà manifeſto, di modo, che la creſcẽza della ſettione BHIC in vn modo creſce di velocità, ed in vn altro, come in latitudine diminuiſce di velocità. Horſe la velocità è vna coſa diuerſa dall'eſtenſione ſuperficiale, ò corporea, e ſi dà in natura, che accreſcendoſi l'eſtenſione in vn modo, creſce la velocità, ed in vn altro modo ſi diminuiſce; eſſendo la proportione vna coſa diuerſa dall'eſtenſione, cade in dubbio ſe accreſcendo l'eſtenſione al termine antecedente, poſſa in tutti gli accreſcimenti produrre proportione maggiore di quella, che haueua al conſeguente, prima dell'accreſcimento. E benche le ſettioni più veloci in tempi vguali poſſano ſcaricare maggiori quantità d'acque di quelle, che ſcaricano le meno veloci, queſta, ed altre paſſioni nell'acque correnti ſono cognite à noi mediante le dimoſtrationi Geometriche; mà non trouo fino à queſto luogo con quali dimoſtrationi Geometriche ſi poſſa ſpiegare alcuna paſſione delle proportioni, dalla quale ſe ne poſſa cauare la cauſa, perche accreſciuta vna eſtenſione in modo, che ne venga quantità incommenſurabile ad vn altra, non poſſa hauer poi minor proportione à quell'altra, di quella, che haueua prima dell'accreſcimento. E s'è paſſione ignota, che due quantità vguali habbiano vguali proportioni ad vna terza; e che le proportioni, le quali ſono le medeſime ad vna terza ſono le medeſime frà di loro; come poi non è paſſione ignota, che accreſciuta vna quantità in modo, che ne riſulti quantità incomenſurabile, babbia maggior proportione ad vna terza di quella commenſurabile proportione, che haueua

alla medeſima , prima dell'accreſcimento . Vn'altro eſempio ſi può aggiungere , riflettendo alle coſe , che diſcendono , ed à quelle , che galleggiano nell' acqua ; cioè . Vna pallina di piombo diſcende nell'acqua con vna tale qualſiſia velocità ; ſe à queſta s'accreſce , come ogn'vno sà , vna maſſa di cera , la quale , benche ſia leggiera riſpetto al piombo , con tutto ciò per ſe ſteſſa peſa qualche coſa , e pure permiſta quella pallina di piombo con quella maſſa di cera , non ſolo quel piombo non diſcende con la velocità di prima , mà può eſſere tanta la cera accreſciuta , che reſti à galla . Donde ſe hauremo riguardo ſolamente à queſti due graui aggiunti inſieme , troueremo , ch'il peſo della cera aggiunto al peſo del piombo non hà prodotto accreſcimento di velocità , mà benſi il tutto haurà minor velocità . Sò che le cauſe di queſt'effetto ſono cognite , mà habbiamo ancora la cognitione di molt'altre coſe , che ce ne aprono la ſtrada ; mà nelle quantità incomenſurabili non habbiamo fin'à queſto luogo cognitione alcuna delle loro paſſioni ; anzi che non ſenza gran difficoltà ſe ne può formar concetto ; e perciò difficiliſſimo ſtimo à poter dimoſtrare , ch'vna quantità comenſurabile ad'vn'altra accreſciuta fin che diuenga incommenſurabile , tale accreſcimento non poſſa fare tal compoſto con la prima , che comparata ad'vna terza produca proportione minore di quella , che haueua à quella terza prima dell'accreſcimento . E quanto queſto Theorema è più difficile à dimoſtrarſi , tanto l'antedetta definitione è più oſcura , è dipende da paſſione remotiſſima . Per il che tutta la machina delle paſſioni appoggiate à queſta definitione , con quel che gli ſegue appreſſo , reſta indimoſtrato . E benche ſi potrebbe dire , aderendo alla ſentenza del P. Clauio , che le definitioni ſono nomi poſti ad arbitrio , e che baſta à queſti Autori hauer ſpiegato quello , che ſi deue concepire quando nel progreſſo delle ſue dimoſtrationi dirà maggiore , ò minor proportione , cioè che quando dirà maggiore , ò minore proportione , ſi debba intendere di quella da loro definita , poco importando che ſia più queſta , che quella proportione : non intendo qui eſaminare le ragioni del P. Clauio , mà dirò bene , che non altro inteſe Euclide nella ſeſta definitione di queſto quinto Libro , quando diſſe ; All' hora chiamaremo la prima alla ſeconda hauer l'iſteſſa proportione , quale hà la terza alla quarta , quando gli vguali multiplici della prima , e terza , ſecondo qualunque multiplicatione , ſono tutti due ò maggiori , ò minori , ouero vguali , à gli vguali multiplici della ſeconda , e quarta , preſi ſecondo qualunque multiplicatione ; volendo inferire , che quando dirà la proportione della prima alla ſeconda eſſere la medeſima , qual'è quella della terza alla quarta , ſi debba intendere , che queſti quattro termini , frà quali ſi dice caderui proportionalità , ritenghino tal paſſione , che gli vguali multiplici del primo , e terzo termine , ſecondo qualunque multiplicatione , ſiano tutti due ò maggiori , ò minori , ò vguali à gli vguali multiplici del ſecondo , e quarto , ſecondo qualunque multiplicatione : pigliando le quantità in genere , ſenza fare alcuna diſtintione di commenſurabile , ed incommenſurabile , voci tutte introdotte da gl'interpreti , e che mai ſono ſtate ne meno ſognate da Euclide , prima del ſuo decimo libro , doue ne dimoſtra le paſſioni ; conoſcendo bene , che douendoſi trattare delle proportioni , nelle quantità in genere , altra definitione non gli poteua conuenire , che quella eſplicata da lui co' gli vguali multiplici , atteſo che gli vguali multiplici ſi poſſono prendere d'ogni quantità .

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se quante grandezze si vogliano siano vgualmente multiplici d'altrettante grandezze, si come vna è multiplice di vna, così tutte sono multiplici di tutte.



Siano quante grandezze si vogliano AB, CD, vgualmente multiplici di altrettante grandezze, come E, ed F. Dico che le grandezze AB, CD insieme, sono multiplici delle grandezze E, & F insieme, come AB è multiplice di E; ouero come CD è multiplice di F.

Perche AB è multiplice di E, come CD è multiplice di F, tante volte AB è misurata da E, [a] per quante volte CD è misurata da F. Si diuida AB nelle parti vguali ad E, che siano AG, GH, HB; e si diuida CD nelle parti vguali ad F, che siano CI, IK, KD; tante parti saranno in AB vguali ad E, per quante ne sono in CD vguali ad F. In oltre perche AG è vguale ad E, e la grandezza CI è vguale ad F, le due AG, CI insieme saranno vguali [b] alle due E, & F insieme. Similmente perche GH è vguale ad E, ed IK è vguale ad F, le due GH, & IK insieme saranno vguali alle due E, ed F insieme. Nell'istesso modo le due HB, KD insieme, sono vguali alle due E, ed F insieme; e perciò tante volte le due AB, CD insieme, sono misurate dalle due E, ed F insieme, per quante volte AB è misurata da E, ouero CD, è misurata da F. Per la qual cosa le due AB, CD insieme, [c] sono multiplici delle due E, ed F insieme, come AB è multiplice di E, ouero CD è multiplice di F, ch'era da dimostrarsi.

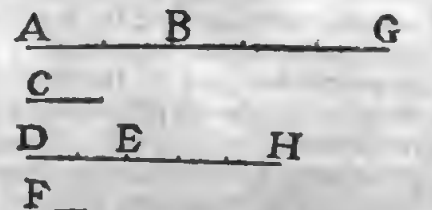
[a] Scol. alla 2. def. del 5.

[b] 2. assiom.

[c] Scol. alla 2. defin. di questo.

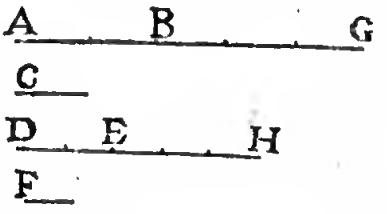
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se la prima è multiplice della seconda, come la terza è multiplice della quarta; e la quinta è multiplice della seconda, come la sesta è multiplice della quarta; la composta della prima, e quinta sarà multiplice della seconda, come la composta della terza, è sesta, è multiplice della quarta.



Sia la prima AB multiplice della seconda C, come la terza DE è multiplice della quarta F; e la quinta BG sia multiplice della seconda C, come la sesta EH è multiplice della quarta F. Dico, che AG, composta della prima, e quin-

ta, è multiplice della ſeconda C, come DH, compoſta della terza, e ſeſta, è multiplice della quarta F.



a Scol. alla 2. defin. di queſto.

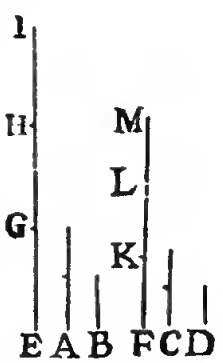
Perche A B è multiplice di C, come DE è multiplice di F, [a] tante volte A B ſarà miſurata da C, per quante volte D E è miſurata da F. Similmente perche BG è multiplice di C, come E H è multiplice di F, tante volte BG ſarà miſurata da C, per quante volte E H è miſurata da F: ma ſi diſſe che AB è tante volte miſurata da C, per quante volte DE è miſurata da F; ſarà tutta AG miſurata tante volte da C, per quante volte DH è miſurata da F, e perciò AG è multiplice di C, [b] come DH è multiplice di F. Per la qual coſa AG compoſta della prima, e quinta, è multiplice della ſeconda C, come DH, compoſta della terza, e ſeſta, è multiplice della quarta F, ch'era da dimoſtrarſi.

b Scol. alla 2. defin. di queſto.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se la prima è multiplice della ſeconda, come la terza, è multiplice della quarta; gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono ancora vguali multiplici della ſeconda, e quarta.

Sia la prima A multiplice della ſeconda B, come la terza C è multiplice della quarta D; e ſiano preſi gli vguali multiplici della prima A, e della terza C, che ſiano E, ed F. Dico che E, ed F ſono ancora vguali multiplici della ſeconda B, e della quarta D.



Perche le due E, ed F, per ipoteſi, ſono vguali multiplici delle due A, & C, tante volte la quantità E ſarà miſurata da A, [a] per quante volte la quantità F è miſurata da C; ſi diuida la quantità E nelle parti vguali ad A, che ſiano EG, GH, HI, e ſi diuida la quantità F nelle parti vguali à C, che ſiano FK, KL, LM.

a Scol. alla 2. defin. di queſto.

Perche le due EG, FK ſono vguali alle due A, & C, e le due A, & C ſono vguali multiplici delle due B, & D, le due EG, FK ſaranno vguali multiplici delle due B, & D. Per l'iſteſſa ragione le due GH, KL ſono vguali multiplici delle due B, & D; e le due HI, LM ſono vguali multiplici delle due B, & D. Hor eſſendo la prima E G multiplice della ſeconda B, come la terza FK è multiplice della quarta D; e la quinta GH è multiplice della ſeconda B, come la ſeſta KL è multiplice della quarta D; ſarà, per l'antecedente propoſitione, EH compoſta della prima, e quinta multiplice della ſeconda B, come FL compoſta della terza, e ſeſta, è

mul-

multiplice della quarta B. Di nuouo perche la prima EH è multiplice della ſeconda D, come la terza FL è multiplice della quarta D; e la quinta HI è multiplice della ſeconda B, come la ſeſta L M è multiplice della quarta D; ſarà per l'antecedente propoſitione, EI compoſta della prima, e quinta, multiplice della ſeconda B, come F M compoſta della terza, e ſeſta, è multiplice della quarta D. Per la qual coſa le quantità E, ed F ſono vguali multiplici delle due B, & D, come fù propoſto dimoſtrare.

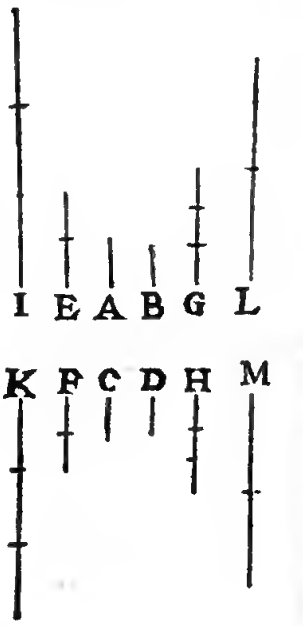
THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se di quattro quantità habbia la prima alla ſeconda la medeſima proportione, quale hà la terza alla quarta; e ſono preſi gli vguali multiplici della prima, e terza, ſecondo qualunque multiplicatione; e ſimilmente ſono preſi gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſecondo qualunque multiplicatione: il multiplice della prima hauerà la medeſima proportione al multiplice della ſeconda, quale hà il multiplice della terza al multiplice della quarta.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, ed habbia la prima A alla ſeconda B, l'iſteſſa proportione, che hà la terza C, alla quarta D; e ſiano preſi gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano E, ed F; ſimilmente ſiano preſi gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano G, ed H. Dico che la proportione di E à G è l'iſteſſa, che la proportione di F, ad H.

Si prendano gli vguali multiplici delle due E, ed F, ſecondo qualunque multiplicatione; che ſiano I, & K; e ſi prendano gli vguali multiplici delle due G, ed H, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano L, ed M, e ſi conſiderino quattro quantità, la prima E, la ſeconda A, la terza F, e la quarta C. Perche la prima E è multiplice della ſeconda A, come la terza F è multiplice della quarta C, e per coſtruttione I, & K ſono vguali multiplici della prima E, e terza F, per l'antecedente propoſitione, le due I, & K ſono ancora vguali multiplici di A, & C. Di nuouo, perche G, & H ſono vguali multiplici di B, & D, e le due L, ed M ſono per coſtruttione,

vguali multiplici di G, ed H; per l'antecedente propoſitione, le due L, ed M ſono vguali multiplici delle due B, & D. In oltre, perche la prima A alla ſeconda B, per ipoteſi è come la terza C alla quarta D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della prima A, e terza C; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D; per la conuerſa alla ſeſta definitione, ſe I è maggiore di L, ancora K ſarà maggiore di M, e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K ſarà minore, ò vguale ad M, perche ſe queſto nõ fuſſe, non ſarebbe la proportione di A à B, come quella di C à D, ch'è contro all' ipoteſi.



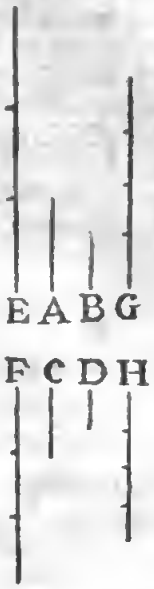
Si conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima E, la ſeconda G, la terza F, e la quarta H. Gli vguali multiplici della prima E, e terza F, per coſtruttione, ſono I, & K, e gli vguali multiplici della ſeconda G, e quarta H, ſono le due L, ed M. E perche I, ch'è multiplice della prima, eſſendo maggiore di L, multiplice della ſeconda, ancora K, ch'è multiplice della terza, per quel che s'è dimoſtrato, è maggiore di M, multiplice della quarta; e ſe I è minore, ò vguale ad L, ancora K è minore, ò vguale ad M; per la 6. definitione di queſto, la prima E alla ſeconda G, hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza F alla quarta H. Per la qual coſa il multiplice della prima al multiplice della ſeconda, è come il multiplice della terza al multiplice della quarta, come fù propoſto dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto nell'antecedente dimoſtratione, facilmente ſi caua la dimoſtratione della proportione inuerſa, ſpiegata da Euclide nella 14. definitione; cioè ſe quattro quantità ſono proportionali, inuertendo ſono ancora proportionali.

Habbia l'antecedente A al conſeguente B l'iſteſſa proportione, quale hà l'antecedente C al conſeguente D. Dico che inuertendo, il conſeguente B all'antecedente A è come il conſeguente D all'anrecedente C.

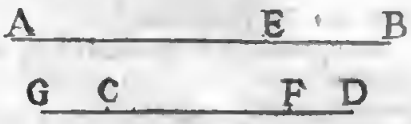
Si prendano gli vguali multiplici della prima A, & terza C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano E, ed F; e ſi prendano gli vguali multiplici della ſeconda B & quarta D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano G, ed H. Perche la proportione di A à B, per ipoteſi è come quella di C à D, per la cõuerſa della ſeſta definitione, ſe E è maggiore di G, ancora F ſarà maggiore di H; ſe E è minore, ò vguale à G, ancora F ſarà minore, ò vguale ad H; perche ſe altrimente foſſe, nõ ſarebbe la proportione di A à B come quella di C à D. Hor ſe E è maggiore di G, ed ancora F è maggiore di H, ſarà all'incontro G minore di E, ed ancora H minore di F; ſimilmente ſe E è minore di G, ed ancora F è minore di H, all'incõtro G ſarà maggiore di E, ed ancora H ſarà maggiore di F; e ſe E, & F ſono vguali alle due G, ed H, all'incontro G, & H ſaranno vguali ad E, & F. D'onde è manifeſto, che ſe G è maggiore di E, ancora H è maggiore di F; e ſe G è minore, ò vguale ad E ancora H ſarà minore, o vguale ad F. Si prenda B come prima quantità, la ſeconda ſia A, la terza D, & la quarta C; delle quali G, ed H, per coſtruttione, ſono vguali multiplici di B, & D, ch'è la prima, e terza; & E, ed F ſono vguali multiplici di A, & C, che ſono la ſeconda, e quarta. E perche G multiplice della prima B s'è maggiore di E multiplice della ſeconda A, ancora H, ch'è multiplice della terza D, è maggiore di F, ch'è multiplice della quarta C; e ſe G è minore, ò vguale ad E, ancora H è minore, ò vguale ad F; e per la ſeſta definitione di queſto, la prima B alla ſeconda A hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza D alla quarta C. Per la qual coſa ſe A à B è come C à D, inuertendo, B ad A ſarà come D à C, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA V. PROPOSITONE V.

Se il tutto è multiplice del tutto, come la parte detratta è multiplice della parte detratta; il rimanente ſarà multiplice del rimanente, come il tutto è multiplice del tutto.

Sia il tutto A B multiplice del tutto C D, come la parte A E è multiplice della parte C F. Dico che l'auanzo E B è multiplice dell'auanzo F D, come il tutto A B è multiplice del tutto C D.



Si concepiſca la quantità G C talmente, che E B ſia multiplice di G C, come A E è multiplice di C F; ſarà tutta A B [a] multiplice di tutta G F, come A E è multiplice di C F. Mà per ipoteſi A E è multiplice di C F, come [a] 1. del 5.

tutta

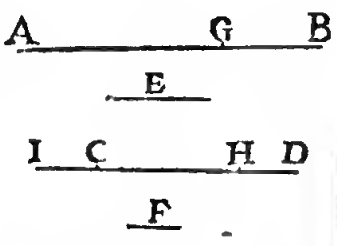
tutta AB è multiplice di tutta CD, ſarà AB multiplice di GF, come la medeſima A B è multiplice di C D. Per la qual coſa G F [b] ſarà vguale à C D. Se ne leui la commune C F, reſta G C [c] vguale ad F D. Mà per coſtruttione EB è multiplice di GC, come A E è multiplice di C F, ſarà l'auanzo E B multiplice dell'auanzo F D, come AE è multiplice di C F; cioè come il tutto A B è multiplice del tutto C D, ch'era da dimoſtrarſi.

b 6. aſſiom.
c 3. aſſiom.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due grandezze ſono vgualmente multiplici di due altre quantità, e le parti detratte dalle due grandezze ſono vgualmente multiplici di quelle quantità; i rimanenti ò ſono vguali, ouero vgualmente multiplici di quelle due quantità.

Sia A B multiplice di E, come C D è multiplice di F; e la parte AG ſia multiplice di E, come la parte CH è multiplice di F. Dico che ſe il reſtante G B è vguale ad E, ancora il reſtãte HD è vguale ad F; e ſe GB è multiplice di E, ſarà HD vguale multiplice di F. Sia nel primo luogo G B vguale ad E. Dico che H D è vguale ad F. Si concepiſca I C vguale ad F. Perche A G è multiplice di E, come C H è multiplice di F, tante volte A G è miſurata da E, quante volte C H è miſurata da F: Mà per ipoteſi GB è vguale ad E, e per coſtruttione IC è vguale ad F; tante volte AB ſarà miſurata da E, per quante volte IH è miſurata da F; e perciò AB [a] è multiplice di E, come IH è multiplice di F. Ma per ipoteſi AB è multiplice di E, come C D è multiplice di F; ſarà I H multiplice di F, come CD multiplice della medeſima F; e perciò IH [b] ſarà vguale à CD: ſe ne leui la commune C H, reſta I C [c] vguale ad H D; ma I C è poſta vguale ad F, ſarà HD [d] vguale ad F, come GB è vguale ad E, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



a Sc ol. alla 2. defin. di queſto.
b 6. aſſiom.
c 3. aſſiom.
d 1. aſſiom.

Di nuouo, ſuppoſto che G B ſia multiplice di E. Dico che H D è vguale multiplice di F. Si concepiſca la quantità CI in modo, che IC ſia multiplice di F, come GB è multiplice di E. Perche la prima A G, per ipoteſi, è multiplice della ſeconda E, come la terza C H è multiplice della quarta F; e la quinta GB, per coſtruttione, è multiplice della ſeconda E, come la ſeſta IC è multiplice della quarta F; ſarà AB, compoſta della prima, e quinta, multiplice della ſeconda E, [e] come I H, compoſta della terza, e ſeſta, è multiplice della quarta F: Mà A B è multi-

e 2. del 5.

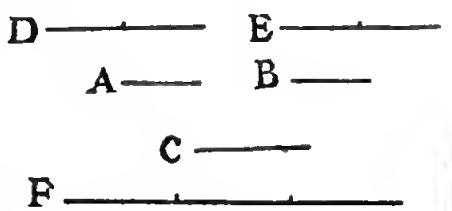
plice

plice di E, come C D è multiplice di F; ſarà IH multiplice di F, come C D è multiplice della medeſima F; e perciò I H, & C D [f] ſono frà di loro vguali; detratta la commune CH, reſta IC [g] vguale ad HD; ma IC è multiplice di F, come GB è multiplice di E; ſarà HD multiplice di F, come GB è multiplice di E, ch'era da dimoſtrarſi.

[f] 6. aſſiom.
[g] 3. aſſiom.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Le quantità vguali hanno l'iſteſſa proportione ad vna medeſima grandezza; e quella grandezza hà l'iſteſſa proportione alle quantità vguali.



Siano le grandezze A, & B vguali frà di loro, e ſia C qualunque rerza quantità. Dico prima. che la proportione della grandezza A alla grandezza C, è l'iſteſſa che la proportione di B alla medeſima C. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano D, ed E; e ſi prenda F multiplice di C, ſecondo qualunque multiplicarione. Perche le due A, & B, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, i loro vguali multiplici D, ed E, ſaranno [a] frà di loro vguali; dal che ſe D è vguale ad F, ancora E ſarà vguale alla medeſima F; ſe D è maggiore di F, ancora E ſarà maggiore di F; e ſe D è minore di F, ancora E ſarà minore di F. Si conſiderino quattro quanrirà, cioè A prima, C ſeconda, B terza, e la quarta ſia C; di modo che C rappresenta la ſeconda, e la quarta. Le due D, & E ſono gli vguali multiplici della prima A, e della rerza B; e la quanrità F, ſarà l'vguale multiplice della ſeconda, e quarta C. E perche D, multiplice della prima, s'è maggiore di F, multiplice della ſeconda, ancora E multiplice della terza, è maggiore di F, multiplice della quarta; e ſe D è minore, ò vguale ad F; ancora E è minore, ò vguale ad F, per la ſeſta definitione di queſto, la proportione della prima A alla ſeconda C è come quella della terza B alla quarta C. Per la qual coſa le quantità vguali hanno l'iſteſſa proportione ad vna terza quantita, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

[a] b aſſiom.

Di nuouo dico che C hà l'iſteſſa proportione ad A, quale hà à B.

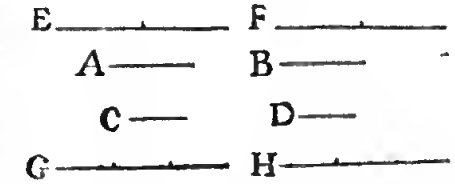
Eſſendoſi dimoſtrato D vguale ad E, ſe F è maggiore di D, ſarà ancora maggiore di E; e ſe F è minore, ò vguale à D, ſarà ancora minore, ò vguale ad E. Si conſiderino quattro quanrità, la prima C, la ſeconda A, la rerza C, e la quarta B. Gli vguali multiplici della prima, e terza C, vengono ambidue rappreſentarì dalla medeſima quantità F; e gli vguali multiplici della ſeconda A, e terza B, ſono D, ed E; e perche F multiplice della prima C, s'è maggiore di D, multiplice della ſeconda A, ancora F, multiplice della terza C, è maggiore di E, multiplice della quarta E; e ſe F è minore, ò vguale à D, la medeſima F è ancora minore, ò vguale ad E; ſarà, per la citata 6. definitione, la proportione della prima C alla ſe-

conda

conda A, come quella della terza C alla quarta B. Per la qual cosa vna terza quantità hà l'istessa proportione alle quantità vguali, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

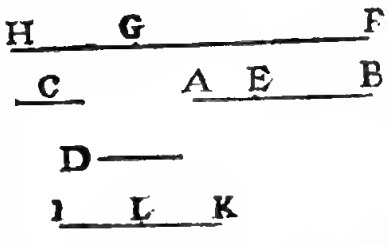
Dall'antecedente propositione si caua, che l'vguali quantità hanno la medesima proportione ad altre quantità vguali.



Come per esempio sia A vguale à B, e la quantità C vguale à D. Dico, che la proportione di A à C è come quella di B à D. Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, secondo qualunque multiplicatione, che siano E, & F; sarà a 6. assiom. *E vguale ad F. Similmente si prendano gli vguali multiplici di C, & D, secondo qualũque multiplicatione, che siano G, ed H; e sarà G vguale ad H. Hor perche le due E, F sono fra di loro vguali, e le due G, H sono frà di loro vguali; se E sarà vguale à G, ancora F sarà vguale ad H; se E è maggiore, ò minore di G, ancora F sarà maggiore, ò minore di H. Si considerino le quattro quantità, cioè A prima, C seconda, B terza, & D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza B, sono E, ed F, e gli vguali multiplici della seconda C, e quarta D, sono G, ed H; E perche E, multiplice della prima, s'è maggiore di G, multiplice della seconda, ancora F, multiplice della terza, è maggiore di H, multiplice della quarta; e se la quantità E è minore, ò vguale à G, ancora F è minore, ò vguale ad H; per la sesta definitione di questo, la prima A alla seconda C, hà l'istessa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual cosa le quantità vguali hanno l'istessa proportione ad altre quantità vguali, come fù proposto.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Delle quantità ineguali, la maggiore hà maggior proportione ad vna terza, che la minore alla medesima terza; e la terza hà maggior proportione alla minore, che alla maggiore.



Siano le quantità ineguali, cioè AB maggiore, & C minore; e la terza sia qualunque quantità D, del medesimo genere. Dico prima che la proportione della maggiore A B alla terza D, è maggiore che la proportione della minore C alla medesima quantità D.

S'intenda dettatta da A B la parte

AE vguale alla minore C; ſi prendano gli vguali multiplici delle due AE, EB, in modo, ch'il multiplice di E B ſia maggiore di D, ed il multiplice di A E non ſia minore della medeſima D, ma ò ſia vguale, ouero maggiore; e ſiano FG, GH, cioè che FG ſia multiplice di BE, come H G è multiplice di AE; ed il multiplice ſia preſo di tanta grandezza, che FG ſia maggiore di D, & H G, ò ſia vguale, ò maggiore di D. Si prenda poi IK multiplice di D, che ſia proſſimo maggiore ad HG; ſi tagli da IK la parte KL vguale alla quantità D. Perche IK è multiplice di D, ed è proſſimo maggiore di HG, detrattane la parte KL: ch'è vguale à D, reſta IL non maggiore di H G, cioè HG non è minore di I L. In oltre perche FG, per coſtruttione, è maggiore di D, e la quantità D è vguale ad LK, ſarà GF maggiore di L K. Ma HG non è minore di I L, ſarà tutta HF maggiore di IK. Di più, perche FG è multiplice di EB, come HG è multiplice di A E, tutta H F [a] ſarà multiplice di tutta A B, come H G è multiplice di AE; mà AE fù fatta vguale à C; ſarà HF multiplice di AB, come H G è multiplice di C. Per la qual coſa le due H F, H G ſono vguali multiplici delle due A B, & C. Si conſiderino quattro quantità AB prima, D ſeconda, C terza, e D quarta, di modo, che la quantità D ſerua per ſeconda, e per quarta quantità. Gli vguali multiplici della prima A B, e terza C ſono H F, & H G; e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta D, vengono rappreſentati dalla ſola quantità I K. Hor perche HF, ch'è multiplice della prima AB, è maggiore di IK, ch'è multiplice della ſeconda D; ed HG, multiplice della terza C, per coſtruttione non è maggiore di IK multiplice della quarta D, per l'ottaua definitione di queſto, la prima AB hauerà maggior proportione alla ſeconda D, che la terza C alla quarta D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

[a] 1. del 5.

Di nuouo dico, che la terza quantità D hà maggior proportione alla minore C, che alla maggiore AB. Si conſiderino quattro quantità, cioè D prima, C ſeconda, D terza, & AB quarta. Gli vguali multiplici della prima, e terza D, è la quantità KI; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta AB, ſono HG, & HF. E perche IK, multiplice della prima D, per coſtruttione, è maggiore di H G multiplice della ſeconda C; & IK, multiplice della terza D, non è maggiore di HF, multiplice della quarta AB; per l'ottaua definitione di queſto, la prima D alla ſeconda C, hà maggior proportione, che la terza D alla quarta AB. Per la qual coſa vna terza quantità hà maggior proportione alla minore, che alla maggior quantità, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le grandezze, che hanno la medeſima proportione ad vna terza quantità, ſono frà di loro vguali; e quelle grandezze, alle quali vna terza quantità hà l'iſteſſa proportione, ſono frà di loro vguali.

Habbiano prima le due A, & B l' isteſſa proportione à qualunque terza C. Dico che ſono frà di loro vguali.

Se non ſono vguali vna delle due ſarà maggiore; e ſuppoſto che A ſia
a 8.del 5. maggiore di B, hauerà maggior proportione A alla terza C, [a] che B alla medeſima C, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque le quantità A, & B ſono ineguali, ma ſono frà di loro vguali.

Di nuouo ſe la grandezza C hà l'isteſſa proportione alle due A, & B. Dico che A è vguale à B. Se A, & B, non ſono frà di loro vguali, vna
b 8. del 5. delle due ſarà maggiore. Suppoſto che A ſia minore di B, hauerà C ad A [b] maggior proportione, che la medeſima C à B, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque A, & B ſono ineguali, ma ſono frà di loro vguali, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Delle quantità, che hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; e quando la terza hà proportione ad altre quantità, quella, alla quale hà maggior proportione, è minore.

Habbia prima la grandezza A maggior proportione alla terza C di quella, che hà B alla medeſima C. Dico che A è mag-

a 7. del 5. giore di B. Non ſono A, & B frà di loro vguali, perche [a] hauerebbero la medeſima proportione à C, ch'è contro all'ipoteſi. Sia dunque A mi-
b 8. del 5. nore di B, in tal caſo A à C hauerà [b] minor proportione, che B alla medeſima C, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque A è minore, ne vguale, ma è maggiore di B.

Di nuouo habbia C maggior proportione à B, che la medeſima C ad A. Dico che B è minore di A. Non può eſſere B vguale ad A, ſtante che
c 7.del 5. C [c] hauerebbe l'isteſſa proportione alle due B, & A, ch'è contro all'ipoteſi. Sia dunque B maggiore di A, hauerà maggior proportione C ad
d 8. del 5. A, [d] che la medeſima C à B; fù ſuppoſto C hauere maggior proportione à B, hauerebbe maggiore, e minor proportione à B, ch'è impoſſibile. Non dunque B è maggiore, ne vguale, ma è minore di A, come fù propoſto dimoſtrare.

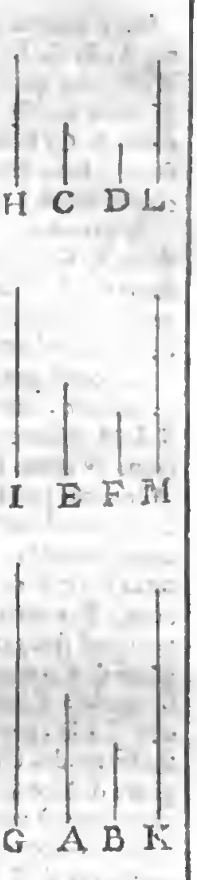
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Le proportioni, che ſono le medeſime ad vna terza, ſono le medeſime frà di loro.

Siano le proportioni di A à B, e di C à D, le medeſime, che la proportione di E ad F. Dico che la proportione di A à B è l'isteſſa, che la proportione di C à D.

Si

Si prendano gli vguali multiplici di tutti gl'antecedenti A, E, C, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano G, I, H; e ſi prendano gli vguali multiplici di tutti i conſeguenti B, F, D, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano K, M, L.



Si conſiderino quattro quantità, cioè A prima, B ſeconda, E terza, ed F quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza E, ſono per coſtruttione G, ed I; e gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta F, ſono K, ed M. E perche, per ipoteſi, la proportione di A à B, è come quella di E ad F, per la natura della medeſima proportione ſpiegata nella ſeſta definitione, ſe G è maggiore di K, ancora I ſarà maggiore di M; ſe G è minore, ò vguale à K, ancora I ſarà minore, ò vguale ad M; perche ſe foſſe altrimẽte, non ſarebbe la proportione di A à B come quella di E ad F, ch'è contro all'ipoteſi. Di nuouo ſi conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima E, la ſeconda F, la terza C, e la quarta D. Gli vguali multiplici della prima E, e terza C ſono I, ed H; e gli vguali multiplici della ſeconda F, e quarta D ſono M, ed L. E perche la prima E alla ſeconda F, per ipoteſi, è come la terza C, alla quarta D; per le ragioni antedette, ſe I è maggiore di M, ancora H ſarà maggiore di L; ſe I è minore, ò vguale ad M, ancora H ſarà minore, ò vguale ad L. Mà fù dimoſtrato, ch'eſsẽdo I maggiore di M, ancora G, è maggiore di K; e ſe I è minore, ò vguale ad M, ancora G è minore, ò vguale à K; perciò ſe G è maggiore di K, ancora H ſarà maggiore di L; e ſe G è minore, ò vguale à K, ancora H ſarà minore, ò vguale ad L. Si conſiderino finalmente quattro altre quantità, cioè A prima, B ſeconda, C terza, e D quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza C, ſono per coſtruttione, le due G, ed H. Similmente gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta D, ſono K, ed L. E perche s'è dimoſtrato, che ſe G, multiplice della prima A, è maggiore di K, multiplice della ſeconda B, ancora H, multiplice della terza C, è maggiore di L, multiplice della quarta D; e ſe G è minore, ò vguale à K, ancora H è minore, ò vguale ad L; per la ſeſta definitione di queſto, la proportione della prima A alla ſeconda B è l'iſteſſa, che la proportione della terza C alla quarta D. Per la qual coſa quelle proportioni, che ſono le medeſime ad vna terza, ſono frà di loro le medeſime, eh'era dimoſtrarſi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se ſaranno quante grandezze ſi vogliano proportionali, la proportione che hà vn'antecedente ad vn conſeguente,

haueranno tutti gli antecedenti insieme à tutti i conseguenti insieme.

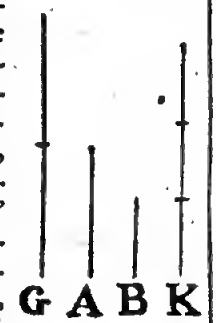
Siano quante grandezze si vogliano proportionali come A, B, C, D, E, F; cioè la proportione di A à B sia l'istessa, che quella di C à D; e la proportione di C à D sia come quella di E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A, C, E insieme, à tutti i conseguenti B, D, F insieme, sono come vn antecedente ad vn conseguente, cioè come A à B.

Si prendano gli vguali multiplici di tutti gli antecedenti A, C, E, secondo qualunque multiplicatione, che siano G, H, I; saranno le quantità G, H, I, insieme, multiplici delle tre A, C, E insieme, [a] come G è multiplice di A. Similmente si prendano gli vguali multiplici di tutti i conseguenti B, D, F, secondo qualunque multiplicatione, che siano K, L, M; saranno le quantità K, L, M insieme, multiplici de'i conseguenti B, D, F, insieme, [b] come K è multiplice di B.

[a] 1. del 5.

[b] 1. del 5.

In oltre perche la prima A alla seconda B, per ipotesi, è come la terza C alla quarta D; sono, per costruttione le due G, H vguali multiplici della prima A, e terza C; e le due K, L, sono vguali multiplici della seconda B, e quarta D, per la natura della medesima proportione spiegata nella sesta definitione, se G è maggiore di K, ancora H sarà maggiore di L; se G è minore, ò vguale à K, ancora H sarà minore, ò vguale ad L. E perche C à D, per ipotesi, è come E ad F, si proverà nell'istesso modo, che se H è maggiore di L, ancora I è maggiore di M; e se H è minore, ò vguale ad L, ancora I sarà minore, ò vguale ad M. Per la qual cosa se G, H, I, insieme, sono maggiori di K, L, M, insieme, ancora G sarà maggiore di K; e se G, H, I, insieme, sono minori, ò vguali à K, L, M insieme, ancora G sarà minore, ò vguale à K.



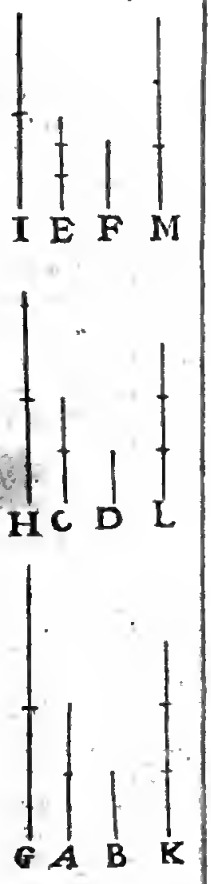
Si considerino quattro quantità, la prima delle quali siano tutti gli antecedenti A, C, E insieme; la seconda siano i conseguenti B, D, F insieme; la terza sia l'antecedente A; e la quarta il conseguente B. Gli vguali multiplici della prima A, C, E, e della terza A, per quel che si disse, sono G, H, I, & G; gli vguali multiplici della seconda B, D, F, è della quarta B sono K, L, M, & K. E perche se G, H, I, multiplice della prima A, C, E è maggiore di K, L, M, multiplice della seconda B, D, F; ancora G, multiplice della terza A, sarà maggiore di K, multiplice della quarta B; e se G, H, I è minore, ò vguale à K, L, M, ancora G sarà minore, ò vguale à K, per la 6. defin. di questo, la prima A, C, E, alla seconda B, D, F, sarà come la terza A alla quarta B. Per la qual cosa tutti gli antecedenti A, C, E, à tutti li conseguenti B, D, F, sono come vn antecedente, cioè A, ad vn

conse-

conſeguente, cioè B, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; e la terza alla quarta hà maggior proportione, che la quinta alla ſeſta; hauerà la prima alla ſeconda maggior proportione, che la quinta alla ſeſta.



Habbia la prima A alla ſeconda B, l'iſteſſa proportione, che la terza C alla quarta D; ed habbia la terza C alla quarta D; maggior proportione, che la quinta E alla ſeſta F. Dico, che la proportione della prima A alla ſeconda B è maggiore, che la proportione della quinta E alla ſeſta F.

Si prendano gli vguali multiplici de i conſeguenti B, D, F, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano K, L, M.

Perche, per ipoteſi, la proportione di C à D, è maggiore della proportione di E, ad F, ſecondo la natura della maggior proportione, ſpiegata nell'ottaua definitione di queſto, gli vguali multiplici della prima C, e terza E, ſecondo tutte le multiplicationi, non ſaranno ſempre, ò tutti due maggiori, ò tutti due minori, ò tutti due vguali, à gli vguali multiplici della ſeconda D, e quarta F; perche ſe foſſero ſempre maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici di D, ed F, la proportione di C à D, per la ſeſta definitione di queſto, ſarebbe l'iſteſſa, che la proportione di E ad F, ch'è contro all'ipoteſi; e perciò nella moltitudine delle multiplicationi qualcheduna ve ne ſarà, ſecondo la quale, pigliando gli vguali multiplici della prima C, e terza E, come H, ed I, ſe H è maggiore di L, la quantità I non ſarà maggiore di M. Si prenda poi G multiplice di A, come H è multiplice di C, in modo, che le trè G, H, I ſiano vguali multiplici de i trè antecedenti A, C, E.

In oltre ſi conſiderino quattro quantità, delle quali C ſia la prima, la ſeconda D; la terza A, e la quarta B. Perche, per ipoteſi, la prima C alla ſeconda D è come la terza A alla quarta B; eſſendo H, & G vguali multiplici della prima C, e terza A, e le due, L, & K ſono vguali multiplici della ſeconda D, e quarta B; per la natura della medeſima proportione ſpiegata nella ſeſta definitione di queſto, ſe H è maggiore di L, ancora G ſarà maggiore di K; ma, per quelche s'è detto, la quãtità H è per coſtruttione maggiore di L, in cõſeguenza G ſarà ancora maggiore di K; ma ſi diſſe, ch'eſ-

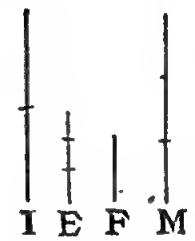
ſen-

ſendo H maggiore di L, la quantità I non ſarà maggiore di M ; eſſendo dunque G maggiore di K, la quantità I non ſarà maggiore di M. Si conſiderino quattro altre quantità, cioè A prima, B ſeconda, E terza, ed F quarta. Per coſtruttione gli vguali multiplici della prima A, e terza E, ſono le due G, ed I ; e gli vguali multiplici della ſeconda B, e quarta F, ſono K, ed M ; e perche G, ch'è multiplice della prima, è maggiore di K, multiplice della ſeconda ; ed I multiplice della terza non è maggiore di M multiplice della quarta; per l'ottana definitione di queſto, la prima A alla ſeconda B, hà maggior proportione, che la terza E alla quarta F, come fù propoſto dimoſtrare.

SCOLIO.

Se la prima E alla ſeconda F haueſſe maggior proportione, che la terza C alla quarta D ; e la proportione di C à D foſſe l'iſteſſa, che la proportione della quinta A alla ſeſta B ; tenendo il medeſimo ordine di prima, ſi dimoſtrerà, che la proportione di E ad F è maggiore della proportione di A à B. Perche hauendo E ad F maggior proportione, che C à D, ſi prouerà, che ſe I è maggiore di M [a] la quantità H non ſarà maggiore di L ; mà ſe H nõ è maggiore di L, ne meno G [b] è maggiore di K ; e perciò ſe I è maggiore di M, la quantità G non ſarà maggiore di K ; e per l'ottaua definitione di queſto, E ad F hauerà maggior proportione, che A à B.

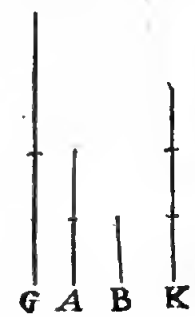
a 8. defin. del 5.
b 6. defin. del 5.



Dond'è manifeſto, che ſe A à B hà l'iſteſſa proportione, che C à D, & hà C à D minor proportione, che E ad F, hauerà A à B minor proportione, che E ad F ; mentre tanto è dire, che E ad F hà maggior proportione, che A à B, quanto che A à B hà minor proportione, che E ad F.

Se poi A à B hà maggior proportione, che C à D, & hà C à D maggior proportione, che E ad F ; ſarà manifeſto, che A à B hà molto maggior proportione, che E ad F.

E ſe A à B hà minor proportione, che C à D ; & hà C à D minor proportione, che E ad F ; hauerà A à B minor proportione, che E ad F. Il che tutto ſi dimoſtra ſecondo il modo tenuto prima.



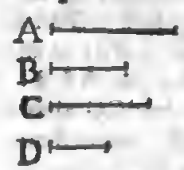
THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione ; che la terza alla quarta, e la prima è maggiore della terza, la ſe-

conda

conda ſarà maggiore della quarta; ſe la prima è vguale alla terza, la ſeconda ſarà vguale alla quarta; e ſe la prima è minore della terza, la ſeconda ſarà minore della quarta.

Habbia la prima A alla ſeconda B l'iſteſſa proportione, che la terza C alla quarta D. Dico prima, che ſe A è maggiore di C, ancora B ſarà maggiore di D. Perche A è maggiore di C, preſa B come terza quantità, haverà la maggiore A alla terza B [a] maggior proportione, che la minore C alla medeſima B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B; haverà C à D [b] maggior proportione di quella, che hà la medeſima C à B. Quãdo vna terza quantità hà proportione à due, [c] quella, alla quale hà maggior proportione, è minore; hauendo C maggior proportione à D di quella, che hà à B, ſarà D minore di B; cioè B maggiore di D, come A è maggiore di C, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

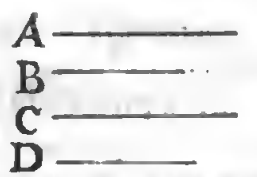


a 8. del 5.

b 19. del 7.

c 10. del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia vguale à C. Dico che B è vguale à D. Perche A è vguale à C, preſa B come terza quantità, haverà A à B [d] l'iſteſſa proportione, che hà C alla medeſima B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B; haverà C à D [e] l'iſteſſa proportione, che la medeſima C à B. Per la qual coſa B [f] è vguale à D, come A è vguale à C, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

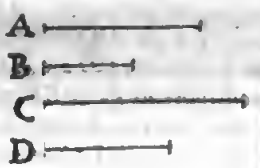


d 7. del 5.

e 11. del 5.

f 9. del 5.

Finalmente, ſuppoſto che A ſia minore di C. Dico che B è minore di D. Perche A è minore di C, preſa B, come terza quantità, la proportione di A à B [g] ſarà minore della proportione di C à B. Ma la proportione di C à D è l'iſteſſa, che quella di A à B, haverà C à D [h] minor proportione di quella, che hà la medeſima C à B. Quando vna terza quantità hà minor proportione ad vna, che ad vn altra quantità, [k] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore; ma s'è detto, che C hà minor proportione à D, che à B; ſarà D maggiore di B, cioè B minore di D, come A è minore di C, ch'era da dimoſtrarſi.



g 8. del 5.

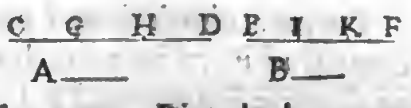
h 13. del 5.

K 10. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Le parti hanno la medeſima proportione, quale hanno i loro corriſpondenti vguali multiplici, quando ſono del medeſimo genere.

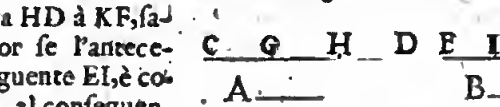
Sia A parte di C D, come B è parte di E F, cioè ſia C D multiplice di A, come E F è multiplice di B, e le due A, & B, ſiano del medeſimo genere. Dico che la proportione di C D, ad E F, è come quella di A à B. Perche C D è multiplice



di A,

di A, come E F è multiplice di B; sarà C D tante volte misurata da A, per quante volte EF, è misurata da B. Si diuida C D nelle parti vguali ad A, che siano CG, GH, HD; e si diuida EF nelle parti vguali à B, che siano EI, IK, KF. Perche CG è vguale ad A, e la quantità EI è vguale à B; sarà CG ad EI [a] come A à B. Per l'istessa ragione GH ad IK sarà come A à B; ed ancora HD à KF, sarà come A à B. Hor se l'antecedente CG al conseguente EI, è come l'antecedente A al conseguente B; e gliantecedenti GH, HD, à i conseguenti IK, KF, presi separatamente, sono come l'antecedente A al conseguente B; saranno tutti gli antecedenti CG, GH, HD, insieme, à turti i conseguenti EI, IK, KF [b] insieme, come l'antecedente A al conseguente B. Per la qual cosa CD, ad EF, è come A à B, ch'era da dimostrarsi.

a Corol. alla 7. del 5.



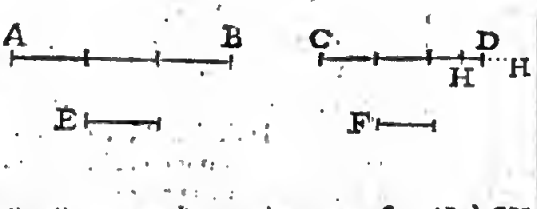
b 12. del 5.

SCOLIO.

La conuersa all'antecedente propositione la faremo nel seguente modo.

Se la prima alla seconda hà l'istessa proportione, che la terza alla quarta; e la prima è multiplice della terza, sarà la seconda vguale multiplice della quarta.

Habbia AB à CD l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB multiplice di E; Dico che CD è vguale multiplice di F. Se CD non è multiplice di F come AB è multiplice di E, si minuisca, ò s'accresca CD in H in modo, che CH sia multiplice di F, come AB è multiplice di E; e per l'antecedente propos. AB à CH sarà come E ad F; mà per ipotesi AB à CD, è come E ad F; sarà AB à CH come la medesima AB à CD. Dalche le quantità C H, CD sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque CH è multiplice di F, come AB è multiplice di E: mà sarà CD multiplice di F, come AB è multiplice di E, ch'era da dimostrarsi.

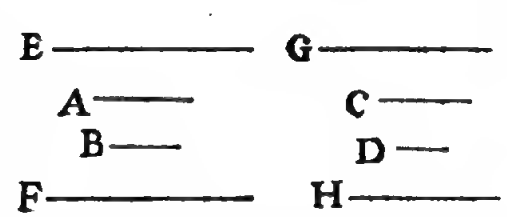


COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto è manifesto, che se AB à CD, è come E ad F, ed E è parte di AB, sarà tale parte F di CD, quale parte è la quantità E di A B; stante che C D è multiplice di F, come AB è multiplice di E.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro grandezze del medeſimo genere ſono proportionali, permutando ſaranno ancora proportionali.



Siano le quattro quantità A,B,C,D, del medeſimo genere, & habbia l' antecedente A al conſeguente B, l'iſteſſa proportione, che hà l'antecedente C al conſeguente D. Dico che, permutando, l'antecedente A all'antecedente C, hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà il conſeguente B al conſeguente D.

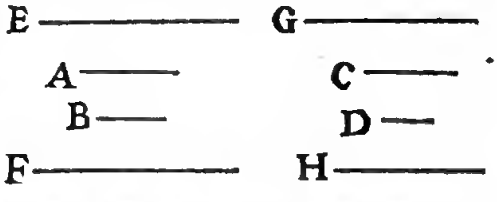
Si prendano gli vguali multiplici di A, & B, ſecondo qualunque multiplicatione, che ſiano E, ed F: e ſimilmente ſi prendano gli vguali multiplici di C, & D, ſecondo qualunque multiplicatione, e ſiano G, ed H. Perche E, ed F ſono vguali multiplici delle loro parti A, & B, per l'antecedente propoſ. hauerà E ad F l'iſteſſa proportione di A à B. Per l' iſteſſa ragione, eſſendo G, ed H vguali multiplici delle due C, & D, la proportione di G ad H ſarà come quella di C à D. Ma ſi diſſe, che A à B hà l'iſteſſa proportione, che hà C à D, hauerà A à B [a] l'iſteſſa proportione, che hà G ad H; fù dimoſtrata la proportione di E, F come quella di A à B, hauerà E ad F [b] la medeſima proportione, che hà G ad H. Dalche ſe la prima E è maggiore della terza G, [c] ancora la ſeconda F ſarà maggiore della quarta H. E ſe la prima E ſarà minore, ò vguale à G, ancora F ſarà minore, ò vguale ad H. Si conſiderino quattro quantità, delle quali A ſia la prima, C la ſeconda, B la terza, e D la quarta. Gli vguali multiplici della prima A, e terza B, per coſtruttione, ſono le due E, & F; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta D, ſono G, ed H. E perche E s'è maggiore di G, per quel che s'è dimoſtrato, ancora F è maggiore di H; e ſe E foſſe minore, ò vguale à G, ancora F ſarebbe minore, ò vguale ad H; per la 6. defin. di queſto, la prima A alla ſeconda C, hà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza B alla quarta D. Per la qual coſa quando A à B hà l'iſteſſa proportione, che C à D, permutando, hauerà A à C l'iſteſſa proportione, che hà B à D, come fù propoſto dimoſtrare.

a 11. del 5.
b 21. del 5.
c 14. del 5.

SCOLIO.

L'antecedente dimoſtratione hà ſolamente luogo quando le quattro quantità proportionali ſono del medeſimo genere. Perche eſſendo le due E, F, vguali multiplici delle due A, B; ſaranno le quattro E, F, A, B del medeſimo genere; e per l'iſteſſa ragione le quattro G, H, C, D, ſaranno del medeſimo genere: ſiche ſe le due A, B, ſono d'altro genere, che le due C, D; le due E, F,

non ſaranno del medeſimo genere con le due G, H: e perciò ſarebbe errore il dire, che la quantità E ſia maggiore, ò minore, ò vguale alla quantità G; come ne meno ſi deue dire, che F ſia maggiore, ò vguale, ò minore di H; e perciò in modo alcuno può hauerui luogo la ſeſta definitione, dalla quale dipende la natura della medeſima proportione; ed in conſeguenza quando le quattro quantità proportionali non ſono del medeſimo genere, ne meno ſi poſſono permutare.



Dimoſtrò Euclide nella 14. propoſitione, che ſe quattro quantità ſono proportionali, e la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla terza, che ancora la ſeconda è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta; mà perche i Geometri coſtumano ſpeſſo, quando la prima è maggiore, ò minore, ò vguale alla ſeconda, conchiudere, che anco la terza è maggiore, ò minore, ò vguale alla quarta, per non laſciare cos'alcuna mancante, la proueremo come fà il Commandino, ed il Clauio nel ſeguente modo.

Habbia A à B l'iſteſſa proportione che hà C à D. Dico che ſe A è maggiore di B, ancora C è maggiore di D; e ſe A è vguale, ò minore di B, ſarà C vguale, ò minore di D.

Perche A à B è come C à D, permutando a *A à C ſarà come B à D; ſi che preſa*

a 16. del 5.

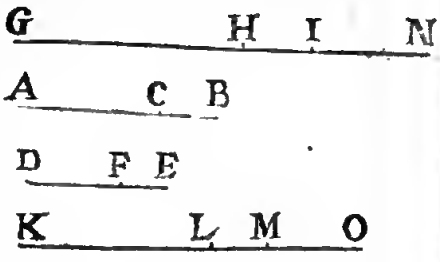
A come prima quantità, C ſeconda, B terza, e D quarta; eſſendo la prima A alla ſeconda C, come la terza B alla quarta D, per la 14. propoſitione di queſto, ſe la prima A è maggiore della terza B, anco la ſeconda C ſarà maggiore della quarta D; e ſe A è minore, ò vguale à B, ancora C ſarà minore, ò vguale à D, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se le quantità compoſte ſono proportionali, le medeſime diuiſe ſaranno proportionali.

Habbia AB à BC l'iſteſſa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, diuidendo, AC à CB hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà DF ad FE.

Si prendano gli vguali multiplici delle quattro quantità A C, C B, D F, F E, che ſiano GH, HI, KL, LM; cioè GH ſia multiplice di A C; la quantità HI multiplice di CB; la quantità K L, di D F; e la quantità L M multiplice di FE. Perche GH è multiplice di A C, come H I è multiplice di C B; ſarà



GI [a] multiplice di AB, come GH è multiplice di AC; e per l'iſteſſa ragione KM ſarà multiplice di ED, come KL è multiplice di DF. Ma per coſtruttione KL è multiplice di DF, come GH è multiplice di AC; ſarà MK multiplice di ED, come GH è multiplice di AC. Fù dimoſtrato GH multiplice di AC, come IG è multiplice di AB; ſarà MK multiplice di ED, come IG è multiplice di AB. Di nuouo ſi prendano due altri vguali multiplici delle due CB, FE, ſecondo qualunque multiplicatione; e ſia IN multiplice di CB, come MO è multiplice di FE. E perche IH è multiplice di CB, come ML è multiplice di FE; ſarà tutta NH [b] multiplice di CB, come LO è multiplice di FE. Si conſiderino quattro quantità, cioè AB prima, BC ſeconda, DE terza, ed EF quarta. Gli vguali multiplici della prima AB, e terza DE, ſono, per quel che s'è dimoſtrato, GI, & KM; e gli vguali multiplici della ſeconda CB, e quarta FE, ſono HN, ed LO. E perche la proportione della prima AB alla ſeconda BC, per ipoteſi, è come la terza DE alla quarta EF; per la natura della medeſima proportione ſpiegata nella 6. definitione, ſe GI, ch'è multiplice della prima, ſupera HN, ch'è multiplice della ſeconda, ancora KM, ch'è multiplice della terza, ſupera LO, ch'è multiplice della quarta; e ſe GI è minore, ò vguale ad HN, ſarà ancora KM minore, ò vguale ad LO. Suppoſto prima, che GI ſia maggiore di HN; leuatane la commune IH, [c] reſta GH maggiore di IN; e per l'iſteſſa ragione eſſendo KM maggiore di LO, leuatane la commune LM, [d] reſta KL maggiore di MO. Similmente ſe GI è vguale ad HN, ed anco KM è vguale ad LO, leuatone le communi HI, LM, [e] reſta GH vguale ad IN, e KL vguale ad MO; e parimente eſſendo GI minore di HN, ed anco KM minore di LO, leuatane le communi HI, LM, reſta GH [f] minore di IN, e KL minore di MO. Si conſiderino quattro altre quantità, cioè la prima AC, la ſeconda CB, la terza DF, e la quarta FE. Gli vguali multiplici della prima AC, e terza DF, ſono, per coſtruttione, GH, & KL; e gli vguali multiplici della ſeconda CB, e quarta FE, ſono IN, ed MO. E perche s'è dimoſtrato, che ſe GH è maggiore di IN, ancora KL è maggiore di MO; e ſe GH è minore, ò vguale ad IN, ancora KL è minore, ò vguale ad MO; per la 6. definitione di queſto, la prima AC alla ſeconda CB haurà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza DF alla quarta FE. Per la qual coſa ſe AB à BC è come DE ad EF, ſarà, diuidendo, AC à CB, come DF ad FE, ch'era da dimoſtrarſi.

a 1. del 5.

b 2. del 5.

c 5. aſſiom.

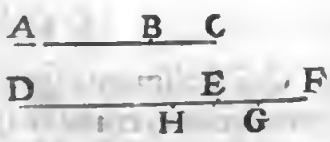
d 5. aſſioma.

e 3. aſſiom.

f 5. aſſiom.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XVIII.

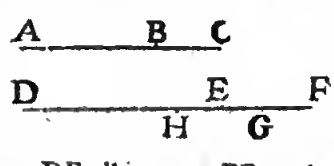
Se le quantità diuiſe ſono proportionali, compoſte ancora ſaranno proportionali.



Habbia AB, à BC, l'iſteſſa proportione, quale hà DE ad EF. Dico che, componendo, haurà AC à CB, l'iſteſſa proportione quale hà DF, ad FE.

Se AC non hà l'iſteſſa proportione à CB, quale hà DF ad FE, haurà

DF ad vn altra quantità maggiore, ò minore di FE, l'istessa proportione, che hà AC à CB. Sia prima quella quantità la notata FG minore di EF; sarà DE minore di DG. Perche AC à CB è come DF ad FG, diuidendo, AB à BC [a] hauerà l'istessa proportione, quale hà DG à GF; ma la proportione di AB à BC, per ipotesi, è come quella di DE ad EF; hauerà DG à GF [b] l'istessa proportione, quale hà DE ad EF. Hor perche la prima DG alla seconda GF è come la terza DE alla quarta EF; e la prima DG è maggiore della terza DE; la seconda FG [c] sarà maggiore della quarta EF; la parte maggiore del tutto, [d] ch'è impossibile; non dunque DF hà l'istessa proportione ad vna quantità minore di FE, quale hà AC à CB.



a 17. del 5.
b 11. del 5.
c 14. del 5.
d 9. assioma.

Di nuouo habbia DF ad vna quantità, come FH, maggiore di EF, l'istessa proportione, quale hà AC à CB; sarà DE maggiore di DH; e diuidendo DH ad HF [e] sarà come AB à BC; mà per ipotesi AB à BC è come DE ad EF; sarà DH ad HF [f] come DE ad EF; & essendo la prima DH alla seconda HF, come la terza DE alla quarta EF; e la prima DH è minore della terza DE; sarà la seconda HF [g] minore della quarta EF; il tutto minore della parte, [h] ch'è impossibile: non dunque DF ad vna maggiore di FE hà l'istessa proportione, quale hà AC à CB; ne meno, per quel che s'è dimostrato, ad vna minore, ma la proportione di DF ad FE è come quella di AC à CB, ch'era da dimostrarsi.

e 17. del 5.
f 11. del 5.
g 14. del 5.
h 9. assioma.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XIX.

Se il tutto hà l'istessa proportione al tutto, quale hà la parte detratta alla parte detratta; hauerà il rimanente al rimanente l'istessa proportione, quale hà il tutto al tutto.

Habbia il tutto AB al tutto CD l'istessa proportione, quale hà la parte AE alla parte CF. Dico che il rimanente EB al rimanente FD, sarà come il tutto AB al tutto CD.

Perche AB à CD è come AE à CF, permutando, sarà AB ad AE [a] come CD à CF; e diuidendo, BE ad EA [b] sarà come DF ad FC; e permutando di nuouo, BE ad FD [c] sarà come AE à CF; ma AE à CF, per ipotesi, è come AB à CD; sarà EB ad FD, [d] come tutta AB à tutta CD, ch'era da dimostrarsi.

a 16. del 5.
b 17. del 5.
c 16. del 5.
d 11. del 5.

COROLLARIO.

Qui facilmente si può dimostrare la conuersione della proportione, come fù spiegato nella defin. 16.; cioè se AB à BC è come DE ad EF; sarà, per la conuersione della pro-

portio-

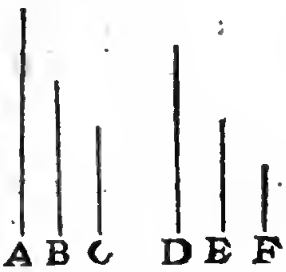
portione, B A ad A C come E D,

à D F. Perche A B à B C è come D E ad E F; diuidendo, A C à C B [a] sarà come D F ad F E; ed inuertendo, sarà B C à C A [b] come E F ad F D; si che, componendo, sarà B A ad A C [c] come E D à D F, ch'è il nostro proposto.

a 17. del 5.
b Corollario alla 4. del 5.
c 18. del 5.

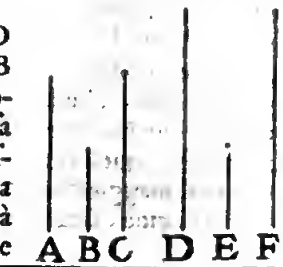
THEOREMA XX. PROPOSITIONE XX.

Se siano tre grandezze da vna parte, e tre altre da vn altra parte nella proportione ordinata, se la prima delle prime è maggiore della terza, per l'egualità, ancora la prima dell'altre sarà maggiore della terza; e se la prima delle prime è vguale, o minore della terza, ancora la prima dell'altre sarà vguale, ò minore della terza.



Siano tre grandezze, come A, B, C, da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn altra parte, le quali siano nell'ordinata proportione; cioè, che la proportione di A à B sia come quella di D ad E, e la proportione di B à C sia come quella di E ad F. Dico che, per l'egualità, se A è maggiore di C, ancora D sarà maggiore di F; e se A è vguale, ò minore di C, ancora D sarà vguale, ò minore di F. Perche B à C, per ipotesi, è come E à F, sarà, inuertendo, C à B [a] come F ad E. Suppostо prima che A sia maggiore di C. Dico, che D è maggiore di F. Perche A è maggiore di C, presa B come terza quantità, la maggiore A [b] hauerà maggior proportione alla terza B, di quella, che hà la minore C alla medesima B. Ma la proportione di D ad E, per ipotesi, è l'istessa che la proportione di A à B, hauerà D ad E [c] maggior proportione di quella, che hà C à B; fù dimostrata C à B hauere l'istessa proportione, quale hà F ad E, hauerà D ad E [d] maggior proportione di quella, che hà F alla medesima E. Ma, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà maggior proportione, è maggiore; [e] hauendo D maggior proportione ad E di quella, che hà F ad E, sarà D maggiore di F, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a Corollario alla 4. del 5.
b 8. del 5.
c 13. del 5.
d 13. del 5.
e 10. del 5.



Di nuouo sia A vguale à C. Dico, che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, presa B come terza quantità, hauerà A à B [f] l'istessa proportione, che hà C à B. Ma D ad E hà l'istessa proportione, che A à B, hauerà D ad E [g] l'istessa proportione, quale hà C à B; fù mostrata la proportione di F ad E essere come quella di C à B; hauerà D ad E [h] l'istessa proportione, quale

f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.

k 9.del 5. hà F alla medeſima E. Per la qual coſa D k è vguale ad F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

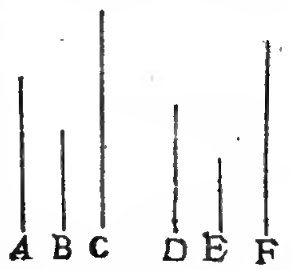
Finalmente, ſuppoſto che A ſia minore di C. Dico, che D è minore di F. Perche A è minore di C, preſa B come terza quantità, la proportione di A à B l ſarà minore di quella, che hà C alla medeſima B; ma D ad E è come A à B, hauerà D ad E m minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimoſtrata la proportione di F ad E eſſere come quella di C à B; hauerà D ad E n minor proportione di quella, che hà F alla medeſima E. E perche, quando due quantità hanno proportione ad vna terza, quella, che hà minor proportione, o è minore; hauendo D minor proportione ad E, che F ad E, ſarà D minore di F, come fù propoſto dimoſtrare.

l 8.del 5.

m 13. del 5.

n 13. del 5.

o 10. del 5.

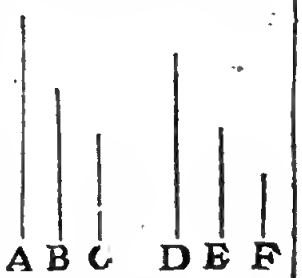


THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXI.

Se ſaranno tre quantità da vna parte, e tre altre da vn'altra parte nella perturbata proportione, per l'egualità, ſe la prima delle prime è maggiore della terza, ancora la prima dell'altre ſarà maggiore della terza; e ſe la prima delle prime è vguale, ò minore della terza, ancora la prima dell'altre ſarà vguale, ò minore della terza.

Siano tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte, nella perturbata proportione; cioè, che la proportione di A à B ſia come quella di E ad F; e la proportione di B à C ſia come quella di D ad E. Dico che, per l'egualità, ſe A è maggiore di C, ancora D ſarà maggiore di F; e ſe A è vguale, ò minore di C, ancora D ſarà vguale, ò minore di F. Perche B à C, per ipoteſi, è come D ad E, inuertendo, a ſarà C à B, come E à D.

a Corol. alla 4. del 5.



Suppoſto prima che A ſia maggiore di C. Dico che D è maggiore di F. Perche A è maggiore di C, preſa B come terza quantità, hauerà A à B b maggior proportione di quella, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; hauerà E ad F c maggior proportione di quella, che hà C à B. Fù dimoſtrata C à B hauere l'iſteſſa proportione, che hà E à D; hauerà E ad F d maggior proportione di quella, che hà la medeſima E à D. Quando vna quantità ha proportione à due, e quella, alla quale hà maggior proportione, è minore; hauendo E maggior proportione ad F di quella, che hà à D, ſarà F minore di D, cioè, ſarà D maggiore di F, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

b 8.del 5.

c 13.del 5.

d 13. del 5.

e 10.del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia vguale à C. Dico che D è vguale ad F. Perche A è vguale à C, preſa B come terza quantità, hauerà A à B [f] l'iſteſſa proportione, che hà C à B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B, hauerà E ad F [g] l'iſteſſa proportione, che hà C à B; fù dimoſtrata C à B hauere l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; hauerà E ad F [h] l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; per il che D K è vguale ad F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

f 7. del 5.
g 11. del 5.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

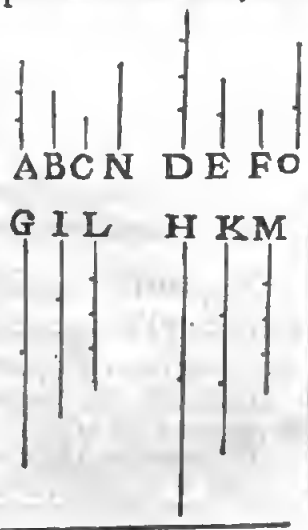
Finalmente ſuppoſto che A ſia minore di C. Dico che D ſarà minore di F. Perche A è minore di C, preſa B come terza quantità, hauerà A [l] minor proportione à B di quella, che hà C alla medeſima B; ma la proportione di E ad F è come quella di A à B; hauerà E ad F [m] minor proportione di quella, che hà C à B; fù dimoſtrato hauere C à B l'iſteſſa proportione, quale hà E à D; hauerà E ad F [n] minor proportione di quella, che hà la medeſima E à D. Quando vna terza quantità hà proportione à due, [o] quella, alla quale hà minor proportione, è maggiore; eſſendoſi dimoſtrato hauere E ad F minor proportione di quella, che hà E à D, in conſeguenza ſarà F maggiore di D, cioè D minore di F, ch'era da dimoſtrarſi.

l 18. del 1.
m 13. del 5.
n 13. del 5.
o 10. del 5.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXII.

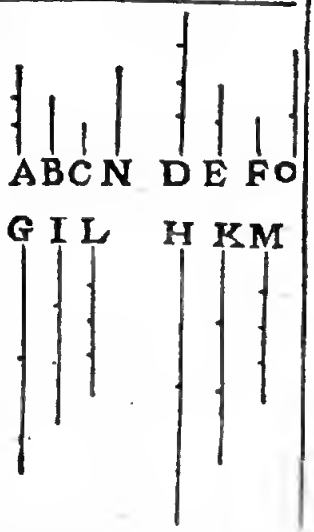
Se ſaranno quante grandezze ſi vogliano da vna parte, ed altretante da vn altra, nella proportione ordinata; per l'egualità, la proportione della prima delle prime all'vltima, ſarà l'iſteſſa, che la proportione della prima delle altre, all'vltima.

Siano prima tre quantità, come A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella proportione ordinata; cioè che la proportione di A à B ſia come quella di D ad E, e la proportione di B à C ſia come quella di E ad F. Dico che, per l'egualità, la proportione di A à C è come quella di D ad F. Si prendano gli vguali multiplici delle due prime A, & D, che ſiano G, ed H. Similmente ſi prendano gli vguali multiplici delle due ſeconde B, ed E, che ſiano I, & K; e ſi prendano gli vguali multiplici delle due terze C, ed F, che ſiano L, ed M.



Perche la prima A, alla ſeconda B, per ipoteſi, è come la terza D, alla quarta E; ſono G, ed H gli vguali multiplici della prima

A, e terza D, e le due I, & K ſono vguali multiplici della ſeconda B, e quarta E; ſarà
a 4. del 5. la proportione di G ad I [a] come quella di H à K. Similmente, perche la prima B alla ſeconda C è come la terza E alla quarta F, e per coſtruttione le due I, & K ſono vguali multiplici della prima B, e terza E; come anco le due L, ed M ſono vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F; ſarà la proportione di I
b 4. del 5. ad L, [b] come quella di K ad M: dal che le
c 19. defin. del 5. quantità G, I, L, & H, K, M [c] ſono nella proportione ordinata; e perciò ſe G è maggiore
d 20. del 5. di L, anco H [d] ſarà maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H ſarà vguale, ò minore di M. Si conſiderino quattro quantità, cioè la prima A, la ſeconda C, la terza D, e la quarta F. Gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per coſtruttione, ſono G, ed H; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F, ſono L, ed M; e perche s'è dimoſtrato che ſe G è maggiore di L, anco H è maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di L, ancora H è vguale, ò minore di M; la proportione della prima A alla ſeconda C
e 6. defin. del 5. [e] ſarà l'iſteſſa, che la proportione della terza D alla quarta F.



Di nuouo ſiano più di tre quantità, come A, B, C, N, da vna parte, ed altrettante, come D, E, F, O, da vn altra, nella proportione ordinata. Dico che A ad N ſarà come D ad O.

Si conſiderino tre quantità da vna parte, come A, C, N, e tre altre da vn altra parte, come D, F, O: eſſendoſi dimoſtrata la proportione di A à C eſſere come quella di D ad F; e per ipoteſi, C ad N è come F ad O; ſa-
f 19. defin. del 5. ranno le tre A, C, N, [f] da vna parte, e l'altre tre D, F, O, da vn altra parte, nella proportione ordinata; e per quel, che s'è dimoſtrato, la proportione di A ad N ſarà l'iſteſſa, che quella di D ad O. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſaranno più di quattro per parte, come fù propoſto dimoſtrare.

SCOLIO.

La dimoſtratione ſeguente la pongo in queſto luogo, douendo ſeruire ne gl'elementi conici, ed in altri luoghi.

Se quattro quantità ſono proportionali, detrattone le metà de gl'antecedenti, ò le metà de i conſeguenti; i rimanenti ſono proportionali.

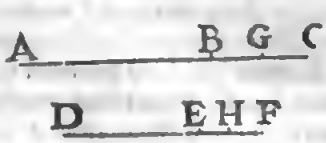
Habbia AB à BC l'iſteſſa proportione, quale hà DE ad EF: Diuiſi prima gli antecedenti AB, DE in due parti vguali in G, ed H. Dico che GB à

BC e

BC è come HE ad EF. Perche AG è vguale à GB, & DH è vguale ad HE; ſarà AG à GB [a] *come DH ad HE, e componendo, AB à BG* [b] *ſarà come DE ad EH; ed inuertendo, BG à BA* [c] *ſarà come EH ad ED. Si conſiderino trè quantità BG prima, BA ſeconda, & BC terza da vna parte; e trè altre EH prima, ED ſeconda, & EF terza, da vn altra parte. Perche la prima BG alla ſeconda BA è dimoſtrata eſſere come la prima EH alla ſeconda ED; e la ſeconda AB alla terza BC, per ipoteſi, è come la ſeconda DE alla terza EF; per l'vgualità, la prima BG alla terza BC,* [d] *ſarà come la prima EH alla terza EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

a Corol. alla 7. del 5.
b 18. del 5.
c Corol. alla 4. del 5.
d 22. del 5.

Di nuouo ſiano diuiſi i conſeguenti BC, EF in due parti vguali in G, ed H. Dico che ſe AB à BC è come DE ad EF, ſarà ancora AB à BG, come DE ad EH. Perche BG è vguale à GC, & EH è vguale ad HF; ſarà CG à GB, [e] *come FH, ad HE; e componendo, CB à BG* [f] *ſarà come FE ad EH. Perche AB à BC per ipoteſi, e come DE ad EF, componendo, ſarà AC à CB* [g] *come DF ad FE; mà CB à BG è come FE ad EH, ſarà per l'vgualità AB à BG* [h] *come DE ad EH, il che era da dimoſtrarſi.*



e Corol. alla 7. del 5.
f 18. del 5.
g 18. del 5.
h 22. del 5.

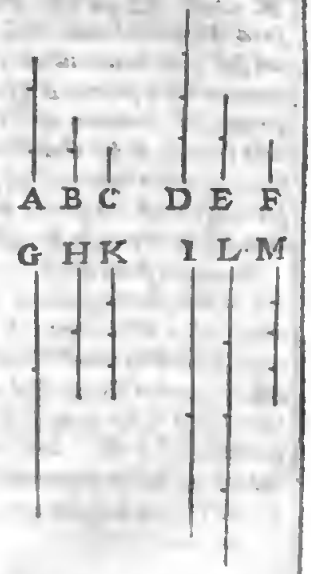
THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXIII.

Se ſiano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra, nella perturbata proportione; per l'egualità, la prima delle prime alla terza hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la prima dell'altre alla terza.

Siano le tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè che la proportione di A à B ſia come quella di E ad F; ed habbia B à C l'iſteſſa proportione, che hà D ad E. Dico che per l'egualità, hauerà A à C l'iſteſſa proportione, che hà D ad F. Si prendano gli vguali multiplici di A, B, D, che ſiano G, H, I; e ſi prendano gli vguali multiplici di C, E, F, che ſiano K, L, M. Perche G, ed H ſono vguali multiplici di A, & B, hauerà G ad H l'iſteſſa proportione, che hà la quantità A alla quantità B. Similmente eſſendo L, ed M vguali multiplici di E, ed F; la proportione di L ad M [b] ſarà come quella di E ad F. Hor hauendo G ad H l'iſteſſa proportione di A à B; ed E ad F, per ipoteſi, è come A à B; hauerà G ad H [c] l'iſteſſa proportione, che hà E ad F; fù dimoſtrata L ad M

a 15. del 5.
b 15. del 5.
c 11. del 5.

come E ad F; ſarà G ad H [d] come L ad M. In oltre perche la prima B alla ſeconda C, per ipoteſi, è come la terza D alla quarta E, ſono per coſtruttione H, ed I, vguali multiplici della prima B, e terza D, e le due K, ed L ſono vguali multiplici della ſeconda C, e quarta E; la proportione di H, ch'è multiplice della prima, à K, [e] multiplice della ſeconda, ſarà l'iſteſſa, che la proportione, che hà I, ch'è multiplice della terza, ad L multiplice della quarta. Hor eſſendo G ad H, come L ad M, & H à K come I ad L, le quantità G, H, K, & I, L, M, ſono [f] nella perturbata proportione; e per l'vgualità, ſe G è maggiore di K, [g] ancora I ſarà maggiore di M; e ſe G è vguale, ò minore di K, ancora I ſarà vguale, ò minore di M. Si conſiderino quattro quantità, cioè A prima, C ſeconda, D terza, ed F quarta: gli vguali multiplici della prima A, e terza D, per coſtruttione, ſono G, ed I; e gli vguali multiplici della ſeconda C, e quarta F, ſono K, ed M; e perche G, multiplice della prima, s'è maggiore di K, multiplice della ſeconda, ancora I, multiplice della terza, è maggiore di M, multiplice della quarta, [h] ſarà la proportione della prima A alla ſeconda C, come quella della terza D alla quarta F, ch'era da dimoſtrarſi.

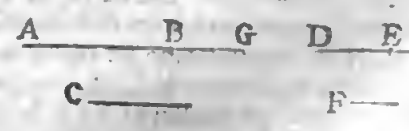


d 11. del 5.
e 4. del 5.
f 20. defin. del 5.
g 21. del 5.
h 6 defin. del 5.

* e ſe G è minore, ò vguale à K ancora I è minore ò, vguale ad M

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIV.

Se la prima alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza alla quarta; e la quinta alla ſeconda hà l'iſteſſa proportione, che la ſeſta alla quarta; la compoſta della prima, e quinta, hauerà l'iſteſſa proportione alla ſeconda, quale hà la compoſta della terza, e ſeſta, alla quarta.



Habbia la prima AB alla ſeconda C, l'iſteſſa proportione, quale hà la terza DE alla quarta F; e la quinta BG alla ſeconda C, habbia l'iſteſſa proportione, che hà la ſeſta EH, alla quarta F. Dico che AG, compoſta della prima, e quinta, hauera l'iſteſſa proportione alla ſeconda C, quale hà DH compoſta della terza, e ſeſta, alla quarta F. Perche BG à C è come EH ad F, inuertendo, C à BG [a] ſarà come F ad EH.

a Coroll. 4. del 5.

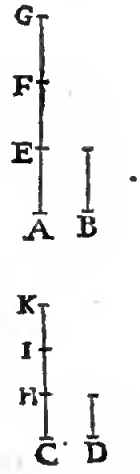
Si conſiderino tre quantità da vna parte, come AB, C, BG, e tre da vn altra, come DE, F, EH. Perche, per ipoteſi, la proportione di AB à C è come quella di DE ad F, e la proportione di C à BG s'è dimoſtra-

ta

ta essere come quella di F ad EH; sarà, per l'vgualità, [b] AB à BG, come DE ad EH; e componendo, AG à GB [c] sarà come DH ad HE. Si considerino tre altre quantità come AG, GB, C da vna parte; e tre altre, come DH, HE, F, da vn altra parte. Essendosi dimostrato, che AG à GB è come DH ad HE, e per ipotesi, BG à C è come EH ad F; sarà per l'egualità [d] AG à C come DH ad F; per la qual cosa AG composta della prima, e quinta, hà l'istessa proportione à C seconda, quale hà DH composta della terza, e sesta alla quarta F, ch'era da dimostrarsi.

[b] 22. del 5.
[c] 18. del 5.
[d] 22. del 5.

COROLLARIO.



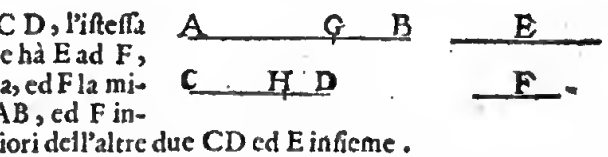
Dall'antecedente propositione si caua, che se A è multiplice di B, come C è multiplice di D, hauerà A à B l'istessa proportione, quale hà C à D. Perche essendo A multiplice di B, come C è multiplice di D, tante volte A è misurata da B, per quante volte C è misurata da D. Si diuida A nelle parti vguali à B, che siano AE, EF, FG; e si diuida CK nelle parti vguali à D, che siano CH, HI, IK. Essendo AE vguale à B, & CH vguale à D; sarà AE à B, come CH à D; e per l'istessa ragione, EF à B sarà come HI à D; ed ancora FG à B sarà come IK à D. Hor se la prima AE alla seconda B è come la terza CH alla quarta D; e la quinta EF alla seconda B è come la sesta HI alla quarta D; sarà AF, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come CI, composta della terza, e sesta, alla quarta D. Similmente la prima AF alla seconda B è come la terza CI alla quarta D; e la quinta FG alla seconda B è come la sesta IK alla quarta D; sarà AG, composta della prima, e quinta, alla seconda B, come CK, composta della terza, e sesta, alla quarta D, come si disse.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXV.

Se quattro quantità sono proportionali; la massima, e

la minima, giunte insieme, sono maggiori delle altre due.

Habbia AB à CD, l'istessa proportione, quale hà E ad F, e sia AB la massima, ed F la minima. Dico che AB, ed F insieme, sono maggiori dell'altre due CD ed E insieme.



Si concepisca da AB detratta AG vguale ad E, e da CD, s'intenda detratta CH vguale ad F; sarà AG à CH [a] come E ad F, cioè [b] come AB à CD. Se dunque il tutto AB al tutto CD è come la parte AG alla parte CH; sarà il restãte GB [c] al restãte HD come tutta AB à tutta CD; ma tutta AB è maggiore di CD, stãte ch'è massima, sarà GB [d] maggiore di HD. In oltre perche AG è vguale ad E, e la quantità CH è vguale ad F, le due AG, ed F insieme, [e] sono vguali alle due CH, ed E, insieme. Hor alle due AG, ed F insieme, s'aggiunga la maggiore GB; ed alle due CH, ed E insieme, s'aggiunga la minore HD; le due AB, ed F insieme, [f] saranno maggiori delle due CD, ed E insieme, ch'era da dimostrarsi.

a Corol. alla 7. de 15.
b 11. del 5.
c 19. del 5.
d Scolio alla 16. del 5.
e 2. assioma.
f 4. assioma.

SCOLIO I.

Quando sono quattro quantità proportionali, e l'antecedente di vna proportione è la massima di tutte quelle quantità, necessariamente il conseguente dell'altra proportione è la minima.

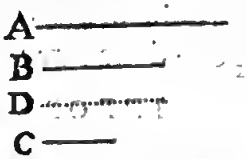
Per essempio se AB à CD è come E ad F, & AB è la massima; sarà F la minima; stante che essendo AB à CD come E ad F, & AB è maggiore di CD, per essere la massima, sarà E [a] maggiore di F. E similmente essendo AB, à CD come E ad F, e la prima AB è maggiore della terza E; sarà la seconda CD [b] maggiore della quarta F: dal che tanto CD, quanto E è maggiore di F, e perciò F sarà la minima. Il che Euclide hà preso come cosa nota, per esser cosa di poco momento à dimostrarsi.

a Scol. alla 16. del 5.
b 14. del 5.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che quando tre quantità sono proportionali, la massima, e la minima, giunte insieme, sono maggiori del doppio della rimanente.

Per essempio habbia A à B l'istessa proportione, che hà B à C, e sia A la massima, & C la minima, le due A, & C insieme, sono maggiori del doppio di B. Si concepisca la quantità D vguale à B, la proportione di A à B sarà l'istessa, che quella di D à C, e per quel, che s'è dimostrato, le due A, & C insie-



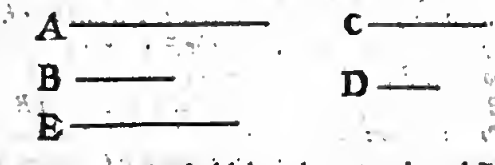
me, ſono maggiori delle due B, & D inſieme, cioè ſono maggiori del doppio di B, come ſi diſſe.

SCOLIO II.

Quì Euclide dà fine al quinto Libro; mà perche molte altre propoſitioni, delle quali ſi ſeruono Autori grauiſſimi, come Archimede, Apollonio Pergeo, ed altri, che ne i loro ſcritti le citano, quaſi come coſe d'Euclide, ſeguendo ancora io il metodo tenuto da varij Commentatori d'Euclide, e confrontando il tutto in Pappo Aleſſandrino, doue queſte ſi trouano, le pongo ſucceſſiuamente con quella maggior facilità, che mi ſia poſſibile.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVI.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; inuertendo, la ſeconda alla prima hauerà minor proportione, che la quarta alla terza.



Habbia A à B maggior proportione, che C à D. Dico che, inuertendo, B ad A hauerà minor proportione di quella, che hà D à C.

Si concepiſca la quantità E in modo, che habbia tal proportione à B, quale hà C à D, ed inuertendo B ad E, [a] ſarà come D à C.

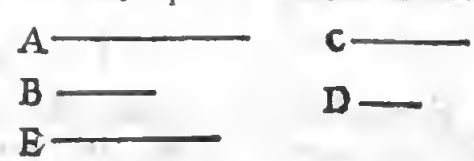
Perche A à B hà maggior proportione di quella, che hà C à D, e C à D, per coſtruttione, è come E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medeſima B. Quando due quantità hanno proportione ad vna terza, [c] quella, che hà maggior proportione, è maggiore; hauendo A maggior proportione à B di quella, che hà E à B, ſarà A maggiore di E. Inoltre perche A è maggiore di E, preſa B, come terza quantità, hauerà B alla maggiore A [d] minor proportione di quella, che hà alla minore E; ma B ad E, per quel che s'è dimoſtrato, è come D à C, hauerà B ad A [e] minor proportione di quella, che hà D à C, ch'era da dimoſtrarſi.

a Corol. alla 4. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e 13. del 5.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXVII.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; permutando, la prima alla terza hauerà maggior proportione, che la ſeconda alla quarta.

Habbia la prima A alla ſeconda B maggior proportione, che la terza C alla quarta D. Dico che permutando, la prima A alla terza C hauerà maggior proportione, che la ſeconda B alla quarta D. Si concepiſca la quantità E, che habbia l'iſteſſa proportione à B, quale hà C à D; e permutando, hauerà



a 16.del 5. E à C [a] l'iſteſſa proportione, che hà B à D. Perche A à B hà maggior proportione, che C à D, e la proportione di C à D è come quella di E à B, hauerà A à B [b] maggior proportione di quella, che hà E alla medeſima B: per la qual coſa A [c] ſarà maggiore di E. In oltre eſſendo A maggiore di E, preſa C come terza quantità, la maggiore A [d] hauerà maggior proportione alla terza C, che la minore E alla medeſima C: mà la proportione di A à C, per quel che s'è dimoſtrato, è come B à D, hauerà A à C [e] maggior proportione di quella, che hà B à D, come fù propoſto dimoſtrare.

b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 8.del 5.
e 13.del 5.

SCOLIO.

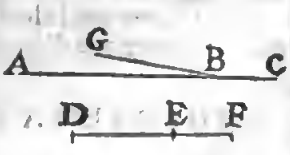
Nell'iſteſſo modo, col ſolo mutare la voce di maggiore in minore, ſi proverà, che ſe A à B hà minor proportione, che C à D, permutando A à C hauerà minor proportione, che B à D. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione, e ſi dimoſtri, come prima, che E à C è come B à D. Perche A hà minor proportione à B, che C à D, e la proportione di C à D è come E à B, hauerà A à B [a] minor proportione, che E alla medeſima B; e perciò A [b] è minore di E. Preſa C come terza quantità, hauerà A minore alla terza C, [c] minor proportione, che E maggiore à C; mà E à C è come B à D, hauerà A à C [d] minor proportione, che B à D, ch'è il noſtro propoſto.

a 13.del 5.
b 10.del 5.
c 8.del 5.
d 13.del 5.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Se la prima alla ſeconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; componendo, la prima con la ſeconda hauerà maggior proportione alla ſeconda, che la terza con la quarta alla quarta.

Habbia A B à B C maggior proportione di quella, che hà D E ad E F. Dico che, componendo, A C à C B haurà maggior proportione di quella, che hà D F ad F E. Si concepiſca la quantità G B in modo, che G B à B C



a 18.del 5. ſia come D E ad E F, e componendo, ſarà G C à C B [a] come D F ad F E. Perche A B à B C hà maggior proportione, che D E ad E F, e la proportione di D E ad E F è come G B à B C, hauerà A B à B C [b] maggior proportione di quella, che hà G B alla medeſima B C; e perciò A B [c] ſarà maggiore di G B; vgualmente s'aggiunga la parte B C, ſarà A C [d] mag-

b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 4.aſſioma.

giore

giore di tutta G C. Si prenda B C come terza quantità, hauerà la maggiore AC [e] maggior proportione à B C di quella, che hà G C alla medesima CB; ma GC à CB, per quel che s'è dimostrato, è come DF ad FE, hauerà AC à CB [f] maggior proportione di quella, che hà DF ad FE, ch' era da dimostrarsi. e 8.del 5. f 13.del 5.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che se A B à B C hà minor proportione, che DE ad E F; componendo, A C à CB hauerà minor proportione, che DF ad FE. Perche se AB à BC hà minor proportione, che DE ad EF, all'incontro DE ad EF hauerà maggior proportione, che AB à BC; e componendo, DF ad FE [g] hauerà maggior proportione di quella, che hà AC à C B. Hor se la proportione di D F ad FE è maggiore della proportione, che hà AC à C B; sarà la proportione di A C à C B minore della proportione, che hà DF ad FE, come si disse. g 28.del 5.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXIX.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; diuidendo, la differenza frà la prima, e seconda, hà maggior proportione alla seconda, che la differenza frà la terza, e quarta alla quarta.

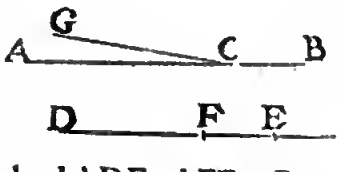
Siano le quattro quantità AB prima, BC seconda, e la differenza sia AC; sia la terza DE, la quarta EF, e la differenza DF. Hor habbia la prima AB alla seconda BC maggior proportione, che la terza DE alla quarta EF. Dico che diuidendo, la differenza AC alla seconda CB, hauerà maggior proportione, che la differenza DF alla quarta FE.

Si concepisca GC in modo, che G B à BC sia come DE ad EF; e diuidendo, sarà G C [a] à CB come D F ad FE. Perche A B à B C hà maggior proportione, che DE ad EF, e la proportione di DE ad EF è come quella di GB à BC, hauerà AB à BC [b] maggior proportione di quella che hà GB alla medesima BC; dal che AB [c] sarà maggiore di GB; e detrattane la commune BC, resta AC [d] maggiore di GC; e presa CB come terza quantità, AC magggiore hauerà maggior proportione alla terza BC [e] di quella, che hà GC minore alla medesima CB; ma GC à CB è come D F ad F E; hauerà A C à C B [f] maggior proportione, che DF ad FE, come fù proposto dimostrare.

a 17.del.5. b 13.del'5. c 10.del 5. d 5.assioma. e 8.del 5. f 13.del 5.

CO-

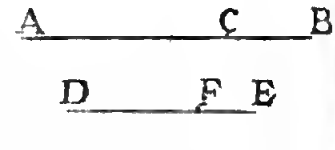
COROLLARIO.



Da quel che s'è detto è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione di quella, che hà DE ad EF, diuidendo, hauerà AC à CB, minor proportione di quella, che hà DF ad FE. Perche hauendo AB à BC minor proportione, che DE ad EF, hauerà DE ad EF maggior proportione, che AB à BC; e
a 19. de 5. diuidendo DF ad FE [a] hauerà maggior proportione, che AC à CB. Hor se la proportione di DF ad F E è maggiore di quella, che hà AC à CB, sarà la proportione di AC à CB minore della proportione di DF ad FE, come si disse.

THEOREMA XXX. PROPOSITONE XXX.

Se la prima alla seconda hà maggior proportione, che la terza alla quarta; per la conuersione della proportione, la prima alla differenza frà la prima, è seconda, hauerà minor proportione di quella, che hà la terza alla differenza frà la terza, e quarta.



Siano le quattro quantità A B prima, BC seconda, DE terza, & F E quarta; e la differenza frà la prima AB, e la seconda B C sia A C; come anco la differenza frà la terza DE, e quarta FE, sia DF. Hor habbia AB prima à B C seconda maggior proportione, che la terza D E alla quarta FE. Dico che, per la cõuersione della proportione, la prima AB alla differenza AC, hà minor proportione, che la terza DE alla differenza DF. Perche AB à BC hà maggior proportione, che DE ad EF, diuidendo,
a 19. del 5. AC à CB [a] hauerà maggior proportione, che DF ad FE; ed inuertendo,
b 26. del 5. BC à CA [b] hauerà minor proportione di quella, che hà E F ad F D; e
c 18. del 5 componendo, BA ad AC [c] hauerà minor proportione di quella, che hà ED à DF, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se AB à BC hà minor proportione, che DE ad EF, per la conuersione

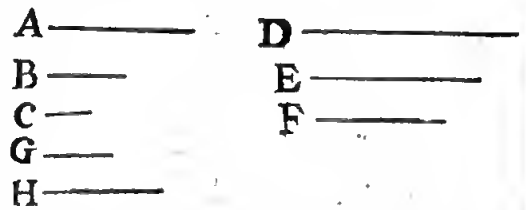
della

della proportione, hauerà BA ad AC maggior proportione di quella, che ha ED à DF; il che si dimostra come prima s'è fatto; cioè, hauendo A B à BC minor proportione, che DE ad EF; diuidendo, AC à CB [a] haverà minor proportione, che DF ad FE; ed inuertendo, BC à CA [b] hauerà maggior proportione, che EF ad FD; e componendo, B A ad AC [c] haverà maggior proportione di quella, che hà ED à DF, come si disse.

a 29. del 5.
b 26. del 5.
c 28. del 5.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXI.

Se siano tre quantità da vna parte, e tre da vn altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla seconda, che la prima dell'altre alla seconda; e la seconda delle prime habbia maggior proportione alla terza, che la seconda dell'altre alla terza; per l'egualità, la prima delle prime alla terza haverà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre come D, E, F, da vn altra parte; e la proportione di A à B sia maggiore della proportione di D ad E; ed habbia B à C maggior proportione che E ad F. Dico che per l'egualità, A à C haverà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiscano le due quantità G, & H in modo, che G à C habbia l'istessa proportione, quale hà E ad F; ed H à G habbia l'istessa proportione, quale hà D ad E: per l'egualità haverà H à C [a] l'istessa proportione, quale hà D ad F. Perche B hà maggior proportione à C di quella, che hà E ad F; e la proportione di E ad F è l'istessa di quella, che hà G à C; haverà B à C [b] maggior proportione di quella, che hà G alla medesima C; e perciò B [c] è maggiore di G. In oltre essendo B maggiore di G, presa A come terza quantità, la terza A haverà maggior proportione alla minore G, [d] che alla maggiore B; ma la proportione di A à B, per ipotesi, è maggiore della proportione, che hà D ad E, la proportione dunque di A à G [e] sarà molto maggiore di quella, che hà D ad E, e perche D ad E è come H à G, haverà A à G [f] maggior

a 22. del 5.
b 13. del 5.
c 10. del 5.
d 8. del 5.
e Scol. alla 13. del 5.
f 13 del 5.

proportione di quella, che hà H alla medeſima G; per la qual coſa A g ſarà maggiore di H. Preſa C come terza quantità, hauerà A à C h maggior proportione di quella, che hà H alla medeſima C; ma H à C è come D ad F, hauerà A à C K maggior proportione di quella, che hà D ad F, ch'era da dimoſtrarſi.

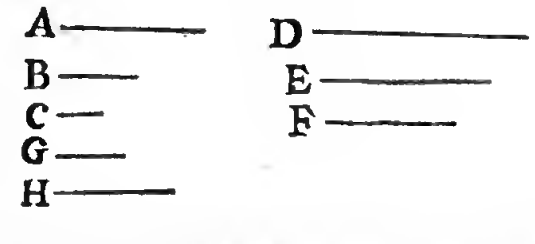
g 10.del 5.
h 8.del 5.
K 13.del 5.

SCOLIO.

Seguendo il medeſimo ordine, e mutando ſolamente le voci di maggiore in minore; ſi dimoſtrerà, che ſe A à B hà minor proportione, che D ad E; e B à C habbia minor proportione, che E ad F; per l'vgualità, A à C hauerà minor proportione, che D ad F.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se ſiano tre quantità da vna parte, e tre da vna altra parte, e la prima delle prime habbia maggior proportione alla ſeconda, che la ſeconda dell'altre alla terza; e la ſeconda delle prime alla terza habbia maggior proportione, che la prima dell'altre alla ſeconda; per l'egualità, la prima delle prime alla terza hauerà maggior proportione, che la prima dell'altre alla terza.



Siano tre quantità A, B, C da vna parte, e tre altre, come D, E, F, da vn'altra parte, ed habbia A à B maggior proportione di quella, che hà E ad F, ed habbia B à C maggior proportione, che D ad E. Dico che A à C hauerà maggior proportione di quella, che hà D ad F. Si concepiſcano due quantità come H, & G in modo, che G à C ſia come D ad E, ed H à G ſia come E ad F; ſarà, per l'egualità, H à C a come D ad F. Perche B à C hà maggior proportione, che D ad E, e la proportione di D ad E è come G à C; hauerà B à C b maggior proportione di quella, che hà G alla medeſima C; e perciò B c è maggiore di G. In oltre, eſſendo B maggiore di G, preſa A come terza quantità, hauerà A alla minore G d maggior proportione di quella, che hà alla maggiore B: ma la proportione di A à B, per ipoteſi, è maggiore della proportione di E ad F; hauerà A à G e molto maggior proportione di quella, che hà E ad F: ma E ad F è come H à G, hauerà A à G f maggior proportione, che H alla medeſima G, per la qual coſa A g ſarà maggiore di H, preſa C come terza quantità, hauerà A à C h maggior proportione di

a 23 del 5.
b 13.del 5.
c 10.del 5.
d 8.del 5.
e Scol. alla 13.del 5.
f 13.del 5.
g 10.del 5.
h 8.del 5.

quella,

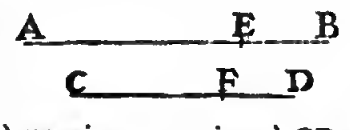
quella, che hà H à C; ma H à C è come D ad F, haverà A à C [K] maggior proportione di quella, che hà D ad F, che era da dimostrarsi. K 13. del 5.

SCOLIO.

Se la proportione di A à B sarà minore della proportione di E ad F; e la proportione di B à C è minore della proportione di D ad E, ripetendo le medesime cose dette, col solo mutare le voci di maggiore in minore, si dimostrerà, che per l'vgualità la proportione di A à C è minore della proportione di D ad F.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Se il tutto hà maggior proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta; il rimanente haverà maggior proportione al rimanente, che il tutto al tutto.



Se il tutto AB hà maggior proportione al tutto CD, che la parte AE alla parte CF. Dico che il rimanente EB haverà maggior proportione al rimanente FD, ch'il tutto AB, al tutto CD. Perche AB hà maggior proportione à CD, che AE à CF, permutando, haverà AB [a] ad AE maggior proportione, che DC à CF; e per la conuersione della proportione, AB à BE [b] haverà minor proportione di quella, che hà CD à DF; e permutando, AB à CD [c] haverà minor proportione di quella, che hà EB ad FD. Hor se la proportione di AB à CD è minore della proportione di EB ad FD; sarà la proportione di EB ad FD maggiore della proportione che hà tutto AB al tutto CD, ch'era da dimostrarsi.

a 27. del 5.
b 30. del 5.
c 27. del 5.

SCOLIO.

Similmente se il tutto hà minor proportione al tutto, che la parte tratta alla parte tratta, ritenendo l'ordine antecedente, col solo mutare le voci di maggiore in minore, si dimostrerà, che l'auanzo all'auanzo hà minor proportione, ch'il tutto al tutto.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIV.

Se saranno quante grandezze si vogliano da vna parte, ed altretante da vn altra parte; e la prima delle prime habbia maggior proportione alla prima delle altre, che la seconda

delle prime alla ſeconda delle altre, e la ſeconda alla ſeconda habbia maggior proportione, che la terza alla terza, e con queſt'ordine per le altre; tutte le prime inſieme à tutte le altre inſieme, haueranno maggior proportione, che tutte le prime, leuatane la prima, à tutte le altre, leuatane la prima. Di più la prima delle prime hauerà maggior proportione alla prima delle altre, che tutte le prime à tutte le altre; e che tutte le prime à tutte le altre haueranno maggior proportione, che l'vltima all'vltima.

Siano prima tre quantità A, B, C, da vna parte, e tre altre D, E, F, da vn altra parte, ed habbia A maggior proportione à D di quella, che hà B ad E; ed habbia B ad E maggior proportione, che C ad F. Dico, che le tre A,B,C, inſieme, alle tre D,E,F, inſieme, hanno maggior proportione, che le due B,C, alle due E,F; che A à D hà maggior proportione, che le tre A,B,C, alle tre D,E,F; e che le tre A,B,C, alle tre D,E,F, hanno maggior proportione, che l'vltima C all'vltima F.

Perche B ad E hà maggior proportione, che C ad F, permutando, B à C [a] hauerà maggior proportione, che E ad F; e componendo B,C, à C [b] hauerà maggior proportione, che E, F, ad F; e permutando di nuouo, B,C, ad E,F, [c] hauerà maggior proportione, che C ad F.

a 27. del 5.
b 28. del 5.
c 27. del 5.

Perche il tutto B,C al tutto E,F hà maggior proportione, che la parte C alla parte F, il rimanente B al rimanente E [d] hauerà maggior proportione, che il tutto B,C, al tutto E,F. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E, e ſi è dimoſtrato che B ad E ha maggior proportione, che B,C, ad E,F, per l'vgualità, hauerà A à D [e] maggior proportione, che le due B,C, alle due E,F; e permutando, A alle due B, C, [f] hauerà maggior proportione, che D alle due E,F; e componendo le tre A, B,C, alle due BC, [g] haueranno maggior proportione, che le tre D, E, F, alle due E,F; e permutando di nuouo, le tre A,B,C, alle tre D,E,F, [h] haueranno maggior proportione, che le due B,C alle due E,F, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

d 33. del 5.
e 31. del 5.
f 27. del 5.
g 28. del 5.
h 27. del 5.

Perche il tutto A,B,C, al tutto D,E,F, hà maggior proportione, che la parte B,C, alla parte E,F, il rimanente A [K] al rimanente D hauerà maggior proportione, che il tutto A,B,C, al tutto D,E,F, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

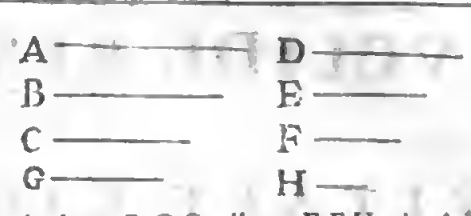
K 33. del 5.

Finalmente perche le tre A,B,C, alle tre D,E,F, hanno maggior proportione, che le due B,C, alle due E,F, e nel principio fù dimoſtrato, che le due B,C, alle due E,F, hanno maggior proportione, che C ad F, per l'vgualità, le tre A,B,C alle tre D,E,F [l] haueranno maggior proportione, che l'vltima C all'vltima F, ch'era da dimoſtrarſi.

l 31. del 5.

Se

Se ſaranno quattro quantità per parte, e ritenendo la prima ipoteſi, habbia C ad F maggior proportione di quella, che hà G ad H. Dico che le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H



hanno maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; che A à D hà maggior proportione, che le quattro A, B, C, G alle quattro D, E, F, H; e che le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H.

Si conſiderino le tre B, C, G, da vna parte, e le altre tre E, F, H, da vn'altra parte, e ſi dimoſtri come prima, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H hanno maggior proportione, che le due C, G, alle due F, H, ſimilmente che B ad E hà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; e che le tre B, C, G, alle tre E, F, H hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H. In oltre perche A à D hà maggior proportione, che B ad E; e per quel che s'è dimoſtrato B ad E hà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; per l'vgualità A à D [m] hauerà maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; e permutando, A alle tre B, C, G, [n] hauerà maggior proportione, che D alle tre E, F, H; e componendo, le quattro A, B, C, G alle tre B, C, G, [o] haueranno maggior proportione, che le quattro D, E, F, H, alle tre E, F, H; e permutãdo di nuouo le quattro A, B, C, G, alle quattro D, E, F, H, [p] haueranno maggior proportione che le tre B, C, G, alle tre E, F, H, ch'era prima da dimoſtrarſi.

m 31. del 5.
n 17. del 5.
o 28. del 5.
p 27. del 5.

Di più perche il tutto A, B, C, G, al tutto D, E, F, H, hà maggior proportione, che la parte B, C, G, alla parte E, F, H; hauerà l'auanzo A all'auanzo D [q] maggior proportione, ch'il tutto A, B, C, G al tutto D, E, F, H, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

q 33. del 5.

Finalmente perche tutte A, B, C, G, à tutte D, E, F, H, hanno maggior proportione, che le tre B, C, G, alle tre E, F, H; e le tre B, C, G, alle tre E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H; per l'vgualità, tutte A, B, C, G, [r] à tutte D, E, F, H, hanno maggior proportione, che l'vltima G all'vltima H. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſaranno più di quattro per parte, ch'è quanto fù propoſto dimoſtrare.

r 31. del 5.

Fine del Quinto Elemento.

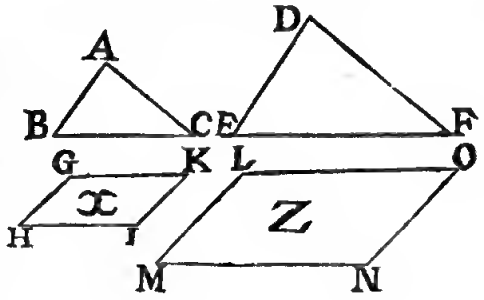
EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SESTO.

DEFINITIONI.

I.

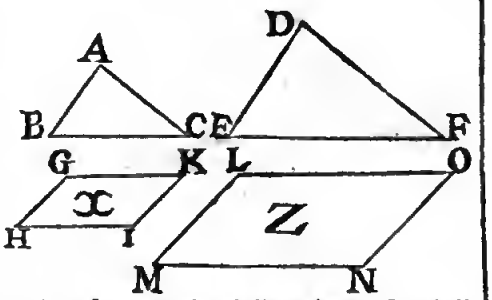
Le figure rettilinee ſono ſimili, quando gli angoli dell' vna ſono vguali à i corriſpondenti angoli dell'altra, e i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali.

NE i triangoli ABC, DEF, ſe l'angolo A ſarà vguale all'angolo D, l'angolo B vguale all'angolo E, l'angolo C vguale all'angolo F; e la proportione del lato AB al lato BC ſia come quella del lato DE al lato EF, (che ſono intorno à gli angoli vguali B & E.) e la proportione di BC à CA ſia come quella di EF ad FD; come ancora la proportione di B A ad A C ſia come quella di ED à DF; i triangoli ABC, DE F, ſi diranno eſſere ſimili frà di loro. Il medeſimo s'intende d'ogn'altra figura piana rettilinea, come le notate X, & Z; cioè, ſe l'angolo G ſarà vguale all'angolo L, l'angolo H vguale all'angolo M, l'angolo I vguale all'angolo N, l'angolo K vguale all'angolo O; e la proportione di GH ad H I ſia l'iſteſſa, che la proportione di LM ad MN; e ſia HI ad I K, come M N ad NO, &c. Le figure rettilinee X, & Z ſi diranno ſimili frà di loro.



I I.

Figure reciproche ſono quelle, quando due lati intorno ad vn angolo di vna ſono eſtreme, e due lati intorno ad vn angolo dell'altra ſono medie di quattro quantità proportionali.



Per eſſempio ſiano prima i triangoli ABC, DEF; ſe la proportione del lato AC al lato EF è l'iſteſſa che la proportione del lato FD al lato BC, gli angoli C, & F ſaranno contenuti da quattro quantità proportionali, delle quali ſarà la prima AC, la ſeconda EF, la terza FD, e la quarta BC; di modo che l'angolo C ſarà contenuto dalle eſtreme, cioè dalla prima AC, e dall'vltima BC, e l'angolo F ſarà contenuto dalle due medie, cioè dalla ſeconda EF, e dalla terza FD; e ſecondo queſte conditioni i triangoli ABC, DEF ſono reciprochi. Similmente ne i parallelogrammi X, & Z, ſe NM ad IH ſarà come IK ad ML, i parallelogrammi X, & Z ſi diranno eſſere reciprochi.

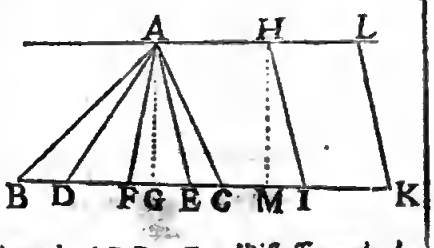
I I I.

La retta linea ſi dice eſſer ſegata ſecondo l'eſtrema, e media proportione, quando tutta la linea alla maggior parte ſia, come la medeſima parte maggiore alla minor parte.

Si concepiſca qualunque retta linea AB, la quale ſe ſarà diuiſa nel punto C in modo, che la proportione di tutta AB alla maggior parte AC, ſia come la medeſima AC alla parte minore CB; la retta AB ſi dirà eſſer diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

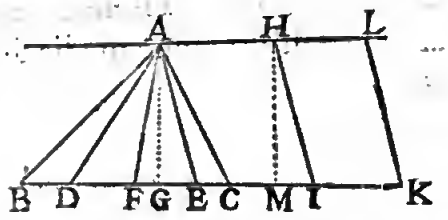
I V.

L'altezza di qualunque figura è la retta linea, che dalla ſommità cade perpendicolare alla baſe.



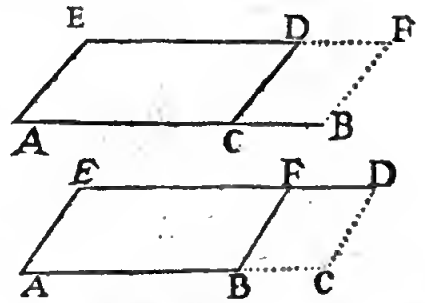
Nel triangolo ABC, dall'angolo verticale A cada la retta AG perpendicolare alla baſe BC, la retta AG ſi chiamerà altezza del triangolo ABC. Similmente nel triangolo ABD, dall'angolo verticale A cada la retta AG perpendicolare alla baſe BD, continuata verſo C, la perpendicolare AG ſi chiamerà altezza del triangolo ABD. E nell'iſteſſo modo la

retta AG sarà l'altezza del triangolo ADF; e la medesima sarà l'altezza del triangolo ABF; come anco del triangolo AEC; e de i triãgoli AGE, AGC, AGF, AGB, AFE, ADC, &c. E da qui si raccoglie, che quando più triangoli hanno le basi in vna medesima retta linea come BC, e gli angoli verticali s'vniscono in vn medesimo punto A, quei triangoli sono sotto vna medesima altezza. Di più nel parallelogrammo HIKL dalla sommità HL cada la retta H M perpendicolare alla base KI, continuata, se bisogna, la perpendicolare HM si dirà essere l'altezza del parallelogrammo HIKL; ed il simile s'intende d'ogn'altra figura. Hor se le rette A L, B K saranno frà di loro parallele, essendo le rette AG, HM, perpendicolari alla retta BK, per le cose dimostrate auanti della 27. propositione del primo Libro, le rette AG, HM sono frà di loro vguali; e così tutte le figure, che sono poste frà le medesime parallele, haueranno la medesima, ò vguali altezze.



V.

Il parallelogrammo applicato ad vna retta linea, si dice mancare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando non occupa tutta la retta linea, alla quale è applicato; e si dice superare d'vn parallelogrammo della medesima altezza, quando occupa maggior lunghezza della linea, alla quale è fatta l'applicatione.



Alla retta AB, s'intenda applicato il parallelogrammo A C D E in modo, che nella prima figura non occupi tutta la retta A B, mà che per compire la retta AB gli manchi il parallelogrãmo D C B F; in questo caso il parallelogrammo ACDE si dice essere applicato secondo la retta AB mancante del parallelogrammo DCBF. E nella seconda figura, il parallelogrammo ACDE descritto sopra la retta AC in modo che superi la retta A B, per la quantità del parallelogrammo FBCD; si dice essere applicato secondo la retta AE eccedente la medesima retta A B, per la quantità del parallelogrammo FBCD.

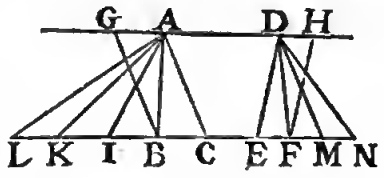
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno vna

mede-

medeſima, ò vguali altezze, ſono frà di loro come le baſi.

Siano i due triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui baſi ſiano BC, EF; e s'intendano collocati fra le medeſime parallele GH, LN; e per quel, che fù ſpiegato nella quarta definitione di queſto, haueranno vna medeſima altezza. Dico che la proportione del triangolo ABC al triangolo DEF, come ancora del parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, è l'iſteſſa, che la proportione della baſe BC alla baſe EF. Si continui BF verſo L, ed N, e ſi prendano in LB quante patti ſi vogliano come BI, IK, KL, ogn'vna vguale alla baſe BC. Similmente ſi prendano in FN quante parti ſi vogliano come FM, MN, ogn'vna vguale ad EF; ſi tirino le rette AI, AK, AL, DM, DN; i triangoli ABC, ABI AIK, AKL hanno le baſi BC, BI, IK, KL, vguali, e ſono frà le medeſime parallele, e perciò [a] ſono frà di loro vguali. E per l'iſteſſa ragione i triangoli DEF, DFM, DMN ſono frà di loro vguali. Tante volte la baſe CL ſarà miſurata dalla baſe BC, per quante volte il triangolo ALC è miſurato dal triangolo ABC; dal che il triangolo ALC ſarà multiplice del triangolo ABC, come la baſe LC è multiplice della baſe BC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo DEN è multiplice del triangolo DEF, come la baſe EN è multiplice della baſe EF; ſe la baſe LC è vguale alla baſe EN, i triangoli ALC, DEN, che hanno le baſi vguali LC, EN, e ſono frà le medeſime parallele, ſono [b] frà di loro vguali: ſe la baſe LC è maggiore della baſe EN, il triangolo ALC [c] ſarà maggiore del triangolo DEN; e ſe la baſe LC è minore della baſe EN, il triangolo ALC ſarà minore del triangolo DEN. Si conſiderino quattro quantità; la prima ſia il triangolo ABC, la ſeconda il triangolo DEF, la terza ſia la baſe BC, e la quarta la baſe EF; gli vguali multiplici della prima ABC, e della terza BC, ſono per quel, che s'è dimoſtrato, il triangolo ALC, e la baſe LC; e gli vguali multiplici della ſeconda DEF, e della quarta EF, ſono il triangolo DEN, e la baſe EN. E perche ſe il triangolo ALC (ch'è multiplice della prima) ſupera il triangolo DEN (ch'è multiplice della ſeconda) ancora la baſe LC, ch'è multiplice della terza, ſupera la baſe EN, ch'è multiplice della quarta; e ſe il triangolo ALC è minore, ò vguale al triangolo DEN, ancora la baſe LC ſarà minore, ò vguale alla baſe EN; per la ſeſta definitione del 5. libro, la proportione della prima ABC alla ſeconda DEF, è l'iſteſſa, che la proportione della terza BC alla quarta EF: per la qual coſa il triangolo ABC al triangolo DEF è come la baſe BC alla baſe EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Di nuouo perche il parallelogrammo GC [f] è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo EH è il doppio del triangolo DEF, ſarà il parallelogrammo GC multiplice del triangolo ABC, come il parallelo-

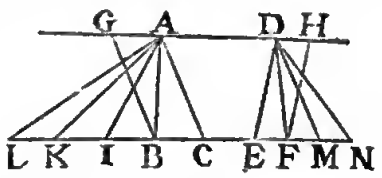
a 38. del 1.

b 38. del 1.

c Corol. alla 38. del 1.

f 34. del 1.

grammo EH è multiplice del triangolo DEF; e perciò il parallelogrammo GC al parallelogrammo EH, d farà come il triangolo ABC al triangolo DEF; ma il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che s'è dimostrato, è come la base BC alla base EF, farà il parallelogrammo GC, al parallelogrammo EH e come la base BC alla base EF, ch'era da dimostrarsi.



d 35. del 5.

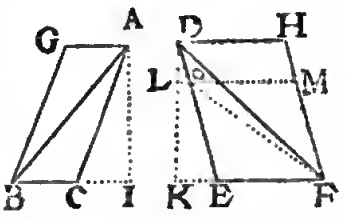
e 11. del 5.

SCOLIO.

Il P. Clauio fà la conuersa dell'antecedente propositione nel seguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che sono frà di loro come le basi, hanno la medesima, ò vguali altezze.

Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui basi BC, EF, e le altezze siano le due AI, DK; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, ouero il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'istessa proportione, quale hà la base BC alla base EF: Dico che le altezze AI, DK sono frà di loro vguali. Se l'altezza DK non è vguale all'altezza AI, vna delle due sarà maggiore. Supposto che DK sia maggiore di AI, si faccia KL a vguale ad AI, e dal punto L si tiri la retta LM b parallela ad FK; segarà il lato DE in qualche punto O, si tiri la retta OF. Perche i triangoli ABC, OEF, hanno vguali altezze, perciò il triangolo ABC d al triangolo OEF è come la base BC alla base EF; mà per ipotesi, il triangolo ABC al triangolo DEF, è come la base BC alla base EF; sarà il triangolo ABC e al triangolo DEF, come il medesimo triangolo ABC al triangolo OEF; per la qual cosa il triangolo OEF f sarà vguale al triangolo DEF; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque DK è maggiore di AI, mà sono frà di loro vguali.



a 3. del 1.

b 31. del 1.

d 1. del 6.

e 11. del 5.

f 9. del 5.

Supposta la medesima costruttione, si considerino i parallelogrammi GBCA OEFM, i quali hanno vna medesima altezza, e perciò sono g come le basi BC, EF: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipotesi, sono come le basi BC, EF; sarà il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, h come il medesimo parallelogrammo GBCA al parallelogrammo OEFM; dal che i parallelogrammi OEFM, DEFH sono K frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile: non dunque l'altezza DK è maggiore dell'altezza AI, mà sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

g 1. del 6.

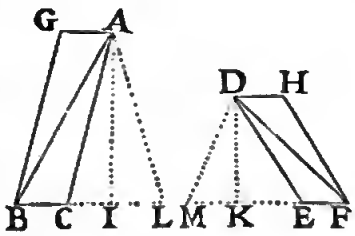
h 11. del 5.

K 9. del 5.

Aggiun-

Aggiunge in queſto luogo il Commandino il ſeguente Theorema, che noi dimoſtriamo poco differente à quello, che fà il P. Clauio.

I triangoli, e parallelogrammi, che hanno le baſi vguali, ſono frà di loro come le altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, che habbiano le baſi BC, EF frà di loro vguali, e le loro altezze ſiano le perpendicolari AI, DK. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF, ed il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, è come l'altezza AI all'altezza DK. Si prolunghino le rette BI verſo L, & FK verſo M; ſi faccia IL [a] *vguale à BC, e ſi faccia MK vguale ad EF. Eſſendo, per ipoteſi, BC vguale ad EF, ſarà IL vguale ad MK. Perche i triangoli ABC, AIL hanno la medeſima altezza AI, perciò ſono* [b] *come le baſi; mà la baſe BC è vguale ad IL, ſarà il triangolo ABC* [c] *vguale al triangolo AIL. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che il triangolo DEF è vguale al triangolo DMK; e perciò il triangolo ABC al triangolo DEF* [d] *è come il triangolo AIL al triangolo DMK. In oltre perche LI è perpendicolare ad AI, & MK è perpendicolare à DK, preſe AI, & DK come baſi de i triangoli AIL, DKM, ſarà LI l'altezza del triangolo AIL, ed MK ſarà l'altezza del triangolo DKM; mà LI è moſtrata vguale ad MK, i triangoli AIL, DKM haueranno le altezze IL, MK vguali; dalche il triangolo AIL al triangolo DKM* [e] *è come la baſe AI alla baſe DK; mà il triangolo AIL al triangolo DKM è dimoſtrato come il triangolo ABC al triangolo DEF, ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF* [f] *come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

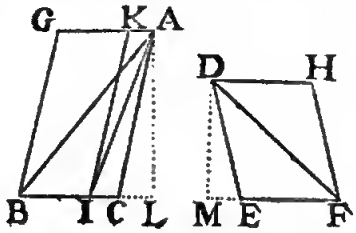
Di nuouo perche il parallelogrammo GBCA è il doppio del triangolo ABC, ed il parallelogrammo DEFH è il doppio del triangolo DEF; ſarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH, [g] *come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il triangolo ABC al triangolo DEF, per quel che s'è dimoſtrato, è come l'altezza AI all'altezza DK; ſarà il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo DEFH,* [h] *come l'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimoſtrarſi.*

a 3. del 1.
b 1. del 6.
c Scol. alla 16. del 5.
d Corol. alla 7. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 15. del 5.
h 11. del 5.

Il P. Clauio fà la conuerſa dell'antecedente Theorema nel ſeguente modo.

I triangoli, e parallelogrammi, che ſono come le loro altezze, haueranno vguali baſi; ò la medeſima.

Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, DEFH, le di cui baſi BC, EF, e le altezze ſiano AL, D M; ed habbia il triangolo ABC al triangolo DEF, come ancora il parallelogrammo GBCA, al parallelogrammo DEFH, l'iſteſſa proportione, quale hà l'altezza A L all'altezza DM. Dico che le baſi BC, EF ſono frà di loro vguali. Se la baſe BC non è vguale alla baſe EF vna delle due ſarà maggiore; ſia dunque BC maggiore di EF, ſi



k 3. del 1. *faccia BI k vguale ad EF, e ſi tiri la retta IA; i triangoli ABI, DEF haueranno le baſi BI, EF vguali, e per l'antecedente Theorema il triangolo ABI al triangolo D E F ſarà come l'altezza A L all'altezza D M; mà per ipoteſi l'altezza AL all'altezza DM è come il triangolo ABC al triangolo DEF, ſa-*

l 11. del 5. *rà il triangolo ABC al triangolo D E F l come il triangolo A B I al medeſimo*

m 9. del 5. *triangolo DEF, e perciò il triangolo ABI m è vguale al triangolo A B C: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali.*

n 31. del 1. *Suppoſta la medeſima coſtruttione, dal punto I ſi tiri la retta I K n parallela à GB; i parallelogrammi GBIK, DEFH haueranno le baſi BI, E F frà di loro vguali, e per l'anteceedente Theorema ſaranno frà di loro come le altezze AL, DM: mà i parallelogrammi GBCA, DEFH, per ipoteſi, ſono co-*

o 11. del 5. *me le altezze AL, DM; ſarà il parallelogrammo GBIK al parallelogrammo DEFH, come il parallelogrammo GBCA o al medeſimo parallelogrammo*

p 9. del 5. *DEFH; e pereiò i parallelogrammi GBIK, GBCA p ſono frà di loro vguali: la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile; non dunque la baſe BC è maggiore della baſe EF, mà ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.*

Aggiungo qui il Theorema ſeguente di Claudio Midorgi, per laſciare liberi gli elementi Conici da particolari Lemma.

Se vn quadrato ſia equilatero ad vn Rombo, e qualche rettangolo equilatero ad vn parallelogrammo, equiangolo al Rombo: il quadrato al rettangolo ſarà, come il Rombo al parallelogrammo, che gli è equiangolo.

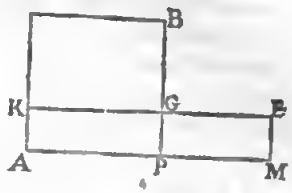
Sia il quadrato A B equilatero al Rombo CD, ed il rettangolo AE equilatero al parallelogrammo CF; e ſia il parallelogrammo C F equiangolo al Rombo CD. Dico che il quadrato AB al rettangolo AE, ſarà come il Rombo C D al parallelogrammo C F. Si accomodi il quadrato A B, ed il rettangolo AE in modo, che l'angolo A ſia commumune ad ambidue; e ſimilmente s'adatti il Rombo C D, ed il parallelogrammo CF in modo, che habbiano l'angolo C

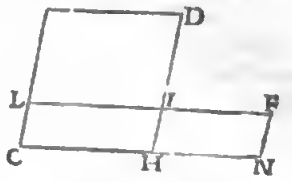
a 34. del 1. *commune; ſarà AK a vguale à PG, ed LC vguale ad I H: ed eſſendo C L,*

b Corollario alla 7. del 5. *per ipoteſi, vguale ad AK, ſarà HI vguale à PG; dal che BP ad HD b ſarà come P G ad H I. Di più, eſſendo A P vguale à C H, & A M vguale à*

CN,

CN, sarà AP ad AM come CH à CN. In oltre perche i rettangoli AB, AG hanno vna medesima altezza, sarà il quadrato AB al rettangolo AG, [c] *come la base BP alla base PG, cioè* [d] *come DH ad HI: mà DH ad HI, è come il Rombo CD al parallelogrammo CI* [e] *(stante che hanno vna medesima altezza); perciò il quadrato AB al rettangolo AG* [f] *sarà come il Rombo CD al parallelogrãmo CI. Di nuouo essendo i rettangoli AG, AE, sotto vna medesima altezza, sarà il rettangolo AG al rettangolo AE,* [g] *come la base AP alla base AM: fù dimostrata AP ad AM, essere come CH à CN; sarà il rettangolo AG al rettangolo AE,* [h] *come CH à CN: mà CH à CN* [k] *è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF (stante che i parallelogrammi CI, CF hanno vna medesima altezza) sarà il rettangolo AG al rettangolo AE* [l] *come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF. Finalmente perche il quadrato AB al rettangolo AG, per quel che s'è dimostrato, e come il Rombo CD al parallelogrammo CI; ed il rettangolo AG al rettangolo AE è come il parallelogrammo CI al parallelogrammo CF; per l'egualità, sarà il quadrato AB al rettangolo AE,* [m] *come il Rombo CD al parallelogrammo CF, ch'era da dimostrarsi.*





c 1. del 6.
d 11. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
k 1. del 6.
l 11. del 5.
m 22. del 5.

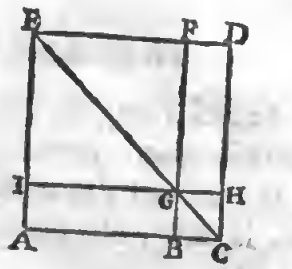
COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che se saranno due qualunque rettangoli, e due parallelogrammi equilateri à i rettangoli, & equiangoli frà di loro; i rettangoli saranno frà di loro, come i parallelogrammi.

Per il medesimo fine aggiungiamo il seguente Theorema.

Se saranno due qualunque rette linee, il quadrato di vna al rettangolo contenuto dalle medesime, e come l'istesso rettangolo al quadrato dell'altra.

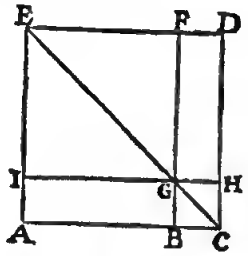
Siano qualunque due rette linee AB, BC. Dico che il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, è come il medesimo rettangolo al quadrato di BC. Si pongano le rette AB, BC, in modo che facciano la sola retta ABC, e sopra la retta AC [a] *si descriua il quadrato AD; si tiri il diametro EC; dal punto B si tiri la retta BF* [b] *parallela ad AE, la quale segarà il diametro EC in qualche punto G, per il quale si faccia pas-*



a 46. del 1.
b 31. del 1.

sare

fare la retta IH [c] *parallela ad AC; ſarà diuiſo il quadrato AD in quattro parallelogrammi, de' quali i due IF, BH, che ſono intorno al diametro, per il Corollario alla 4. propoſitione del 2. Libro, ſono quadrati, ed i complementi AG, GD ſono rettangoli. In oltre perche i due IF, GD, hanno vna medeſima altezza, ſarà il quadrato IF al rettangolo GD* [d] *come la baſe IG alla baſe GH; ſimilmente i due AG, BH hanno vna medeſima altezza, e perciò il rettangolo AG al quadrato BH* [e] *è come la baſe IG alla baſe GH; ma IG à GH ſi diſſe eſſere come il quadrato IF al rettangolo GD: ſarà il quadrato IF al rettangolo GD* [f] *come il rettangolo AG al quadrato BH; ma il rettangolo GD è vguale al rettangolo AG, ſarà il quadrato IF al rettangolo AG, come il medeſimo rettangolo AG al quadrato BH: e perche il rettangolo AG* [g] *è contenuto dalle due AB, BC (ſtante che BC è vguale à BG) ſarà il quadrato IF, cioè il quadrato di AB, al rettangolo contenuto dalle due AB, BC, come il medeſimo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato BH, cioè al quadrato di BC, ch'era da dimoſtrarſi.*



c 31. del 1.
d 1. del 6.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. defin. del 2.

COROLLARIO I.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che ſe le rette ſaranno AC, CB, il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB ſarà come il medeſimo rettangolo contenuto dalle due AC, CB al quadrato di CB.

COROLLARIO II.

Sarà dunque manifeſto, che il rettangolo contenuto dalle due AB, BC è medio proportionale frà i quadrati delle due AB, BC; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB.

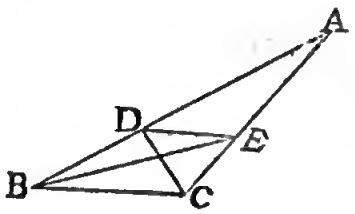
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se nel triangolo ſia tirata vna linea retta parallela ad vno de' lati, quella ſegarà gli altri due lati proportionalmente; e ſe due lati del triangolo ſono ſegati proportionalmente, la retta, che congiunge le diuiſioni, è parallela al terzo lato.

Sia il triangolo ABC, nel quale sia prima tirata la retta DE parallela ad vno de'lati, come BC. Dico che i lati AB, AC sono segati dalla retta DE proportionalmente in D, ed E; cioè, che AD à DB, è come AE ad EC. Si tirino le rette BE, DC; e si considerino i due triangoli CED, BDE, i quali hanno la medesima base DE, e sono, per ipotesi, frà le medesime parallele DE, BC, e perciò [a] sono frà di loro vguali. Si prenda il triangolo ADE come terza quantità, hauerà il triangolo ADE al triangolo CED [b] l'istessa proportione, quale hà il medesimo triangolo ADE al triangolo BDE.

a 37. del 1.

b 7. del 5.



Si considerino i triangoli AED, DEB, i quali hanno le basi AD, DB, in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto E, e per quel che si disse alla 4. defin. di questo, hanno vna medesima altezza. E per l'istessa ragione i triangoli ADE, EDC, le di cui basi AE, EC sono in vna medesima dirittura, e gli angoli verticali s'vniscono nel medesimo punto D, sono sotto d'vna medesima altezza. Perche dunque i triangoli AED, EDB hanno vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [c] come la base AD alla base DB; ma il triangolo AED al triangolo EDB, per quel che s'è dimostrato, è come il medesimo triangolo AED al triangolo EDC; sarà AD à DB [d] come il triangolo ADE al triangolo EDC. E perche il triangolo ADE al triangolo EDC è come la base AE alla base EC [e] (stante che sono sotto d'vna medesima altezza) sarà AD à DB, [f] come AE ad EC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

c 1. del 6.

d 11. del 5.

e 1. del 6.

f 11. del 5.

Di nuouo supposto, che la proportione di AE ad EC sia come quella di AD à DB, tirata la retta DE. Dico ch'è parallela al lato BC. Sia fatta la medesima costruttione di prima. Essendo i triangoli AED, EDB, sotto d'vna medesima altezza, sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [g] come la base AD alla base DB: ma per ipotesi AD à DB è come AE ad EC; sarà il triangolo AED al triangolo EDB, [h] come AE ad EC. Inoltre, essendo i triangoli ADE, DCE sotto d'vna medesima altezza, il triangolo AED al triangolo DEC [K] sarà come la base AE alla base EC: ma AE ad EC, per quel che s'è dimostrato, è come il triangolo AED al triangolo EDB; sarà il triangolo ADE al triangolo EDC [l] come il medesimo triangolo ADE al triangolo EDB. Quando vna terza quantità hà l'istessa proportione à due, quelle [m] sono frà di loro vguali; saranno i triangoli DEB, EDC frà di loro vguali; hanno la medesima base DE, e sono collocati dalla medesima parte BC, e perciò [n] sono frà le medesime parallele BC, DE, ch'era da dimostrarsi.

g 1. del 6.

h 11. del 5.

K 1. del 6.

l 11. del 5.

m 9. del 5.

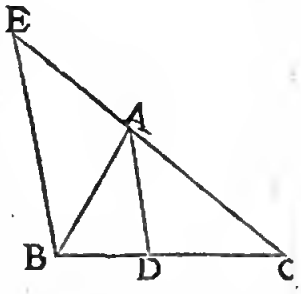
n 39. del 1.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea diuide vn angolo del triangolo in due parti vguali, quella segarà il lato opposto proportional-

mente

mente à gli altri lati del triangolo; e ſe le parti della baſe ſono proportionali à gli altri due lati del triangolo, la retta tirata dall'angolo verticale al punto, che ſepara le parti della baſe, diuiderà l'angolo verticale in due parti vguali.



Nel triangolo A B C ſia prima diuiſo l'angolo B A C in due parti vguali dalla retta AD. Dico che la retta A D continuata ſegarà la baſe BC proportionalmente in qualche punto D; cioè che la proportione di CD à DB è come quella di CA ad AB. Si
a 3. del 1. continui il lato CA verſo E, e ſi faccia AE [a] vguale ad AB; ſarà CA ad AE, [b] come la
b 7. del 5. medeſima CA ad AB; ſi tiri la retta EB, il triangolo AEB ſarà iſoſcele, e gli angoli AEB,
c 5. del 1. ABE ſopra la baſe ſono [c] frà di loro vguali. Nel triangolo EAB, continuato il lato EA verſo C, l'angolo eſterno BAC [d]
d 32. del 1. è vguale alli due angoli ABE, AEB, interni, ed oppoſti; ma i due angoli ABE, AEB ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo BAC il doppio dell'angolo ABE, e la metà dell'angolo BAC, cioè l'angolo BAD, ſarà vguale all'angolo ABE. Hor eſſendo le rette AD, EB ſegate dalla retta AB; e gli angoli alterni
e 27. del 1. DAB, ABE ſono frà di loro vguali, ſarà la retta AD [e] parallela alla retta EB. Nel triangolo CEB è tirata la retta AD parallela al lato EB, [f]
f 2. del 6. ſarà la proportione di CD à DB, come quella di CA ad AE; ma CA ad
g 11. del 5. AE è come la medeſima CA ad AB; ſarà CD à DB [g] come CA ad AB, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Di nuouo ſia diuiſa la baſe BC talmente in D, che CD à DB ſia come CA ad AB; tirata la retta DA. Dico che la retta D A diuide l'angolo BAC in due parti vguali. Si concepiſca fatta la medeſima coſtruttione di ptima. Perche AB è vguale ad AE, gli angoli AEB, ABE
h 5. del 1. [h] ſono frà
K 7. del 5. di loro vguali; ed oltre à ciò la proportione di CA ad AE [K] ſarà come quella della medeſima CA ad AB; ma per ipoteſi, CA ad AB è come CD à DB,
l 11. del 5. ſarà CD à DB [l] come CA ad AE; dal che AD [m] ſarà parallela ad EB.
m 2. del 6. Hor eſſendo AD, EB frà di loro parallele, ſegate dalla retta AB, gli angoli alterni DAB, EBA [n] ſono frà di loro vguali. E ſimilmente le rette
n 29. del 1. parallele AD, EB, eſſendo ſegate dalla retta EC, l'angolo CAD eſterno è vguale [o] all'angolo E interno, ed oppoſto; ma gli angoli AEB, ABE,
o 29. del 1. ſono frà di loro vguali; ſaranno gli angoli DAB, DAC frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

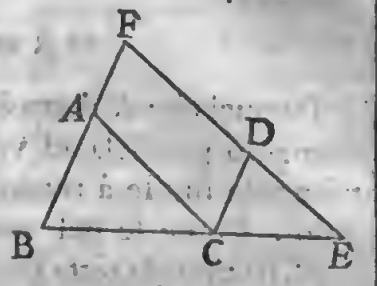
THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

I triangoli equiangoli hanno i lati intorno à gli angoli

vguali

vguali proportionali; e quei lati ſono homologhi, che ſono oppoſti à gli angoli vguali.

Siano i triangoli equiangoli ABC, DCE; cioè che l'angolo ABC ſia vguale all'angolo DCE; l'angolo BAC vguale all'angolo CDE; e l'angolo ACB ſia vguale all'angolo DEC. Dico che la proportione di AB à BC è come quella di DC à CE; che BC à CA è come CE ad ED; e che BA ad AC è come CD à DE. Si concepiſcano collocati i triangoli ABC, DCE in modo, che ſi componghino ſecondo l'angolo ACD, e che i lati BC, CE coſtituiſchino vna ſola retta linea. Perche l'angolo ABC è ſuppoſto vguale all'angolo DCE, all'vno, ed all'altro s'aggiunga l'angolo DEC; i due angoli ABC, DEC ſono vguali à i due angoli DCE, DEC; ma i due angoli DCE, DEC [a] ſono minori di due angoli retti; li due angoli dunque ABC, DEC ſono minori di due angoli retti. Hor eſſendo le rette AB, DE ſegate dalla retta BE, e gli angoli interni ABC, DEC ſono minori di due angoli retti, per lo Scolio alla 31. propoſ. le rette BA, ED continuate concorreranno in qualche punto F. Inoltre perche le rette DC, FB ſono ſegate dalla retta BE, e l'angolo eſterno DCE, per ipoteſi, è vguale all'angolo ABC interno, ed oppoſto; ſarà la retta DC [b] parallela alla retta FB. Similmente le rette AC, FE ſono ſegate dalla retta BE, e l'angolo eſterno ACB è ſuppoſto vguale all'angolo E interno, ed oppoſto; ſarà la retta AC [c] parallela ad FE, e perciò il quadrilatero FACD è parallelogrammo, dal che il lato FA [d] ſarà vguale al lato DC, ed il lato FD vguale al lato AC.



a 17. del 1.

b 28. del 1.

c 28. del 1.

d 34. del 1.

Si conſideri il triangolo FBE, ſegato dalla retta AC, parallela al lato FE; ſarà la proportione di BA ad AF, [e] come quella di BC à CE; ma FA è vguale alla retta CD; ſarà BA à CD [f] come BC à CE; e permutando, AB à BC [g] ſarà come DC à CE; dal che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DCE ſono proportionali; e gli antecedenti AB, DC, che ſi dicono [h] homologhi, ſono oppoſti à gli angoli vguali ACB, DEC; come ancora i conſeguenti BC, CE, che gli chiamiamo homologhi, ſono oppoſti à gli angoli vguali BAC, CDE. Di nuouo ſi conſideri il triangolo FBE, ſegato dalla retta DC, parallela al lato FB; ſarà EC à CB [k] come ED à DF; ma DF è vguale ad AC; ſarà EC à CB [l] come ED ad AC; e permutando, CE ad ED [m] ſarà come BC à CA; e cosi i lati intorno à gli angoli vguali BCA, CED, ſono proportionali; e gli homologhi, cioè gli antecedenti BC, CE, ſono oppoſti à gli angoli vguali BAC, CDE; come ancora gli homologhi, cioè i conſeguenti ED, CA, ſono oppoſti à gli angoli ABC, DCE vguali. Finalmente ſi conſiderino tre quantità da vna parte, come AB prima, BC ſeconda, & AC terza; e tre altre da vn altra parte, cioè la prima DC, la ſeconda CE, e la terza ED. Perche

e 2. del 6.

f 11. del 5.

g 16. del 5.

h 12. defin. del 5.

k 2. del 6.

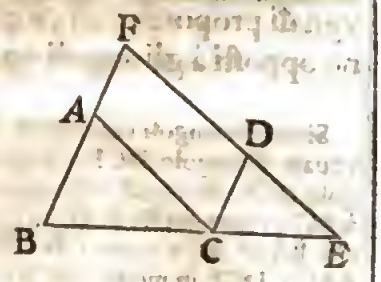
l 11. del 5.

m 16. del 5.

n 22. del 5.

la prima AB alla seconda BC, per quel che s'è dimostrato, è come la prima DC alla seconda CE; e la seconda BC alla terza AC è come la seconda CE alla terza DE; per l'egualità, la prima AB alla terza AC, [n] sarà come la prima DC alla terza DE; per la qual cosa i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.

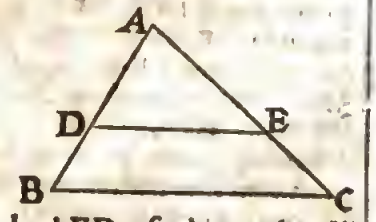
n 22. del 5.



COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che la retta linea nel triangolo parallela ad vn lato, detrae dal triangolo vn triangolo simile à tutto il triangolo. Come se nel triangolo ABC sia tirata la retta DE parallela al lato BC, il triangolo detratto ADE sarà simile à tutto il triangolo ABC. Perche, essendo DE parallela al lato BC, l'angolo AED [o] sarà vguale all'angolo C interno, ed opposto; e per l'istessa ragione l'angolo esterno ADE è vguale all'angolo B interno, ed opposto; ma l'angolo A è commune, i triangoli dunque ADE, ABC sono equiangoli; e per l'antecedente propositione, hanno i lati, intorno à gli angoli vguali, proportionali; e per la definitione prima di questo, i triangoli ADE, ABC sono frà di loro simili.

o 29. del 1.



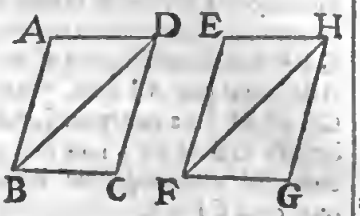
SCOLIO.

Per breuità delle cose à venire aggiungo il seguente Theorema.

Se di due parallelogrammi vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro; e due lati intorno à qualunque angolo dell'vno siano vguali à due lati intorno à qualunque angolo dell'altro; quei parallelogrammi sono frà di loro simili, ed vguali.

Siano

Siano i parallelogrammi BD, FH, de' quali l'angolo C ſia eguale all'angolo G; il lato AD vguale al lato EH; ed il lato DC vguale al lato HG. Dico che i parallelogrammi BD, FH ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Perche i lati AD, DC, ſi ſuppongono vguali à i lati EH, HG; ed in ogni parallelogrammo i lati oppoſti ſono [a] *frà di loro vguali; e gli angoli oppoſti ſono frà di loro vguali; ſarà l'angolo E vguale all'angolo A; il lato AB vguale al lato EF; ed il lato BC vguale al lato FG; per la qual coſa AD à DC* [b] *ſarà come EH ad HG; il lato DA ad AB ſarà come EH ad EF; il lato AB à BC ſarà come EF ad FG; e ſarà BC à CD come FG à GH. Si tirino le diagonali DB, HF. Eſſendo i lati DA, AB, vguali à i lati EH, EF, e l'angolo A vguale all'angolo E; ſarà il triangolo ABD* [c] *vguale al triangolo EFH; l'angolo ABD ſarà vguale all'angolo EFH, e l'angolo ADB vguale all'angolo EHF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo FGH è vguale al triangolo DBC; che l'angolo GFH è vguale all'angolo CBD; e che l'angolo GHF è vguale all'angolo CDB: dal che tutto l'angolo ABC ſarà vguale à tutto l'angolo EFG; e l'angolo ADC vguale all'angolo EHG; e tutto il parallelogrammo AC vguale à tutto il parallelogrammo EG; e perciò i parallelogrammi AC, EG ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione, ſono ſimili; per la qual coſa i parallelogrammi AC, EG ſono frà di loro ſimili, ed vguali, ch' era da dimoſtrarſi.*



[a] 34. del 1.

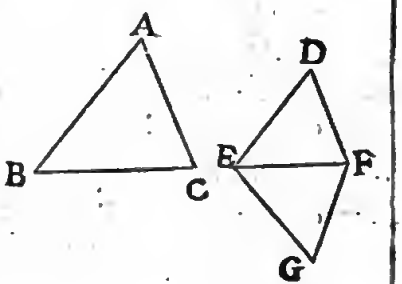
[b] Corol. alla 4. del 5.

[c] 4. del 1.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

I triangoli, che hanno i lati proportionali, ſono equiangoli; e quelli angoli ſono eguali, che ſono oppoſti à i lati homologhi.

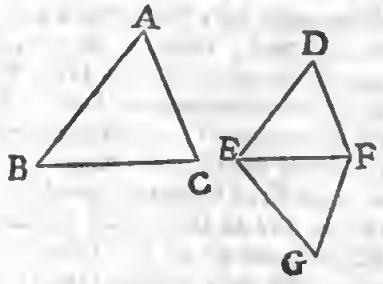
Siano i triangoli ABC, DEF, che habbiano i lati proportionali, cioè che AB à BC ſia come DE ad EF; che BC à CA ſia come EF ad FD; e che AB ad AC ſia come ED à DF. Dico che gli angoli A, & D, che ſono oppoſti à i lati homologhi BC, EF, ſono frà di loro vguali. E ſimilmente gli angoli ABC, DEF, che ſono oppoſti à i lati homologhi AC, DF, ſono frà di loro vguali; come ancora gli angoli ACB, DFE, oppoſti à i lati homologhi AB, DE, ſono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E ſi coſtituiſca l'angolo FEG [a] vguale all'angolo B; e nel punto F, ſi faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C. Perche gli angoli B, & C [b] ſono minori di due angoli retti, i



[a] 23. del 1.

[b] 17. del 1.

due angoli GEF,GFE ſarãno minori di due angoli retti;e le rette EG,FG continuate [c] concorreranno in qualche punto G;ed oltre à ciò il triangolo G F E [d] ſarà equiangolo al triangolo ABC; dal che AB à BC [e] ſarà come GE ad EF: ma per ipoteſi, AB à BC è come DE ad EF; ſarà DE ad EF [f] come GE alla medeſima EF; per la qual coſa E D [g] ſarà vguale àd E G. In oltre perche i triangoli GEF,ABC ſono equiangoli, e l'angolo C è vguale all'angolo G F E; ſarà B C à C A [h] come E F ad F G. Ma, per ipoteſi, B C à C A è come E F ad FD; ſarà E F ad F G [K] come la medeſima EF ad FD, e perciò le due DF, FG [l] ſono frà di loro eguali. Ne i triangoli DEF, EGF, i due lati DE, DF, ſono eguali alli due lati EG, GF, la baſe EF è commune; ſarà l'angolo G [m] vguale all'angolo D, ed i rimanenti due angoli GFE, GEF [n] vguali alli rimanenti due angoli DFE, DEF; cioè l'angolo DFE ſarà vguale all'angolo GFE, e l'angolo DEF vguale all'angolo GEF; ma l'angolo GEF è fatto vguale all'angolo B, ſarà l'angolo DEF vguale all'angolo B. Similmente l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C; ſarà l'angolo DFE vguale all'angolo C; e perche i due angoli DEF, DFE ſono vguali à i due angoli ABC, ACB, il rimanente angolo D [o] ſarà vguale al rimanente angolo A, ch'era da dimoſtrarſi.



c Scol. alla 31.del 1.
d 32.del 1.
e 4.del 6.
f 11. del 5.
g 9. del 5.
h 4 del 6.
K 11.del 5.
l 9.del 5.
m 8.del 1.
n 4.del 1.
o 32. del 1.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vn angolo di vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo, ed i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali; i triangoli ſono equiangoli; e quegli angoli ſono eguali, che ſono oppoſti à i lati homologhi.

Siano i triangoli ABC, DEF; e ſia l'angolo B eguale all'angolo DEF; e la proportione di AB à BC ſia come quella di DE ad E F. Dico che gli angoli ACB, DFE, oppoſti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti AB, D E, ſono frà di loro vguali; e che gli angoli A, & D, che ſono oppoſti à i lati homologhi, cioè à i conſeguenti BC, EF, ſono frà di loro vguali. Sopra la retta EF nel punto E [a] ſi faccia l'angolo FEG vguale all'angolo B, che ſarà vguale all'angolo D E F; e nel punto F ſi faccia l'angolo EFG vguale all'angolo C, le rette EG, FG, continuate [b] concorreranno in qualche punto G, ed i triangoli GFE, ABC ſaranno [c] equiangoli; ed eſſendo l'angolo GEF vguale all'angolo B; ſarà GE ad EF [d] come AB à BC: mà per ipoteſi AB à BC è come D E ad E F, ſarà D E ad EF [e] come G E alla medeſima EF; per la qual coſa i lati ED, E G [f] ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i due triangoli DEF, GEF, de' quali il lato EG è vguale al lato E D, il lato EF è commune, e l'angolo GEF è vguale all'angolo DEF; ſarà la baſe GF [g] vguale alla baſe FD; e l'angolo

a 23.del 1.
b Scol. alla 31.del 1.
c 32.del 1.
d 4.del 6.
e 11.del 5.
f 9. del 5.
g 4 del 1.

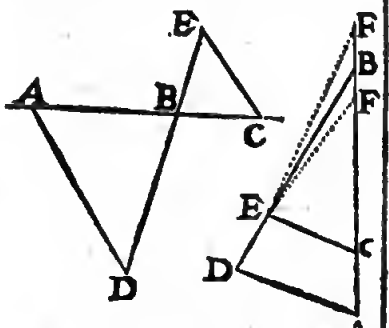
lo

lo GFE vguale all'angolo DFE: mà l'angolo GFE è fatto vguale all'angolo C, ſarà l'angolo D F E vguale all'angolo C: per ipoteſi l'angolo DEF è vguale all'angolo B; il rimanente angolo D [h] ſarà vguale al rimanente angolo A, ch'era da dimoſtrarſi. h 32. del 1.

SCOLIO.

Per le coſe, che biſogneranno ſtimo bene porre in queſto luogo il ſeguente Theorema.

Se da due qualunque punti A, C, preſi nella retta A B, continuata ſe biſogna, ſono tirate due rette parallele, come AD, C E; e ſia D A ad A B, come E C à C B; tirate le rette (nella prima figura) DB, BE; e nella ſeconda figura DE, EB. Dico che queſte fanno vna ſola retta linea.



Nella prima figura. Perche le rette AD, EC ſono parallele, ſegate dalla retta AC, gli angoli alterni DAB, ECB [a] *ſono fra di loro vguali: mà per ipoteſi, DA ad AB è come EC à CB, i triangolo DAB, ECB, per l'antecedente propoſitione, ſono equiangoli; ſarà l'angolo CEB vguale all'angolo ADB; e l'angolo EBC vguale all'angolo ABD: vgualmente s'aggiunga l'angolo DBC, i due angoli EBC, CBD ſaranno vguali à i due angoli CBD, DBA: mà i due angoli CBD, DBA* [b] *ſono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBC, CBD ſaranno vguali à due angoli retti; e le rette EB, BD* [c] *coſtituiranno vna ſola retta linea. Nella ſeconda figura, ſe le rette DE, EB non coſtituiſcono vna ſola retta linea, continuata la retta DE, quella ò paſſarà ſopra, ouero ſotto la retta EB, come fà la retta DEF. Hor perche la retta EC è parallela ad AD, l'angolo FEC* [d] *eſterno ſarà vguale all'angolo FDA interno, ed oppoſto; e ſimilmente l'angolo FCE ſarà eguale all'angolo FAD; ma l'angolo DFA è commune; ſaranno i triangoli DFA, EFC equiangoli; e la proportione di DA ad AF* [e] *ſarà come quella di EC à C F; e permutando, DA ad EC* [f] *ſarà come AF ad F C. In oltre, per ipoteſi, D A ad AB è come EC à CB; permutando,* [g] *DA ad EC ſarà come A B à B C; mà D A ad E C, per quel che s'è dimoſtrato, è come A F ad FC; ſarà A B à BC* [h] *come AF ad FC; e diuidendo, AC à CB* [K] *ſarà come la medeſima AC à CF; dal che CF* [l] *ſarà vguale ad EB; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile: non dunque continuata DE paſſa ſopra, ne ſotto la retta EB; mà le due DE, EB coſtituiſcono vna ſola retta linea, ch'era da dimoſtrarſi.*

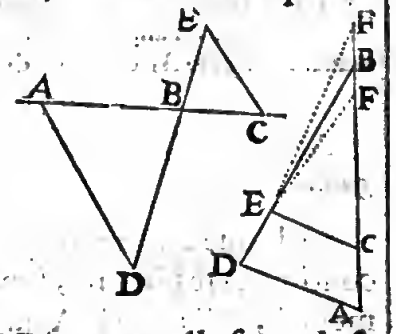
a 29.del 1.
b 13.del 1.
c 14.del 1.
d 29.del 1.
e 4.del 6.
f 16.del 5.
g 16.del 5.
h 11.del 5.
K 17.del 5.
l 9.del 5.

COROLLARIO

Da quel che s'è detto è manifeſto, che ſe D A ad A B è

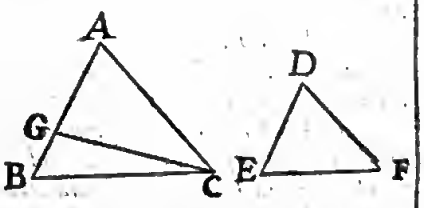
come

come E C à C B; tirata la retta B E, e continuata, quella concorre con A D nel punto D; ouero tirata la retta E D, quella continuata paſſa per il punto B; ouero tirata la retta D B, e continuata, ſe biſogna, quella paſſa per il punto E; ſtante che s'è dimoſtrato, che tirate le rette E B, B D come nella prima figura, ouero E D, E B, come nella ſeconda figura, quelle coſtituiſcono vna ſola retta linea.



THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vn angolo d'vn triangolo è vguale ad vn angolo d'vn altro triangolo; ed i lati intorno ad vn altr'angolo ſono proportionali; ed oltre à ciò i rimanenti due angoli ſono della medeſima ſpecie; i triangoli ſono equiangoli; e quegli angoli ſono vguali, che ſono oppoſti à i lati homologhi.



Ne i triangoli ABC, DEF, ſia l'angolo A vguale all'angolo D; ed i lati intorno à due altri angoli, come C, ed F ſiano proportionali; cioè che AC à CB ſia come DF ad FE; ed i rimanenti angoli E, & B ſiano della medeſima ſpecie; cioè che ognuno ſia minore del retto, ouero non minore del retto. Dico che gli angoli ABC, DEF, oppoſti à i lati homologhi, cioè à gli antecedenti DF, AC, ſono frà di loro vguali; e che gli angoli C, ed F ſono frà di loro vguali. Suppoſto prima, che gli angoli E, ed F ſiano acuti, cioè che ognuno ſia minore del retto; ſe l'angolo DFE non è vguale all'angolo ACB, vno de i due ſarà maggiore: e ſuppoſto che l'angolo ACB ſia maggiore dell'angolo DFE, ſi faccia l'angolo ACG [a] vguale all'angolo DFE; ſarà l'angolo A C G minore dell'angolo ACB; e perciò la retta CG ſega l'angolo ACB, e continuata concorre col lato AB in qualche punto G. Ne i triangoli AGC, DEF eſſendo l'angolo A, per ipoteſi, vguale all'angolo D; e l'angolo ACG, per coſtruttione, vguale all'angolo F; il rimanente angolo AGC [b] ſarà vguale al rimanente angolo E; ed i triangoli AGC, DEF ſono equiangoli, e la proportione di AC à CG [c] ſarà come quella di DF ad FE: ma DF

a 23. del 1.

b 32. del 1.

c 4. del 6.

ad FE, per ipotesi, è come AC a CB; sarà AC à CG [d] come la medesima AC à CB; dalche le rette CG, CB [e] sono frà di loro vguali, il triangolo CGB è isoscele, e gli angoli CBG, e CGB [f] sono fra di loro vguali: ma l'angolo CBG, per ipotesi, è minore d'vn angolo retto, sarà l'angolo CGB minore d'vn angolo retto; e perche gli angoli CGB, CGA [g] sono vguali à due retti, detrattone l'angolo CGB minore del retto, resta l'angolo CGA maggiore del retto; fù dimostrato l'angolo CGA vguale all'angolo E, sarà l'angolo E maggiore del retto, ch'è contro all'ipotesi, mentre l'angolo E fù supposto minore del retto: quando dunque ognuno degli angoli E, & B è minore del retto, non sono gli angoli ACB, DFE frà di loro ineguali.

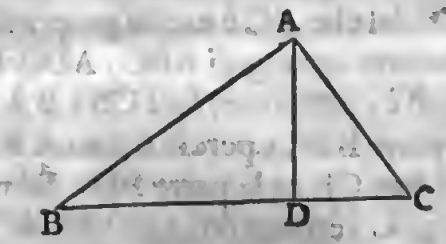
d 11. del 5.
e 9. del 5.
f 5. del 1.
g 13. del 1.

Di nuouo supposto, che ognuno degli angoli E, & B, non sia minore d'vn angolo retto; si faccia la medesima costruttione, e dimostratione di prima, e si dimostri, che le rette CG, CB sono frà di loro vguali; sarà il triangolo CGB isoscele, e gli angoli CBG, CGB [h] sono frà di loro vguali: ma l'angolo B è supposto non minore d'vn angolo retto, ne meno l'angolo CGB sarà minore d'vn angolo retto; e perciò i due angoli CBG, CGB, del triangolo CBG, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo Libro; non dunque l'angolo ACB è maggiore dell'angolo DFE, ma sono fra di loro vguali; e perche l'angolo A è supposto vguale all'angolo D, sarà il rimanente angolo B [K] vguale all'angolo E, ch'era da dimostrarsi.

h 5. del 1.
K 32. del 1.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se dall'angolo retto d'vn triangolo rettangolo cade vna retta perpendicolare al lato opposto, quella diuide il triangolo in due triangoli simili fra di loro; ed ognuno simile à tutto il triangolo.

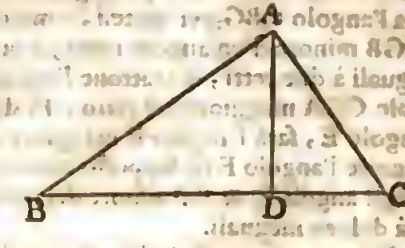


Nel triangolo ABC, angolo retto in A, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato opposto BC. Dico che i triangoli ADB, ADC sono frà di loro simili; ed ogn'vno è simile à tutto il triangolo ABC. Si considerino i triangoli ADC, BAC, de' quali gli angoli BAC. ADC sono retti; l'angolo C è commune ad ambidue i triangoli; e perciò il rimanente angolo DAC [a] sarà vguale al rimanente angolo B, ed i triangoli ABC, ADC sono equiangoli; dal che haueranno i lati intorno à gli angoli vguali [b] proportionali, e perciò [c] sono simili frà di loro; e sarà BA ad AC [d] come AD à DC. Di nuouo si considerino i due triangoli ADB, ABC, de quali gli angoli BAC, ADB sono retti; l'angolo B è commune ad ambidue i detti triangoli; sarà il rimanẽte angolo DAC, e

a 32. del 1.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 4. del 6.
e 32. del 1.

vgua-

vguale al rimanente angolo C, ed i triangoli ABC, A D B sono equiangoli: però i lati intorno à gli angoli vguali [f] sono proportionali; ed in conseguenza [g] sono frà di loro simili; e sarà BA ad A C [h] come B D à D A: mà, per quel che s'è dimostrato, BA ad AC è come A D à DC; sarà BD à DA [k] come AD à DC. Ne i triangoli ADB, ADC, angoli retti in D, essendo i lati intorno à gli angoli vguali A D B, A D C proportionali, cioè B D à D A, come AD à DC; i triangoli A D B, A D C [l] sono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [m] proportionali, e perciò [n] sono frà di loro simili. S'è dimostrato, che ogn'vno è simile à tutto il triangolo A B C; la retta dunque A D diuide il triangolo ABC in due triangoli simili frà di loro, ed ognuno simile à tutto il triangolo ABC, ch'era da dimostrarsi.



f 1. defin. del 6.
h 4. del 6.
K 11. del 5.
l 6. del 6.
m 4. del 6.
n 1. defin. del 6.

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrata BD à DA essere come la medesima DA à DC, sarà manifesto, che la retta AD, la quale cade dall'angolo retto A perpendicolare alla base BC, è media proportionale frà le parti BD, DC della base BC.

COROLLARIO II.

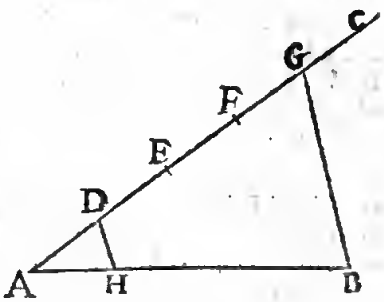
Perche i triangoli ABC, ADC sono equiangoli, e l'angolo C è commune, sarà BC à CA, come la medesima AC à CD; dal che AC è media proportionale frà BC, CD. Similmente i triangoli ABC, ADB sono equiangoli, e l'angolo B è commune; sarà CB à B A come la medesima A B alla parte B D, e perciò il lato A B è media proportionale frà il lato CB, e la parte BD. Donde è manifesto, che nel triangolo rettangolo, ogn'vno de' lati intorno all'angolo retto è media proportionale frà le base, e la parte interposta frà la perpendicolare, che cade dall'angolo retto, e quel lato.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE IX.

Da vna data retta linea tagliarne vna parte proposta.

Sia

Sia data la retta AB, dalla quale ſe ne voglia tagliare vna parte propoſta, e ſuppoſto che ſe ne voglia tagliare la quarta parte. Da vno degli eſtremi della retta AB, come dall'eſtremo A, ſi tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta AB; ſi prenda in AC qualunque punto D, e ſi taglino le parti DE, EF, FG, [a] ogn'vna vguale ad AD; e le parti vguali in AG deuono eſſere tante, per quanto biſogna, acciòche AD ſia parte di AG, ſecondo la propoſta parte; e perche s'è propoſta la quarta parte, perciò le parti in AG ſaranno quattro. Si tiri la retta GB, e dal punto D ſi tiri la retta DH, [b] parallela alla retta GB, la quale ſegarà AB in qualche punto H. Dico che AH ſarà la quarta parte di AB. Nel triangolo AGB la retta DH è parallela al lato GB, e perciò GD à DA [c] ſarà come BH ad HA; e componendo, GA ad AD [d] ſarà come BA ad AH; ed inuertendo, AD ad AG [e] ſarà come AH ad AB: ma AD è la quarta parte di AG, ſarà dunque AH [f] la quarta parte di AB. L'iſteſſo ſi farà ſe ſarà propoſta altra parte, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

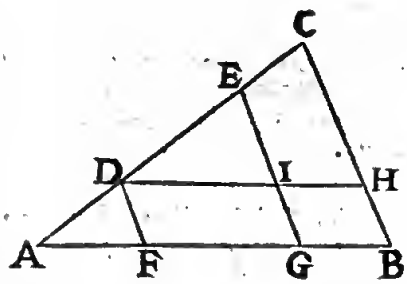


a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 6.
d 18. del 5.
e Corol. alla 4. del 5.
f Coroll. alla 15. del 5.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE X.

Date due rette linee, delle quali vnà ſia diuiſa in quante parti ſi vuole, e l'altra non diuiſa; ſegare la non diuiſa nelle parti della diuiſa.

Sia la retta non diuiſa AB, da ſegarſi nelle parti della diuiſa AC; cioè che le parti di AB habbiano l'iſteſſa proportione, quale hanno le parti, che ſono in AC, la quale ſupponiamo diuiſa come in D, ed E. S'inclinino le rette AB, AC, che s'vniſcano nell'eſtremo A, ſecõdo qualũque angolo CAB; ſi tiri la retta CB; e da i punti D, ed E, ſi tirino le rette DF, EG [a] parallele alla retta CB, le quali ſegaranno la retta AB come in F, & G. Dico che AB ſarà diuiſa nelle parti di AC. Dal punto D ſi tiri la retta DH [b] parallela ad AB, la quale ſegarà le rette EG, CB, come in I, ed H. E perche le rette DF, IG, HB ſono parallele, i quadrilateri DFGI, IGBH ſono parallelogrammi; e ſarà DI [c] vguale ad FG, & IH vguale à GB; per la qual coſa DI ad IH [d] ſarà come FG à GB. Nel triangolo AGE la retta DF è parallela ad EG,



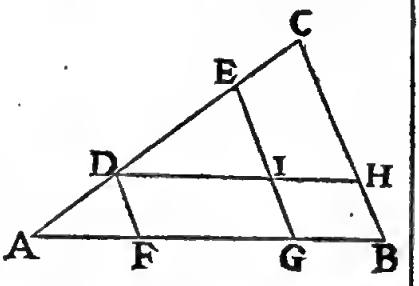
a 31. del 1.
b 31. del 1.
c 34. del 1.
d Corol. alla 7. del 5.

e 2. del 6. sarà AD à DE e come AF ad FG. Similmente nel triangolo DHC la retta EI è parallela ad HC, sarà

f 2. del 6. DE ad EC f come DI ad IH; ma DI ad IH è come FG à GB, sarà

g 11. del 5. DE ad EC come g FG à GB. Hor essendo AD à DE come AF ad FG;

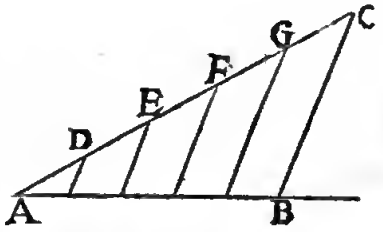
h 12. del 5. e DE ad EC come FG à GB, per l'egualità, AD ad EC h sarà come AF à GB; per la qual cosa le parti in AB hanno frà di loro l'istessa proportione, quale hanno le parti in AC frà di loro, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



SCOLIO.

Da quel che s'è detto, sarà facile trouare il modo da diuidere vna retta in quante parti vguali si vuole.

Per essempio, habbiasi da diuidere la retta AB in quante parti vguali si vuole: dall'estremo A si tiri la retta AC, che faccia qualunque angolo con la retta AB; si prendano in AC tante parti vguali, per quante parti si vogliono in AB; cioè se si vuole diuidere AB in tredici parti vguali, si prenderanno in AC, tredici parti vguali: se AB si vuole diuidere in cinque parti vguali, si prenderanno in AC cinque parti vguali, e così per le altre di moltitudine maggiore, ò minore; poi si congiungano gli estremi C, & B con la retta CB, e da i punti D, E, F, G, &c. si tirino rette linee parallele alla retta CB, le quali continuate diuideranno AB in tante parti vguali, in quante è diuisa la retta AC, come sopra fù dimostrato.



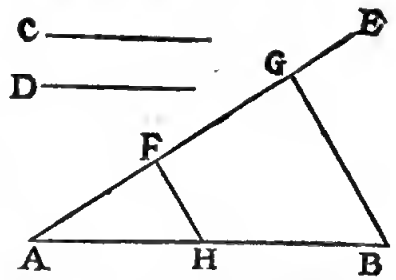
Non sarà inutile aggiungere quì vn Problema di Pappo nel settimo libro delle sue Collettioni Matematiche.

Diuidere vna data retta linea secondo vna data proportione.

Habbiasi da diuidere qualunque data retta AB, secondo la data proportione di C à D. Dall'estremo A si tiri la retta AE, che faccia qualunque

angolo

angolo con A B; poi ſi faccia AF [a] *vguale à C, e ſi tagli F G vguale à D; ſarà A F ad FG* [b] *come C à D. Si tiri la retta GB, e dal punto F ſi tiri la retta FH* [c] *parallela alla retta G B, la quale ſegarà la retta A B in qualche punto H. Dico che A H ad H B è come C à D. Nel triangolo ABG, la retta F H è parallela al lato G B, ſarà* [d] *A H ad H B come AF ad FG; ma AF ad FG è come C à D, ſarà AH ad HB* [e] *come C à D, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*



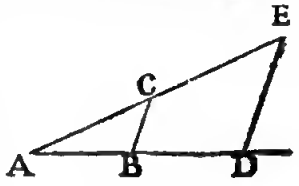
a 3.del 1.
b Corol.alla 7.del 5.
c 3. del 1.
d 2.del 6.
e 11.del 5.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Date due rette linee, ritrouarle vna terza proportionale.

Siano date le due rette AB, AC, alle quali ſi vuole ritrouare vna terza proportionale; cioè che la prima AB alla ſeconda AC ſia come la ſeconda AC ad vn altra terza quantità.

S'inclinino le due AB, AC, che concorrano inſieme nell'eſtremo A, e facciano qualunque angolo CAB; ſi tiri la retta CB, poi ſi continui AB verſo D, e ſi faccia B D [a] vguale ad A C; dal punto D ſi tiri la retta D E [b] parallela alla retta B C, la quale concorrerà con A C continuata in qualche punto E. Dico che la retta CE ſarà la terza proportionale. Nel triangolo ADE la retta CB è parallela ad ED, ſarà AB à BD [c] come AC à CE; ma BD è vguale ad AC, ſarà AB ad AC come la medeſima AC à CE; cioè la prima AB alla ſeconda AC come la ſeconda AC alla terza CE, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



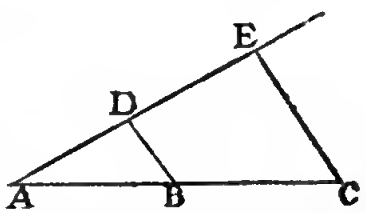
a 3.del 1.
b 31.del 1.
c 2.del 2.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XII.

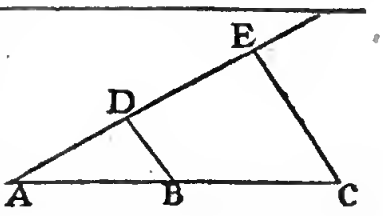
Date tre rette linee, ritrouarle la quarta proportionale.

Siano date le tre rette linee A B, BC, AD, alle quali ſi voglia ritrouare la quarta proportionale.

Si ponghino le prime due AB, BC in modo, che facciano la ſola retta AC; e nell'eſtremo A s'inclini la terza A D à qualunque angolo con la



retta A B ; si tiri la retta D B ; e dal punto C si tiri la retta C E [a] parallela alla retta B D , la quale concorrerà con A D continuata in qualche punto E . Dico che D E sarà la quarta proportionale , che si cerca . Nel triangolo ACE la retta D B è parallela ad EC, sarà la prima AB alla seconda B C [b] come la terza A D alla quarta DE, ch'era da farsi, e dimostrarsi .



a 31. del 3.

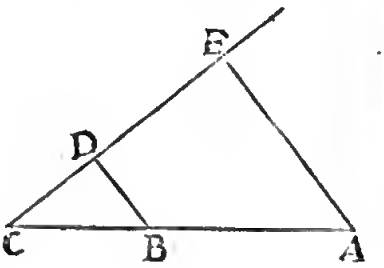
b 2. del 6.

SCOLIO.

Il seguente problema di Pappo Alessandrino è simile all'antecedente.

Date le tre rette AB , BC , CD ritrouare vna retta , che habbia l'istessa proportione à DC, quale hà AB à BC.

Si pongano le due AB , BC in vna medesima dirittura ; e nell'estremo C s'inclini D C à qualunque angolo con la retta C A ; si tiri la retta D B ; e dal punto A [c] si tiri la retta A E parallela alla retta DB , la quale concorrerà con CD , continuata in qualche punto E; sarà ED la retta, che si cerca . Perche essendo D B parallela ad AE, sarà A B à B C [d] come E D à DC, ch'era da farsi, e dimostrarsi .



c 31. del 1

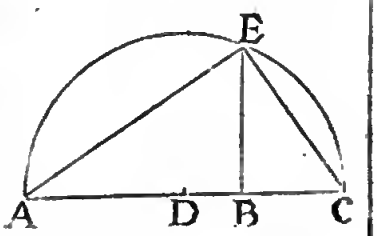
d 2. del 6.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XIII.

A due date rette linee ritrouare vna media proportionale .

Siano date le rette AB , BC , alle quali si voglia ritrouare vna media proportionale .

Si pongano le rette date AB, BC in modo , che costituiscano la sola retta A C , la quale [a] si diuida in due parti vguali in D, e fatto centro in D , coll' interuallo DA , ouero DC, si descriua il mezzo circolo AEC ; nel punto B , sopra la retta AC, [b] s'erigga la perpendicolare BE, la quale concorrerà con la circonferenza AEC in qualche punto E . Dico che la retta EB è media proportionale frà le due AB,BC. Si tirino le rette EA,EC; sarà l'angolo



a 10. del 2.

b 11. del 1.

golo A E C [c] nel mezzo circolo retto. Nel triangolo rettangolo A E C dall'angolo retto E cade la retta EB perpendicolare alla baſe AC, la retta EB [d] diuide il triangolo EAC ne i due triangoli EBC, EBA frà di loro ſimili, e la proportione di AB à BE [e] ſarà come quella di B E à B C; dal che di tre rette proportionali AB, BE, BC, quella di mezzo è la retta EB, che diciamo media, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[c] d 8. del 6.
[d] e 1. def. del 6.

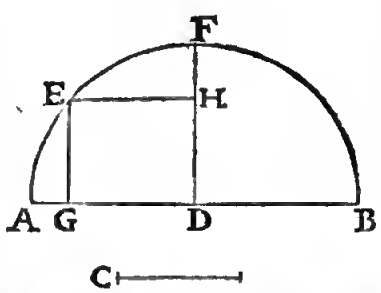
COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che ſe da qualunque punto preſo nella circonferenza d'vn mezzo circolo, cade vna retta perpendicolare al diametro, quella ſarà media proportionale frà le parti del diametro, e la dimoſtratione è la medeſima fatta antecedentemente.

SCOLIO.

Gioua per le coſe auuenire il ſeguente Problema.

Sia data la retta C non maggiore della metà di A B; diuidere la retta A B in modo, che la retta C ſia media proportionale frà le parti di AB.



Si diuida A B [a] in due parti vguali in D; fatto centro in D, coll'interuallo D A, ouero D B, ſi deſcriua il mezzo circolo A F E; nel centro D ſi ponga D F [b] perpendicolare ad A B, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto F. Se la retta C è vguale ad FD, eſſendo FD media proportionale frà le due A D, D B ſarà la retta C media proportionale frà le medeſime parti AD, DB; ma ſe la retta C è minore di F D, ſi faccia DH [c] vguale alla retta C, dal punto H ſi tiri la retta HE [d] parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferenza in qualche punto E, dal punto E ſi faccia cadere la retta E G [e] perpendicolare ad A B: per l'antecedente Corollario la retta E G ſarà media proportionale frà le parti AG, GB; ma la retta EG [f] è vguale ad HD cioè vguale alla retta C (per eſſere HDGE parallelogrammo) ſarà la retta C media proportionale frà le parti AG, GB; per la qual coſa la retta AB è diuiſa in G in modo che la data C è media proportionale frà le parti A G, G B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[a] a 10. del 1.
[b] b 11. del 1.
[c] c 3. del 1.
[d] d 31. del 1.
[e] e 12. del 1.
[f] f 34. del 1.

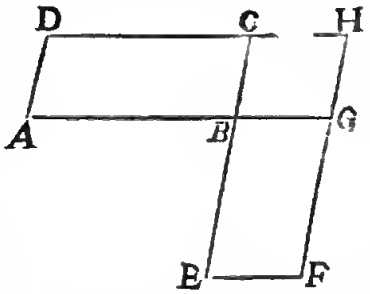
THEOREMA IX. PROPOSITIONE XIV.

Se i parallelogrammi, de'quali vn angolo dell'vno ſia vguale ad vn angolo dell'altro, ſono frà di loro vguali, i

lati

lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i parallelogrammi ſono frà di loro vguali.

Siano i due parallelogrammi ABCD, BEFG, de' quali l'angolo ABC dell'vno ſia vguale all'angolo EBG dell'altro; e ſuppoſto prima che il parallelogrammo ABCD ſia vguale al parallelogrammo B E F G. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali, ABC, EBG ſono reciprochi; cioè che AB à BG è come EB à BC.



Si accommodino i propoſti parallelogrammi in modo, che i lati AB, BG facciano la ſola retta linea AG. Perche gli angoli ABC, EBG ſono vguali, s'aggiunga all'vno, ed all'altro, il commune angolo C B G; i due angoli ABC, CBG ſaranno vguali à i due angoli EBG, GBC: mà i due angoli ABC, CBG ſono [a] vguali à due angoli retti; i due angoli dunque EBG, GBC ſono vguali à due angoli retti; dal che le rette EB, BC [b] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Si prolunghino i lati DC, FG ſin'che concorrono in qualche punto H. Perche i parallelogrammi DB, BF, per ipoteſi ſono frà di loro vguali, preſo il parallelogrammo CG come terza quantità, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG, [c] come il parallelogrammo BF al medeſimo parallelogrammo CG: mà il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G [d] (per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza) è come la baſe A B alla baſe B G; ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG, [e] come AB à BG. Il parallelogrammo BF al paralellogrammo C G, [f] per eſſere ſotto d'vna medeſima altezza, è come le baſe EB alla baſe BC; ſarà AB à BG [g] come EB à B C; per la qual coſa i lati intorno à gli angoli vguali [h] ſono reciprochi, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 13.del 1.
b 14.del 1.
c 7.del 5.
d 1.del 6.
e 11.del 5.
f 1.del 6.
g 11.del 5.
h 2. defin. del 6.

Di nuouo, ſuppoſto che AB à BG ſia come EB à BC. Dico che i parallelogrammi D B, B F ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima; perche i parallelogrammi DB, C G hanno vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [k] come la baſe AB alla baſe BG; mà AB à BG, per ipoteſi, è come EB à BC; ſarà il parallelogrammo DB al parallelogrammo CG [l] come EB à BC. Similmente, eſſendo i parallelogrammi BF, CG ſotto d'vna medeſima altezza, ſarà il parallelogrammo BF al parallelogrammo CG [m] come le baſe EB alla baſe BC: mà la baſe EB alla baſe BC è come il parallelogrammo D B al parallelogrammo C G; il parallelogrammo dunque DB al parallelogrammo C G [n] ſarà come il parallelogrammo B F al medeſimo parallelogrammo C G; per la qual coſa i parallelogrammi DB, BF [o] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

K 1.del 6.
l 11.del 5.
m 1.del 6.
n 11.del 5.
o 9.del 5.

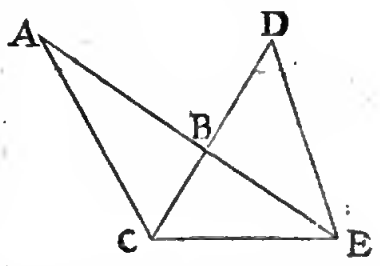
CO-

COROLLARIO.

Da quel,che s'è dimoſtrato nell'antecedente propoſitione,è manifeſto, che quando due angoli vguali,come EBG, ABC, ſono in modo collocati, che due delle rette,che gli contengono, come A B, B G, fanno vna ſola retta linea, le altre due rette EB,B C fanno ancora vna ſola retta linea.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XV.

Se due triangoli, de' quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn angolo dell'altro, ſono frà di loro vguali, i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; e ſe i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi, i triangoli ſono frà di loro vguali.

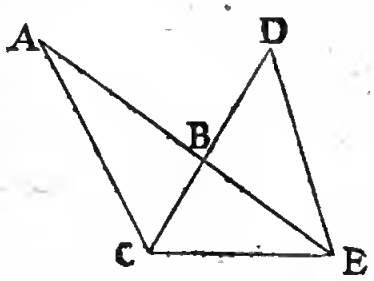


Siano i triangoli ABC, DBE, de' quali l'angolo ABC ſia vguale all'angolo D B E; e ſuppoſto prima che i triangoli ABC, DBE ſiano frà di loro vguali. Dico che i lati intorno à gli angoli vguali ABC, DBE ſono reciprochi; cioè, che la proportione di AB à BE è come quella di DB à BC. Si addattino i propoſti triangoli in modo, che ſi tocchino ſecondo l'angolo B, e che i lati AB, BE facciano vna ſola retta linea: eſſendo gli angoli ABC, D B E frà di loro vguali, per l'antecedente Corollario, le rette DB, BC coſtituiranno vna ſola retta linea; ſi tiri la retta C E. I triangoli DBE, EBC hanno le baſi DB, BC in vna medeſima retta linea, e gli angoli oppoſti s'vniſcono nel ſolo punto E, ſe per quel che ſi diſſe nella quarta definitione di queſto, hanno vna medeſima altezza; e la proportione del triangolo DEB al triangolo E B C [a] è come la baſe D B alla baſe BC. Per l'iſteſſa ragione i triangoli ACB, BCE hanno vna medeſima altezza, e ſarà il triangolo ABC al triangolo CBE come la baſe AB alla baſe BE. In oltre perche i triangoli ABC, DBE, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, preſo il triangolo CBE come terza quantità, ſarà il triangolo ABC al triangolo BCE, [b] come il triangolo D B E al medeſimo triangolo C B E; ſi è dimoſtrato il triangolo A B C al triangolo CBE eſſere come AB à BE; ſarà il triangolo D B E al triangolo C B E [c] come AB à BE: mà il triangolo DBE al triangolo CBE è come DB à BC; ſarà dunque AB à BE [d] come DB à BC, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 1. del 6.
b 7. del 5.
c 11. del 5.
d 11. del 5.

Di

Di nuouo, ſuppoſto che A B à B E ſia come D B à B C. Dico che i triangoli ABC, DBE ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima. Perche i triangoli DEB, EBC hanno vna medeſima altezza, il triangolo DBE al triangolo EBC [e] ſarà come le baſe D B alla baſe B C; mà per ipoteſi D B à B C è come AB à BE; ſarà il triangolo DBE al triangolo CBE [f] come AB à BE. Similmente eſſendo i triangoli ABC, CBE ſotto vna medeſima altezza, ſarà il triangolo A B C al triangolo C B E [g] come la baſe A B alla baſe BE; mà fù dimoſtrato il triangolo DBE al triangolo CBE eſſere come AB, à B E; ſarà il triangolo ABC al triangolo, CBE [h] come il triangolo DBE al medeſimo triangolo CBE: per la qual coſa i triangoli A B C, D B E [K] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

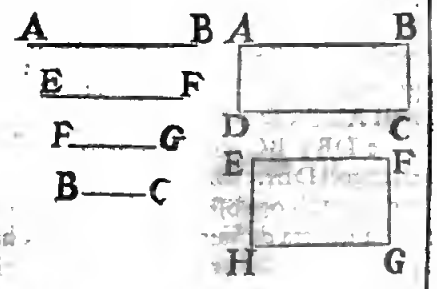


e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 9. del 5.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XVI.

Se quattro linee rette ſono proportionali, il rettangolo contenuto dalle eſtreme, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie; e ſe il rettangolo contenuto dalle eſtreme è vguale al rettangolo contenuto dalle medie, le quattro rette linee ſono proportionali.

Siano le quattro rette linee AB, EF, FG, BC; e prima habbia AB ad EF l'iſteſſa proportione, quale hà F G a B C. Dico che il rettangolo contenuto dalle eſtreme AB, BC, è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Con le due eſtreme AB, BC ſi faccia il parallelogrammo rettangolo ABCD; e con le due medie EF, FG ſi faccia il rettangolo EFGH.



Perche gli angoli in B, ed F ſono vguali, ſtante che ſono retti, ed il lato AB al lato EF, è come FG à BC: cioè i lati intorno à gli angoli vguali ſono reciprochi; ſarà il rettangolo AC [a] vguale al rettangolo EG: mà il rettangolo AC, per coſtruttione, è contenuto dalle eſtreme AB, BC; ed il rettangolo EG è contenuto dalle medie EF, FG; il rettangolo dunque contenuto dalle eſtreme AB, BC è vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 14. del 6.

Di nuouo ſuppoſto, che il rettangolo contenuto dalle eſtreme A B, BC, ſia vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG. Dico che

AB ad EF, sarà come FG à BC; s'intenda fatta l'istessa costruttione di prima. Perche i rettangoli AC, EG si suppongono vguali, e gli angoli in B, ed F sono vguali, i lati intorno à gli angoli vguali B ed F, o sono reciprochi; e perciò il lato AB al lato EF sarà come FG à BC; cioè le quattro rette AB, EF, FG, BC sono proportionali, ch'era da dimostrarsi. b 14. del 6.

COROLLARIO I.

Da quel che s'è detto, è manifesto, che quando quattro linee rette sono proportionali, ancora il parallelogrammo contenuto dalle estreme è vguale al parallelogrammo equiangolo contenuto dalle medie.

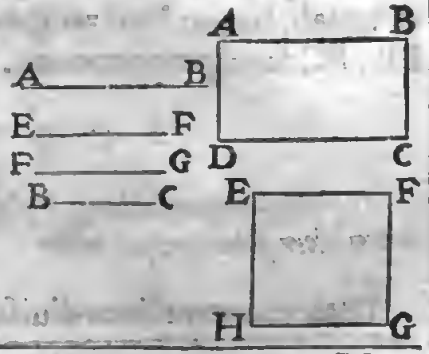
Poiche se i parallelogrammi AC, EG non sono rettangoli, basta che gli angoli in B, ed F siano vguali, ed i lati intorno à questi angoli vguali siano reciprochi, accioche i parallelogrammi AC, EG siano frà di loro vguali. E parimente basta, che i parallelogrammi AC, EG siano vguali, e gli angoli in B, ed F siano vguali, accioche i lati intorno à questi angoli vguali siano reciprochi.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propositione si caua il modo da conoscere se quattro date rette linee sono proportionali.

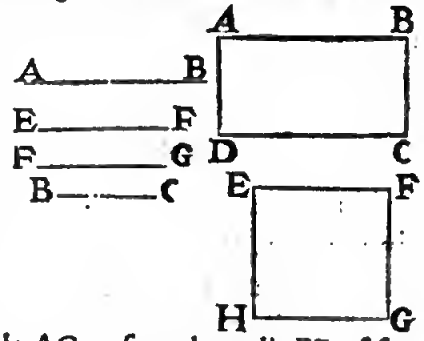
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XVII.

Se tre linee rette sono proportionali, il rettangolo contenuto dalle estreme, è vguale al quadrato della media; e se il rettangolo contenuto dalle estreme è vguale al quadrato della media, quelle tre rette linee sono proportionali.



Siano le tre rette linee AB, EF, BC; e prima habbia AB ad EF l'istessa proportione, quale hà la medesima EF à BC. Dico che il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, è vguale al quadrato della media EF; si faccia la retta FG vguale alla retta EF; sarà il quadrato di EF vguale al rettangolo contenuto dalle due vguali EF, FG. In oltre perche AB ad EF, per ipotesi, è come EF à

BC, e la retta FG è vguale ad EF; sarà AB ad EF, come FG à BC; e per l'antecedente propositione, il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, sarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie EF, FG; cioè vguale al quadrato della media EF, che era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo, supposto che il rettangolo contenuto dalle estreme AB, BC, sia vguale al quadrato della media EF. Dico, che la proportione di AB ad EF, sarà come quella di EF à BC. Con le estreme AB, BC si costituisca il rettangolo AC; e sopra la media EF [a] si faccia il quadrato EG, sarà EF vguale ad FG. Perche il parallelogrammo AC è posto vguale al parallelogrammo EG, e gli angoli in B, ed F sono vguali, stanteche sono retti; i parallelogrammi AC, EG [b] haueranno i lati intorno à gli angoli vguali reciprochi; e perciò AB ad EF sarà come FG à BC: ma FG è vguale ad EF; sarà AB ad EF, come la medesima EF à BC. Per la qual cosa le tre rette linee AB, EF, BC sono proportionali, ch'era da dimostrarsi.

a 46. del 1.

b 14. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifesto, che se tre rette linee sono proportionali, il parallelogrammo contenuto dalle estreme, è vguale al rombo equiangolo descritto sopra la media; e se il parallelogrammo contenuto dall'estreme è vguale al rombo descritto sopra la media, le tre rette linee sono proportionali; stante che se EG sarà Rombo, & AC parallelogrammo, equiangolo al rombo, se hanno i lati reciprochi, sono frà di loro vguali; e se sono frà di loro vguali, hanno i lati reciprochi: e perciò le tre rette AB, EF, BC sono proportionali.

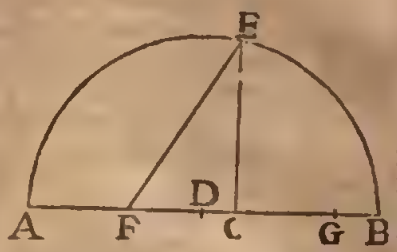
SCOLIO.

Aggiungo in questo luogo il seguente Problema del Peletario, però con altra solutione più breue.

Data vna retta linea diuisa in due parti come si vuole,

diui-

diuidere vna di quelle parti in modo, che le tre siano continue proportionali.



Sia la retta A B diuisa come si vuole in C, e si voglia diuidere la parte C B in modo, che le tre parti in A B siano continue proportionali. Si diuida AB [a] *in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo AD, ouero DB, si descriua il mezzo circolo A E B; nel punto C si erigga C E* [b] *perpendicolare ad AB; sarà CE* [c] *media proportionale frà le due AC, CB; ed il rettangolo contenuto dalle due AC, CB* [d] *sarà vguale al quadrato di CE. Si diuida AC* [e] *in due parti vguali in F, si tiri la retta FE; poi si faccia FG* [f] *vguale ad FE. Dico che le tre AC, CG, GB sono continue proportionali.*

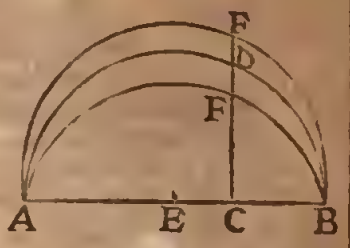
Nel triangolo E C F, angolo retto in C, il quadrato di EF [g] *è vguale à i quadrati de'i due lati EC, CF; fù fatta la retta FG vguale ad EF; sarà il quadrato di FG vguale à i quadrati delle due EC, CF: ma il quadrato di FG* [h] *è vguale à i quadrati delle parti FC, CG col doppio rettangolo contenuto dalle medesime FC, CG; i quadrati dunque delle parti FC, CG, col doppio rettangolo contenuto dalle rette FC, CG, sarà vguale à i quadrati de'lati EC, CF: se ne leui il commune quadrato di CF, resta il quadrato di EC vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due FC, CG, col quadrato di CG; ma il doppio rettangolo contenuto dalle due GC, CF* [K] *è vguale al rettangolo contenuto da GC, & CA (stante che CF, FA sono vguali) sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG, vguale al quadrato di CE. Fù dimostrato il quadrato di C E vguale al rettangolo contenuto dalle due A C, CB; sarà il rettangolo contenuto dalle due AC, CB vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Si consideri AC come non diuisa, e la retta C B diuisa in G; sarà il rettangolo contenuto dalle due A C, CB,* [l] *vguale à i due rettangoli contenuti da AC, & CG, e da A C, & G B: ma si disse, che il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG; i due rettangoli dunque contenuti da AC, & CG, e da AC, & GB insieme giunti, sono vguali al rettangolo contenuto dalle due AC, CG, col quadrato di CG. Se ne leui il commune rettangolo contenuto dalle due AC, CG; resta il quadrato di CG vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, GB; e per l'antecedente propos. AC à CG sarà come CG à GB; cioè le tre rette AC, CG, GB sono continue proportionali, che era da farsi, e dimostrarsi.*

a 10. del 2.
b 11. del 1.
c 13. del 6.
d 17. del 6.
e 10. del 1.
f 3. del 1.
g 47. del 1.
h 4. del 2.
K 1. del 2.
l 1. del 2.

Per le cose, che possono bisognare, non sarà inutile aggiungere il seguente Theorema.

Se qualche retta AB sia diuisa in qualunque modo in C;

e nel punto C si erigga la retta CD perpendicolare ad AB; in modo che il rettangolo contenuto dalle parti AC,CB sia vguale al quadrato della perpẽdicolare CD; il punto D sarà nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è AB.

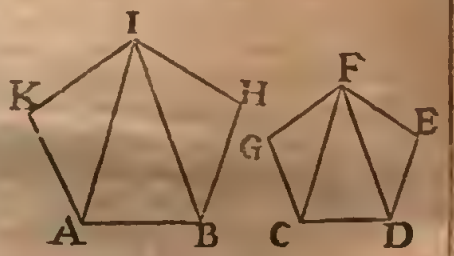


a 10. del 1. *Si diuida AB a in due parti vguali in E, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, ouero EB, si descriua vn mezzo circolo. Se la circonferenza di quel mezzo circolo non passa per il punto D, ò passarà sotto, ò sopra al punto D, come fà la circonferenza AFB. Si continui C D fino che concorra con la circonferenza AFB in qualche punto F; sarà FC* b *media proportionale frà le due AC, CB; e per l'antecedente propositione, il rettangolo contenuto dalle estreme AC, CB, è vguale al quadrato della media F C: ma per ipotesi il medesimo rettangolo contenuto dalle parti AC, CB è vguale al quadrato di CD; sarà il quadrato di CD vguale al quadrato di CF; e la retta CD sarà vguale alla retta CF: la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque la circonferenza passa sopra, ne sotto al punto D. Per la qual cosa il punto D è nella circonferenza di quel circolo, del quale AB è diametro, ch'era da dimostrarsi.*

b 13. del 6.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Descriuere sopra vna data retta linea vn rettilineo simile, e similmente posto ad vn'altro rettilineo dato.



Sia data la retta AB, ed il rettilineo CDEFG, e si voglia sopra la retta AB descriuere vn rettilineo simile, e similmente posto al dato rettilineo CDEFG. Da vno degli angoli del dato rettilineo, come dall'angolo F, si tirino rette linee à gli angoli opposti, che siano le rette FC, FD in modo, che il dato rettilineo resti diuiso in tanti triãgoli, come FGC, FCD, FDE; poi sopra la retta AB, nel punto A, si faccia l'angolo BAI a vguale all'angolo DCF; e nel pũto B si póga l'ãgolo ABI vguale all'ãgolo CDF; perche gli angoli FCD, FDC b sono minori di due angoli retti; perciò i due angoli IAB, IBA sono minori di due angoli retti; si che continuate le rette AI, BI c concorreranno in qualche punto I; ed il rimanente angolo AIB d sarà vguale al rimanente angolo CFD; dal che il triangolo ABI sarà equiangolo al triangolo FCD. Di nuouo sopra la retta AI, nel punto A, si costituisca l'angolo I A K, e vguale all'angolo FCG; e nel punto I si ponga l'angolo AIK vguale all'angolo CFG: si di-

a 23. del 1.
b 17. del 1.
c Scol. alla 31. del 1.
d 32. del 1.
e 23. del 1.

mostra-

mostrerà come prima, che le rette AK, IK concorrono in qualche punto K, e che l'angolo AKI è vguale all'angolo C G F. Similmente sopra la retta IB, nel punto B, si faccia l'angolo IBH [f] vguale all'angolo FDE, e nel punto I si costituisca l'angolo BIH vguale all'angolo DFE; e si dimostri come prima, che le rette B H, I H concorrono in qualche punto H, e che l'angolo IHB è vguale all'angolo FED. Col medesimo ordine si procederà se nel rettilineo CDEFG vi fossero più triangoli. Dico che il rettilineo ABHIK è simile, e similmente posto al rettilineo CDEFG. Perche gli angoli IAB, IAK sono fatti vguali à gli angoli FCD, FCG, tutto l'angolo KAB sarà vguale à tutto l'angolo GCD. Similmente gli angoli IBA, IBH, per costruttione, sono vguali à gli angoli FDC, FDE; dal che tutto l'angolo ABH vguale à tutto l'angolo CDE; di più, perche i tre angoli KIA, AIB, BIH sono fatti vguali alli trè angoli GFC, CFD, D F E; sarà tutto l'angolo K I H è vguale à tutto l'angolo G F E: gli angoli K, ed H sono mostrati vguali à gli angoli G, ed E; sarà il rettilineo ABHIK equiangolo al rettilineo CDEFG. Si considerino i triangoli equiangoli KAI, GCF, de'quali l'angolo KAI è vguale all'angolo GCF; sarà KA ad AI [g] come GC à CF. Similmente essendo i triangoli IAB, FCD equiangoli, sarà IA ad AB [h] come FC à CD; e per l'vgualità KA ad AB [K] sarà come GC à CD; dalche i lati intorno à gli angoli vguali KAB, GCD sono proportionali. In oltre essendo il triangolo IAB equiangolo al triangolo FCD, ed il triangolo IBH equiangolo al triangolo FDE; sarà AB à BI [l] come CD à DF; ed IB à BH, come FD à DE; e per l'vgualità AB à BH [m] sarà come CD à DE: ed essendo il triangolo DEF equiangolo al triangolo BHI, ed il triangolo CGF equiangolo al triangolo AKI, sarà DE ad EF [n] come BH ad HI; e sarà CG à GF, come AK à KI. Finalmente essendo i tre triangoli HIB, BIA, AIK equiangoli à i corrispondenti tre triangoli D E F, DFC, CFG; sarà HI ad IB, [o] come EF ad FD; e BI ad IA sarà come DF, ad FC; e sarà AI ad IK come CF ad FG; e per l'vgualità, HI ad IK [p] sarà come EF ad FG. Per la qual cosa i rettilinei ABHIK, CDEFG sono equiangoli, ed hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò sono [q] frà di loro simili, e sono ancora similmente posti, stante che l'angoli vguali sono sopra i lati homologhi ch'era da farsi, e dimostrarsi.

f 23. del 1.

g 4. del 6.

h 4. del 6.

K 22. del 5.

l 4. del 6.

m 22. del 5.

n 4. del 6.

o 4. del 6.

p 22. del 5.

q 1. defin. del 6.

ANNOTATIONE.

Prima d'inoltrarmi nella compositione delle proportioni, dottrina tanto più difficile ad essere intesa, quanto che nasce da principio non dimostrato sin' ad hora, ne da Euclide, ne, che io sappia, da alcun'altra persona; parmi necessario spiegare alcune cose, che possono facilitarci la strada all'intiera cognitione di tal principio, e perciò fare premetto le seguenti notitie.

DEFINITIONE I.

Qualunque cosa, che si dice una, ouero uno, generalmente si chia-

ma

ma vnità; donde ne segue, che ogni linea retta può prendersi come vnità.

DEFINITIONE II.

Multiplicare due quantità frà di loro è il trouare vna terza quantità, la quale habbia tal proportione ad vna delle quantità da multiplicarsi, quale hà l'altra all'vnità; e la quantità trouata si chiama Prodotto.

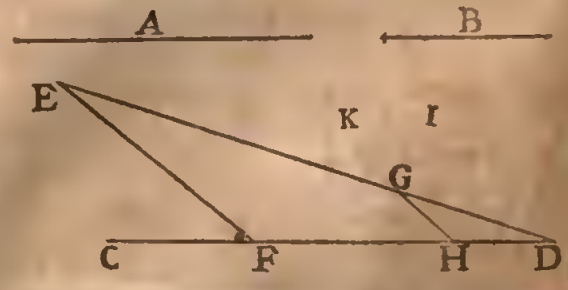
DEFINITIONE III.

Diuidere vna quantità per vn altra è il trouare vna terza quantità, che habbia tal proportione all'vnità, quale hà la quantità diuisa al diuisore, e la quantità trouata si chiama Quotiente.

LEMMA I.

Date due qualunque quantità è possibile multiplicare l'vna per l'altra.

Siano le quantità date A, & B, e si voglia multiplicare l'vna per l'altra.



S'intenda tirata la retta CD, alla quale sia inclinata la retta ED à qualunque angolo EDC. Se le quantità date sono linee rette, Si faccia DF [a] *vguale ad A; e si tagli DG vguale à B: si prenda in DF qualunque punto H, e presa DH come vnità, si tirì la retta HG; dal punto F* [b] *si tiri la retta FE parallela ad HG. Dico che ED sarà il prodotto di tal multiplicatione secondo l'vnità DH*

Nel triangolo EDF la retta GH, per costruttione, è parallela ad EF, dal che [c] *EG à GD sarà come FH ad HD; e componendo,* [d] *ED à DG sarà come FD à DH; e permutando,* [e] *ED à DF sarà come DG all'vnità DH: Per costruttione DF, DG sono vguali alle rette A, & B da multiplicarsi, e perciò la retta ED alla retta da multiplicarsi FD, ouero A, sarà come GD, cioè B (ch'è l'altra quantità da multiplicarsi) all'vnità HD; e per la seconda delle antecedenti definitioni, ED sarà il prodotto della multiplicatione di A nella quantità B, secondo l'vnità HD, ch'era da farsi nel primo luogo.*

Se le quantità AB non sono linee rette, si prenda in CD qualunque parte FD, e si concepisca nella proportione di A à B essere FD ad vn'altra, che sia DG; inuertendo B ad A sarà [f] *come GD à DF. Nella retta FD si prenda qualunque altra parte DH; si tiri la retta HG; dal punto F sia tirata la retta FE* [g] *parallela ad HG, che continuata concorrerà con DE in qualche punto*

a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 2. del 6.
d 18. del 5.
e 16. del 5.
f Corollario alla 4. del 5.
g 31. del 1.

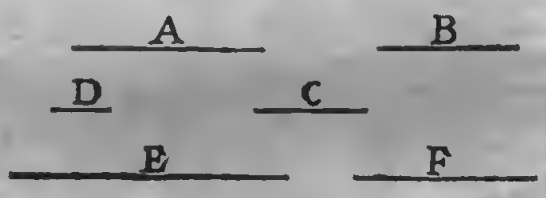
to E: ſe concepiremo HD come vnità, ſarà, per quel che s'è dimoſtrato, ED il prodotto della multiplicatione di FD in DG; ſi concepiſca ſicome FD à DE, coſi A ad vn'altra quantità del medeſimo genere, che ſia K; e ſicome GD à DH ſi concepiſca B ad'vn'altra quantità del medeſimo genere, che ſia I.

Perche FD à DG, per coſtruttione, è come A à B; e la proportione di GD à DH è come B ad I; per l'vgualità, [h] *ſarà FD à DH come A ad I. Di nuouo, perche GD à DF è come B ad A; ed FD à DE è come A à K; per l'vgualità, GD à DE,* [K] *ſarà come B à K; ed inuertendo, ED à DG ſarà come K à B: mà ED à DG è come FD à DH; ſarà K à B* [m] *come FD à DH. Fù dimoſtrata FD à DH come A ad I, ſarà K à B,* [n] *come A ad I; e permutando, K ad A* [o] *ſarà come B ad I; cioè la quantità K alla quantità A, da multiplicarſi, come l'altra quantità B, da multiplicarſi, all'vnità I; per la ſeconda definitione, la quantità K ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità A nella quantità B, ſecondo l'vnità I, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*

h 22. del 5.
K 22. del 5.
l Corol. alla 4. del 6.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.

LEMMA II.

Se due quantità ſono multiplicate per vna medeſima quantità, ſecondo vn'iſteſſa vnità, i prodotti ſono frà di loro come le quantità multiplicate; e quei prodotti li chiameremo vguali multiplici delle quantità multiplicate.



Siano due qualunque quantità A, B, e ſecondo qualſiuoglia vnità D, ſia multiplicata A da qualche quantità C, ed il prodotto ſia E: e colla medeſima vnità D ſia multiplicata B, per l'iſteſſa quantità C, ed il prodotto ſia F. Dico che E ad F è come A à B. Perche la quantità E rappreſenta il prodotto fatto dalla multiplicatione di A per C, ſecondo l'vnità D, per la ſeconda delle antecedenti diſinitioni, ſarà il prodotto E alla quantità A, come C all'vnità D. E per l'iſteſſa ragione ſarà il prodotto F alla quantità B come C à D: per la qual coſa E ad A [a] *ſarà come F à B; e permutando il prodotto E al prodotto F* [b] *ſarà come A à B, ch'era da dimoſtrarſi. I prodotti E, F li chiamaremo vguali multiplici delle quantità A, & B:*

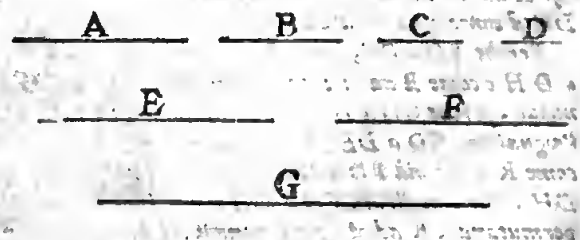
a 11. del 5.
b 16. del 5.

LEMMA III.

Se quattro quantità ſono proportionali, il prodotto fatto dalla prima, e quarta, è vguale al prodotto fatto dalla ſeconda, e terza.

Sia-

Siano le quattro quantità A, B, C, D, proportionali; cioè che A à B ſia come C à D. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione delle eſtreme A, & D, è vguale al prodotto fatto dalle medie B & C. Per il primo Lemma ſi multiplichino le eſtreme A, & D, ed il prodotto ſia F; ſimilmente ſi multiplichino le medie B, & C, ed il prodotto ſia E; e nell' iſteſſo modo ſi multiplichino le due A, & C, ed il prodotto ſia G; il tutto ſi faccia con vna medeſima vnità.



Perche D, multiplicata per A, produce F; e la quantità C, multiplicata per la medeſima A, produce G; le due G, ed F, per l'antecedente Lemma, ſaranno vguali multiplici delle due C, & D; dal che la proportione di G ad F [a] *ſarà come quella di C à D; mà C à D, per ipoteſi, è come A à B, ſarà G ad F* [b] *come A à B.*

In oltre perche B multiplicata per C, per coſtruttione, produce E; e la quantità A multiplicata per la medeſima C, produce G; le due G, E [c] *ſaranno vguali multiplici delle due A, & B; e perciò la proportione di G ad E* [d] *ſarà come quella di A à B; mà fù dimoſtrata A à B eſſer come G ad F; ſarà G ad E,* [e] *come la medeſima G ad F: per la qual coſa E, ed F* [f] *ſono frà di loro vguali: mà per coſtruttione la quantità E rappreſenta il prodotto fatto dalle eſtreme A, & D; e la quantità F rappreſenta il prodotto fatto dalle medie B, & C; ſarà dunque il prodotto delle eſtreme A, & D, vguale al prodotto delle medie B, & C, che era da dimoſtrarſi.*

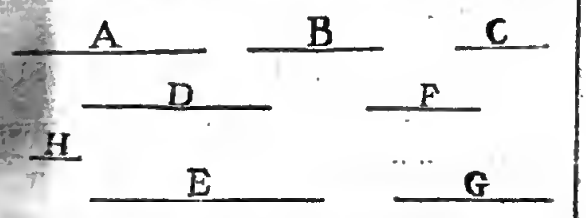
a Lem. antec.
b 11. del 5.
c Lem. 1.
d Lem. 2.
e 11. del 5.
f 9. del 5.

LEMMA IV.

Se ſaranno tre quantità, il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima nel prodotto della ſeconda, e terza, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza, nel prodotto della prima, e ſeconda.

Siano eſpoſte le tre quantità A, B, C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione della prima A nel prodotto delle due B, C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle due A, B.

Si prenda qualunque quantità H del medeſimo genere alle quantità A, B, C, e ſi intenda H come vnità, con la quale, per il primo Lemma, ſi multiplichino le due A, B, ed il prodotto ſia D.



Di

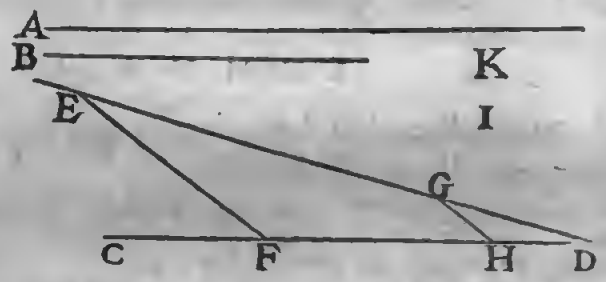
Di nuouo con la medesima vnità si multiplichino le due C, D, ed il prodotto sia E; e similmente con l'vnità H si multiplichino le due B, C, ed il prodotto sia F; e si multiplichino le due A, F, ed il prodotto sia G.

Perche dalla multiplicatione delle due A, & B, se ne produce D, sarà per la seconda delle antecedenti definitioni, il prodotto D alla quantità A, come B all'vnità H. Similmente perche dalla multiplicatione delle due B, C ne viene il prodotto F, sarà il prodotto F alla quantità C, come B all'vnità H; mà si disse B ad H essere come D ad A; sarà D ad A [a] *come F à C; e per l'antecedente Lemma, il prodotto delle estreme D, & C sarà vguale al prodotto delle medie A, & F. E perche il prodotto delle medie A, ed F, per costruttione, è la quantità G; ed il prodotto delle estreme D, & C è la quantità E; in conseguenza i prodotti E, & G sono frà di loro vguali. Per la qual cosa il prodotto fatto dalla prima A nel prodotto della seconda B, e terza C, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della terza C nel prodotto delle altre due A, & B, che era da dimostrarsi.*

[a] 11. del 5.

LEMMA V.

Date due qualunque quantità è possibile diuidere l'vna per l'altra.



Habbiasi da diuidere la quantità A per la quãtità B. S'inclinino le rette ED, CD à qualunque angolo E D C; se le quantità date sono linee rette, si faccia D E [a] *vguale alla retta A, da diuiderſi; e si faccia DF vguale al diuisore B; si tiri la retta FE: poi si prenda nella retta FD qualunque punto H, dal quale sia tirata la retta HG* [b] *parallela ad EF. Dico che, presa DH come vnità, sarà DG il quotiente di tal diuisione.*

[a] 3. del 1.
[b] 31. del 1.

Essendo GH parallela ad EF, sarà EG à GD [c] *come FH ad HD; e componendo, ED à DG,* [d] *sarà come FD à DH; ed inuertendo, DG à DE* [e] *sarà come DH à DF; e permutando, GD à D H* [f] *sarà come E D à D F, cioè come A à B: per la qual cosa la quantità A da diuiderſi al diuisore B, è come il quotiente GD all'vnità H D; e per la terza delle antecedenti definitioni, GD sarà il quotiente di tal diuisione, secondo l'vnità HD.*

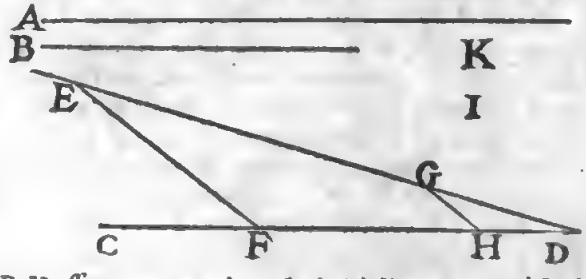
[c] 2. del 6.
[d] 18. del 5. e Coroll. alla 4. del 5.
[f] 16. del 5.

Se le proposte quantità A, B non sono linee rette; si prenda in CD qualunque parte DF, e si concepisca sicome la proportione di B ad A, così FD ad vn'altra, che sia ED: sarà, inuertendo, A à B [g] *come E D à D F. Si tiri la retta EF. Preso poi in FD qualunque punto H, dal quale sia tirata la retta H G* [h] *parallela ad E F, segarà E D in qualche punto G: se concepiremo H D come vnità, per qual che s'e dimostrato antecedentemente, G D sarà il quotiente della diuisione fatta di D E per F D. In oltre si concepisca sicome*

[g] Coroll. alla 4. del 5.
[h] 31. del 1.

ED à DG, così A ad vn'altra quantità del medesimo genere K, e sicome FD à DH, così B ad vn altra quantità del medesimo genere I.

Perche GH è parallela ad EF, sarà EG à GD [k] *come FH ad HD; e componẽdo ED à DG* [l] *sarà come FD à DH; mà ED à DG è come A à K, hauerà A à K* [m] *l'istessa proportione, che hà FD à DH: si disse FD à DH essere come B ad I, sarà A à K* [n] *come B ad I;* [o] *permutando, A à B sarà come K ad I. In oltre essendo A à B, per costruttione, come ED à DF, & A à B è come K ad I; sarà K ad I* [p] *come ED à DF; e la proportione di ED à DF e come GD à DH, sarà GD, à DH* [q] *come K ad I: ed inuertendo, HD à DG* [r] *sarà come I à K: mà HD è suppostà vnità rispetto à GD, sarà la quantità I vnità rispetto alla quantità K; e per quel, che s'è dimostrato, la quantità A, da diuidersi, alla quantità B, diuisore, sarà come K all'vnità I; e per la terza delle antecedenti definitioni, sarà K il quotiente, che nasce dalla diuisione di A per B, come fù proposto fare, e dimostrare.*



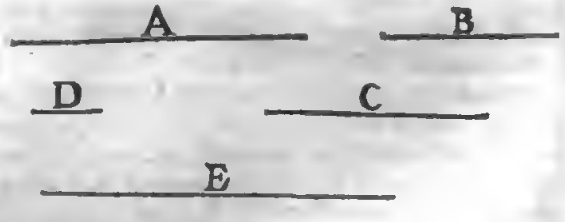
K 2. del 6.
l 18. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.
p 11. del 5.
q 11. del 5.
r Corol. alla 4 del 5.

LEMMA VI.

Multiplicandosi il quotiente per il diuisore, il prodotto è vguale alla quantità diuisa.

Sia diuisa la quantità A per la quantità B, ed il quotiente sia la quantità C. Dico che il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B, è vguale alla quantità diuisa A.

Sia D l'vnità, rispetto alla quale è fatta la diuisione di A per B; si faccia la multiplicatione di C per B, rispetto all'vnità D, ed il prodotto sia E; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà E à B come C all'vnità D. In oltre perche diuisa A per B, il quotiente, per ipotesi, è C; per la terza delle antecedenti definitioni, la quantità diuisa A al diuisore B è come il quotiente C all'vnità D: ma C à D, per quel che s'è dimostrato, è come E à B; sarà E à B [a] *come A alla medesima B; per la qual cosa A* [b] *è vguale ad E; ma E, per costruttione è il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente C nel diuisore B; sarà il prodotto fatto dal quotiente C nel diuisore B, vguale alla quantità diuisa A, che era da dimostrarsi.*



a 11. del 5.
b 9. del 5.

SCOLIO

SCOLIO.

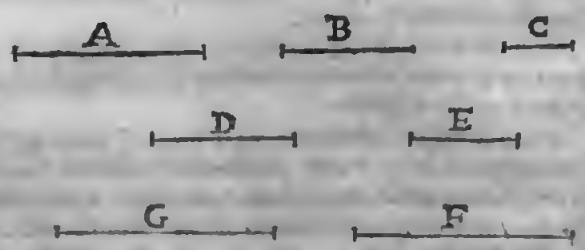
Quando si vuol vedere che proportione sia frà due quantità del medesimo genere, non s'intende far'altro, se non che conoscere di quanto l'antecedente è maggiore, ò minore del conseguente; ò pure conoscere se l'antecedente è vguale al conseguente; il che si fà col detrarre il conseguente dall'antecedente tante volte, che si può, e se vi resta auanzo, vedere che rispetto hà al conseguente. Come per essempio, habbiasi da trouare che proportione sia frà l'antecedente A, ed il conseguente B; se A è maggiore di B, dalla quantità A se ne detraggano le parti AC, CD, DE, EF, e quante altre se ne può, vguali al conseguente B; se non resta cosa alcuna, diremo, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante sono le parti in AF; e se soprauanza qualche cosa minore di B, come FG, all'hora si dirà, che l'antecedente A contiene tante volte il conseguente B, per quante parti sono in AF, e che soprauanza la quantità FG, ch'è tante parti esprimibili, ò non esprimibili di B. E perche questa continua detrattione è l'istessa cosa, che diuidere la quantità A per la quantità B, stante che la diuisione è vna abbreuiatura di questa continua detrattione, perciò diuidendo l'antecedente A per il conseguente B, il quotiente indicarà il valore della proportione, che hà l'antecedente A al conseguente B. E per l'auuenire, quando si vorrà trouare il valore della proportione, che hà vn antecedente ad vn conseguente, si diuiderà l'antecedente per il conseguente, ed il quotiente si chiamerà denominatore della proportione.

LEMMA VII.

Se saranno quante si voglia quantità del medesimo genere, la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

Siano esposte le quantità A, B, C. Dico che la proportione della prima A alla terza C è composta dalle proportioni di A à B, e di B à C. Per il quarto lemma si diuida la quantità A per la quantità B, [a] *ed il quotiente sia D; sarà D, per l'antecedente Scolio, la valuta della proportione, che hà la quantità A à B. Similmente si diuida B* [b] *per la quantità C, ed il quotiente sia E; sarà E la valuta della proportione, che hà B à C. Poi, per il primo lemma, si multiplichi D per la quantità E, ed il prodotto sia F; sarà F, per la decima definitione del 5. libro, la*

a Lemm. 5.

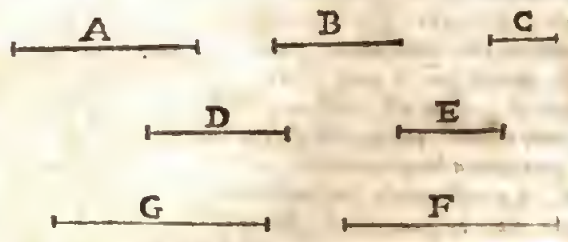


b Lemm. 5.

proportione compoſta dalle due proportioni di A à B, e di B à C. Oltre à ciò ſi diuida A [c] *per C, ed il quotiente ſia G; ſarà G* [d] *il valore della proportione, che hà la quantità A alla quantità C.*

c Lem. 5. d Scol. antec.

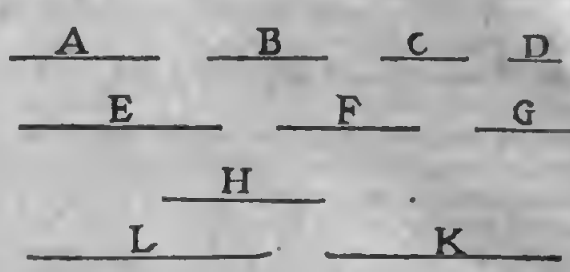
Perche diuiſa la quantità A per B il quotiente è D, multiplicando il quotiente D per il diuiſore B, il prodotto, per il lemma 6. ſarà vguale alla quantità A. Similmente eſſendoſi diuiſa la quantità B per C, n'è venuto il quotiente E; multiplicando il quotiente E per il diuiſore C, il prodotto ſarà vguale alla quantità B: tanto il prodotto di E in C, quanto la quantità B, che gli è vguale, ſi multiplichi per la medeſima quantità D; ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto di D in B: ma il prodotto di D in B è vguale ad A, ſarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di D nel prodotto di E in C, vguale ad A. Fù dimoſtrato nel quarto lemma, che il prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità D nel prodotto di E in C, vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D; ſarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione della quantità C nel prodotto di E in D, vguale ad A; ma il prodotto di E in D, per coſtruttione, è la quantità F; ſarà il prodotto, fatto dalla multiplicatione di F in C, vguale ad A. Finalmente perche, diuiſa la quantità A per C, il quotiente per coſtruttione è G, ſarà per il Lem. 6. il prodotto, fatto dal quotiente G nel diuiſore C, vguale ad A: ſi diſſe che il prodotto, fatto da F in C, è vguale alla medeſima quantità A; ſarà il prodotto fatto da F in C vguale al prodotto fatto da G in C; dal che G è vguale ad F: Ma G, per quel che s'è detto, è il valore della proportione di A à C, ſarà F il valore della proportione di A à C: ma F è la proportione compoſta dalle proportioni D, ed E, ſarà la proportione di A à C compoſta delle proportioni D, ed E. E perche la quantità D rappreſenta la proportione di A à B; e la quantità E rappreſenta la proportione di B à C, ſarà dunque la proportione della prima A alla terza C, compoſta dalle proportioni intermedie, cioè della proportione di A à B, e dalla proportione di B à C, eh'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Se ſaranno più di trè quantità, come A, B, C, D. Dico ſimilmente che la proportione della prima A all'vltima D, è compoſta dalle proportioni di A à B, di B à C, & di C à D.

Per il lemma 5. ſi diuida A per B, ed il quotiente ſia E, ſarà E il valore della proportione di A à B. Similmente ſi diuida B per C, ed il quotiente ſia F; ſarà F la valuta della proportione di B à C: e ſi diuida C per D, il quotiente ſia G, ſarà G la valuta della proportione di C à D. In oltre ſi multiplichi, per il primo lemma, la quantità E nella quantità F, ed il prodotto ſia H; poi ſi multiplichi H per G, ed il prodotto ſia K, per la 10. defin. del 5. libro, la quantità K rappreſentarà la proportione compoſta dalle tre proportioni E, F, G.

Si diuida finalmente A per D, ed il quotiente sia L, sarà L il valore della proportione di A à D, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione di L in D, per il lemm. 6, sarà vguale ad A.



Perche E rappresenta la proportione di A à B, ed F rappresenta la proportione di B à C; essendo H il prodotto fatto dalla multiplicatione di E in F, sarà H, per la decima definitione del 5. la proportione composta dalle due E, ed F; cioè H rappresentarà la proportione composta dalle proportioni di A à B, e di B à C: ma, per quel che s'è dimostrato nella prima parte, la proportione di A à C è composta delle medesime due proportioni di A à B, e di B à C; in conseguenza la quantità H sarà vguale alla proportione di A à C. Per la qual cosa, diuisa A per C, il quotiente sarà H, ed il prodotto fatto dalla multiplicatione del quotiente H nel diuisore C, per il lemma 6. sarà vguale alla quantità A. In oltre perche diuisa la quantità C per la quantità D, il quotiente è G; il prodotto fatto dalla multiplicatione di G in D [a] è vguale alla quantità C; tanto il prodotto di G in D, quanto la quantità C, si multiplichi per H, il prodotto fatto da H, nel prodotto di G in D, sarà vguale al prodotto di H in C: Mà il prodotto di H in C è vguale ad A; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, vguale ad A. E perche il prodotto fatto dalla multiplicatione di H nel prodotto di G in D, per in Lemma 4, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione di D, nel prodotto di G in H, vguale ad A: mà il prodotto di G in H, per costruttione è vguale à K, sarà il prodotto di D in K vguale ad A. Si disse che il prodotto di L in D è vguale ad A; sarà il prodotto di K in D vguale al prodotto di L nella medesima D; e perciò le quantità L, & K sono frà di loro vguali. E perche la quantità L si disse essere il valore della proportione di A à D, sarà K il valore della proportione di A à D: mà K è la proportione composta delle tre proportioni E, F, G; sarà la proportione di A à D composta delle tre proportioni E, F, G; si disse nel principio, che la notata E rappresenta il valore della proportione di A à B; e la notata F rappresenta il valore della proportione di B à C; come anco G rappresenta il valore della proportione di C à D; sarà la proportione di A à D composta dalle proportioni intermedie di A à B, di B à C, e di C à D, che era da dimostrarsi.

[a] Lem. 6.

Nell'istesso modo se saranno più di quattro quantità si dimostrerà, che la proportione della prima all'vltima è composta dalle proportioni intermedie.

LEMMA VIII.

Se saranno quante si voglia quantità continue proportionali, la proportione della prima all'vltima è multiplice

del-

della proportione della prima alla seconda, per quanto è la moltitudine delle proportioni intermedie.

Vltimo essempio.

Siano quante si voglia quantità A, B, C, D, E, F, continue proportionali; cioè che A à B sia come B à C; che B à C sia come C à D; che C à D sia come D ad E; e che D ad E sia come E ad F. Dico che la proportione della prima A all'vltima F è multiplice della proportione della prima A alla seconda B, per quanta è la moltitudine delle proportioni intermedie; cioè che la prima A alla terza C hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B; che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B; che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di A à B; che la prima A alla sesta F hà quintuplicata proportione, che A à B; e con quest'ordine per tutte le altre.

Si considerino prima le sole tre quantità A, B, C continue proportionali. Essendo la proportione di A à B come quella di B à C, sarà la proportione di A à B vguale alla proportione di B à C; dal che le due proportioni di A à B, e di B à C, composte insieme, producono il duplicato della proportione di A à B; mà la proportione di A à C, per l'antecedente Lemma, è composta delle medesime due proportioni di A à B, & di B à C; sarà la proportione di A à C duplicata della proportione di A à B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A, B, C,

Di nuouo si considerino la quattro quantità A, B, C, D continue proportionali. Dico che la prima A alla quarta D hà triplicata proportione di quella, che hà A à B. Perche le quantità A, B, C, D si suppongono continue proportionali, sarà A à B come B à C, e sarà B à C come C à D; e perciò le tre proportioni di A à B di B à C, e di C à D, sono frà di loro vguali; le quali, composte insieme, producono il triplicato di vna; cioè il triplicato della proportione di A à B: ma la proportione di A à D, per l'antecedente lemma, è composta delle medesime tre proportioni di A à B, di B à C, e di C à D; sarà la proportione di A à D triplicata di quella, che hà la prima A alla seconda B, che era da dimostrarsi nel secondo luogo.

A, B, C, D

Similmente si considerino le cinque quantità A, B, C, D, E continue proportionali. Dico che la prima A alla quinta E hà quadruplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B.

Perche le proposte quantità sono continue proportionali, le quattro proportioni, cioè di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E, sono frà di loro vguali; le quali, composte insieme, sono il quadruplicato d'vna, cioè il quadruplicato della proportione di A à B: ma, per l'antecedente lemma, la proportione di A ad E è composta delle medesime quattro proportioni di A à B, di B à C, di C à D, e di D ad E; sarà la proportione di A ad E quadruplicata di quella, che hà la prima A alla seconda B.

Finalmente si considerino le sei quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali. Dico che la prima A alla sesta F hà quintuplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda B. Essendo, per ipotesi, le quantità A, B, C, D, E, F continue proportionali, le cinque proportioni intermedie, cioè di A à B, di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F, sono frà di loro vguali;

A, B, C, D, E,

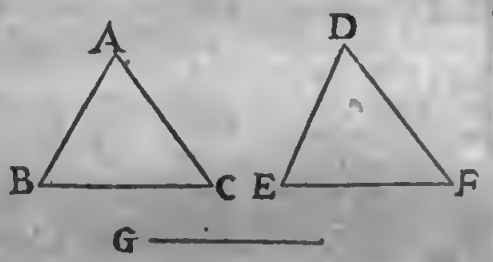
le

le quali, compoſte inſieme, producono il quintuplicato d'vna; cioè il quintuplicato di A à B; ma la proportione di A ad F, per il lemma antecedente, è compoſta dalle medeſime cinque proportioni; cioè di A à B di B à C, di C à D, di D ad E, e di E ad F; ſarà la proportione di A ad F quintuplicata della proportione, che hà la prima A alla ſeconda B. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà ſe le quantità continue proportionali ſaranno più di ſei, che la prima alla ſettima hà ſeſtuplicata proportione, che la prima alla ſeconda; che la prima all'ottaua hà ſettuplicata proportione di quella, che hà alla ſeconda, e così per le altre, il che era da dimoſtrarſi.

A, B, C, D, E, F,

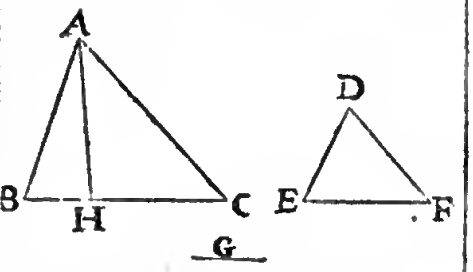
THEOREMA XIII. PROPOSITIONE IX.

I ſimili triangoli hanno ſcambieuolmente duplicata proportione, che i loro lati homologhi.



Siano i triangoli ſimili ABC, DEF, de'quali l'angolo B ſia vguale all'angolo E; l'angolo C all'angolo F; e l'angolo A vguale all'angolo D. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF; ouero che il lato AB all'homologo DE, ouero AC à DF. Suppoſto prima, che i lati BC, EF ſiano frà di loro vguali. Perche i triangoli ſono ſimili, e gli angoli B, ed E ſono ſuppoſti vguali; ſarà CB à BA [a] come FE ad ED: ma la prima BC è poſta vguale alla terza EF; ſarà la ſeconda BA [b] vguale alla quarta DE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che AC è vguale ad FD; dalche i triangoli ABC, DEF [c] ſono frà di loro vguali; fù ſuppoſto il lato BC vguale al lato EF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF, [d] come il lato BC al lato EF. Si faccia come BC ad EF, così EF [e] ad vn'altra, che ſia G; ſarà G terza proportionale; e perche BC ad EF è come EF à G; eſsendo BC vguale ad EF, [f] ſarà EF vguale à G; e preſa BC come terza quantità, hauerà BC ad EF [g] l'iſteſſa proportione, che hà la medeſima BC à G: mà BC ad EF, per quel che s'è dimoſtrato, e come il triangolo ABC al triangolo DEF; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF [h] come BC à G: e perche la prima BC alla terza proportionale G, per il Lemma antecedente, hà duplicata proportione, che la prima BC alla ſeconda EF; hauerà il triangolo ABC al triangolo DEF duplicata proportione, che il lato BC all'homologo lato EF, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 4. del 6.
b 14. del 5.
c 4. del 1.
d Corollar. alla 7. del 5
e 12. del 6.
f 14. del 5.
g 7. del 5.
h 11. del 5.



Di nuouo non ſia il lato BC vguale al lato E F, ma ſia B C maggiore; preſa B C come prima, & EF come ſeconda, [k] e ſi troui la terza proportionale G; ſarà B C ad E F come E F à G: ma B C è maggiore di E F ſarà EF [l] maggiore di G, ed il lato BC ſarà molto maggiore di G. Si tagli BH [m] vguale à G; ſarà BC ad EF, come EF à BH: ſi tiri la retta AH. Perche i triangoli ABC, DEF ſono frà di loro ſimili, ſarà AB à BC [n] come DE ad EF; e permutando, AB à DE [o] ſarà come BC ad EF; ma BC ad EF è come la medeſima EF à BH; ſarà AB à DE [p] come EF à BH. Si conſiderino i due triangoli ABH, DEF, de'quali l'angolo ABH, per ipoteſi, è vguale all'angolo DEF; ed i lati intorno à queſti angoli vguali ſono reciprochi; ſtante che s'è dimoſtrato, che AB a DE è come EF à BH; perciò i triangoli ABH, DEF [q] ſono frà di loro vguali; preſo il triangolo ABC, come terza quantità, ſarà il triangolo ABC al triangolo ABH, [r] come il medeſimo triangolo ABC al triangolo DEF. In oltre ſi conſiderino i triangoli ABC, ABH, i quali hanno vna medeſima altezza, e ſarà il triangolo ABC al triangolo A B H, [s] come la baſe B C alla baſe BH; ma il triangolo ABC al triangolo ABH, per quel che s'è dimoſtrato, e come il medeſimo triangolo ABC al triangolo D E F; ſarà il triangolo ABC al triangolo DEF [u] come BC à BH; cioè come BC alla retta G: ma la prima BC alla terza G, per l'antecedente Lemma, hà duplicata proportione, che la prima BC alla ſeconda EF; il triangolo ABC al triangolo DEF (ch'è come la prima BC alla terza G) haurà duplicata proportione, che il lato BC all'homologho lato EF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo ABC al triangolo DEF hà duplicata proportione, che il lato AB al homologo lato DE; e che hà duplicata proportione, che il lato AC all'homologo lato DF, ch'era da dimoſtrarſi.

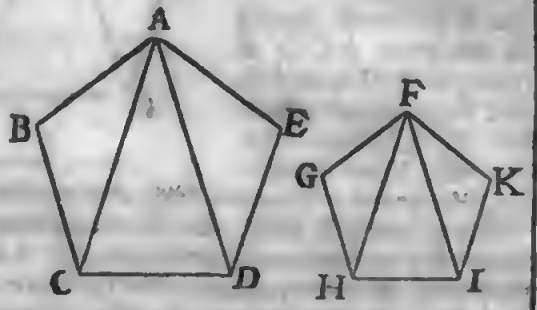
[k] 11. del 6.
[l] 14. del 6.
[m] 3. del 1.
[n] 1. defin. del 6.
[o] 16. del 5.
[p] 11. del 5.
[q] 15. del 6.
[r] 7. del 5.
[s] 1. del 6.
[u] 12. del 5.

SCOLIO.

Da quel che s'è detto nell'antecedente Lemma, e dalla decima Definitione del quinto Libro, è manifeſto, che quando ſi dice il triangolo ABC al triangolo DEF, hauere duplicata proportione di quella, che hà il lato BC al lato EF, vuol dire, che la proportione del triangolo ABC al triangolo DEF è compoſta dal prodotto fatto dalla multiplicatione della proportione di BC ad EF nella medeſima proportione di BC ad EF; cioè multiplicandoſi la proportione di BC ad EF, per la medeſima proportione di BC ad EF, il prodotto ſarà il valore della proportione del triangolo ABC al triangolo DEF.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XX.

I simili poligoni si diuidono in triangoli simili, di moltitudine vguali, ed homologhi ad essi poligoni: ed il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo.

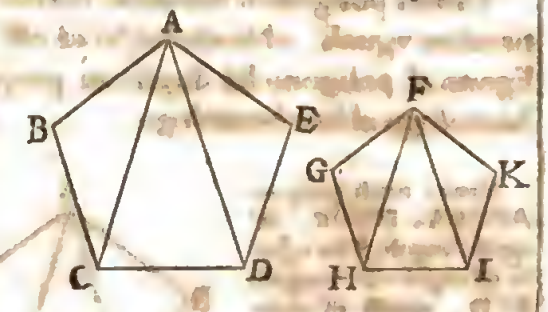


Siano i simili poligoni ABCDE, FGHIK, de' quali l'angolo B sia vguale all'angolo G, l'angolo BCD, vguale all'angolo GHI, l'angolo CDE vguale all'angolo HIK, l'angolo E vguale all'angolo K, e l'angolo F all'angolo A. Dico prima, che questi poligoni si diuidono in triangoli simili, e di moltitudine vguale. Da gli angoli A, & F à gli angoli opposti, si tirino le rette AC, AD, FH, FI. Perche i proposti poligoni sono simili, tanti lati sono in vno, quanti ne sono nell'altro; e perciò tante rette si tirano dall'angolo A à gli angoli opposti, per quante se ne tirano dall'angolo F à gli angoli opposti; dalche in tanta moltitudine di triangoli si diuide l'vno, per quanta moltitudine di triangoli si diuide l'altro. Si considerino i triangoli ABC, FGH, de' quali l'angolo B è supposto vguale all'angolo G: La proportione di AB à BC, per la similitudine de i poligoni, è come FG à GH; e perciò [a] i triangoli sono equiangoli, e sarà l'angolo BCA vguale all'angolo GHF, e l'angolo BAC vguale all'angolo GFH; i lati intorno à gli angoli vguali [b] sono proportionali, e però il triangolo BCA sarà simile [c] al triangolo FGH. Similmente perche l'angolo E è vguale all'angolo K, e la proportione di AE ad ED, per la similitudine de' poligoni, è come quella di FK à KI; i triangoli AED, FKI [d] sono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [e] proportionali, e perciò [f] sono frà di loro simili; e sarà l'angolo EDA vguale all'angolo KIF; se da gli vguali angoli EDC, KIH, se ne leuano gli vguali angoli EDA, KIF, resta l'angolo ADC vguale all'angolo FIH. Similmente da gli vguali angoli BCD, GHI se ne leuino gli vguali angoli BCA, GHF, resta l'angolo ACD vguale all'angolo FHI; ne i triangoli ACD, FHI, i due angoli ACD, ADC sono vguali à i due angoli FHI, FIH; sarà il rimanente angolo CAD [g] vguale al rimanente angolo HFI, i triangoli ACD, FHI sono equiangoli, hanno [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali; e perciò sono [k] simili. Il medesimo si prouarà se in essi poligoni vi fossero più triangoli.

Oltre à ciò dico, che questi triangoli sono homologhi à i poligoni intieri; cioè che tal proportione hà ciascun triangolo in vno de' poligoni à

a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 6. del 6.
e 4. del 6.
f 1. defin. del 6.
g 32. del 1.
h 4 del 6.
k 1. defin. del 6.

ciaſcuno de i corriſpondenti triangoli nell'altro poligono, quale hà tutto vn poligono à tutto l'altro poligono. Perche i triangoli ABC, FGH ſono frà di loro ſimili, il triangolo ABC al triangolo FGH, per l'antecedente propoſitione, hà duplicata proportione, che il lato homologo AC al lato homologo FH. Similmente eſſendo i triangoli ACD, FHI frà di loro ſimili, hauerà il triangolo ACD al triangolo FHI la medeſima duplicata proportione, che hà il lato homologo AC al lato homologo FH; e perciò il triangolo ABC al triangolo FGH [l] è come il triangolo ACD al triangolo FHI. Per l'iſteſſa ragione il triangolo ACD al triangolo FHI hà duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; ma il triangolo AED al ſimile triangolo FKI hà la medeſima duplicata proportione, che il lato homologo AD al lato homologo FI; farà il triangolo ACD al triangolo FHI, [m] come il triangolo ADE al triangolo FIK; dal che l'antecedente ABC al conſeguente FGH, è come l'antecedente ACD al conſeguente FHI; e l'antecedente ACD al conſeguente FHI è come l'antecedente ADE al conſeguente FIK, ſaranno tutti gli antecedenti, cioè il poligono ABCDE, [n] à tutti i conſeguenti, cioè al poligono FGHIK, come vno antecedente ad vn conſeguente; cioè come il triangolo ABC al triangolo FGH; ouero come il triangolo ACD al triangolo FHI; ò pure come il triangolo ADE al triangolo FIK.



l 21. del 5.

m 21. del 5.

n 12. del 5.

Finalmente dico che il poligono al poligono hà duplicata proportione, che il lato homologo al lato homologo. Perche il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il triangolo ABC al triangolo FGH; ed il triangolo ABC al ſimile triangolo FGH hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG; per l'egualità hauerà il poligono ABCDE al poligono FGHIK [o] duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo FG, ch'era da dimoſtrarſi.

o 22. del 5.

COROLLARIO.

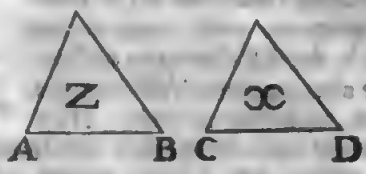
Dall'antecedente propoſitione è manifeſto, che i poligoni ſimili ſono come i quadrati de i loro lati homologhi, ſtante che tutti i quadrati ſono ſimili frà di loro; e coſi i quadrati de' lati CD, HI hanno duplicata proportione, che i loro lati homologhi CD, HI: mà i poligoni ſimili ABCDE, FGHIK hanno la medeſima duplicata pro-

portio-

portione de i loro lati homologhi CD, HI, sarà il poligono ABCDE al poligono FGHIK, come il quadrato di CD al quadrato di HI.

SCOLIO.

Si può qui facilmente prouare, che gli vguali poligoni simili hanno i lati homologhi vguali; e de i poligoni simili ineguali, il lato homologo del maggiore è maggiore del lato homologo del minore.



Siano prima i poligoni simili Z ed X frà di loro vguali, e sia l'angolo A vguale all'angolo C, e l'angolo B vguale all'angolo D; saranno i poligoni Z, ed X similmente posti à i lati AB, CD; dal che AB, CD sono i lati homologhi; e sarà il poligono Z al simile poligono X, per l'antecedente Corollario, come il quadrato del lato homologo AB al quadrato del lato homologo X; mà i poligoni Z, ed X sono supposti frà di loro vguali; saranno [a] *i quadrati de' lati AB, CD frà di loro vguali, e perciò il lato AB* [b] *sarà vguale al lato CD.*

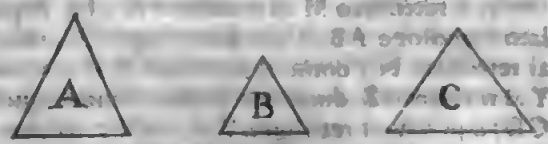
Di nuouo se il poligono Z sarà maggiore del poligono X, sarà il quadrato di AB [c] *maggiore del quadrato di CD, e perciò il lato AB* [d] *sarà maggiore del lato CD, ch'era da dimostrarsi.*

[a] 14. del 5.
[b] Scol. alla 46. del 2.
[c] 14. del 5.
[d] Scol. alla 46. del 1.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XXI.

I retti linei che sono simili ad vn medesimo rettilineo, sono ancora simili frà di loro.

Sia il rettilineo A simile al rettilineo B, ed il rettilineo C simile al medesimo rettilineo B. Dico che i rettilinei A, & C sono frà di loro simili



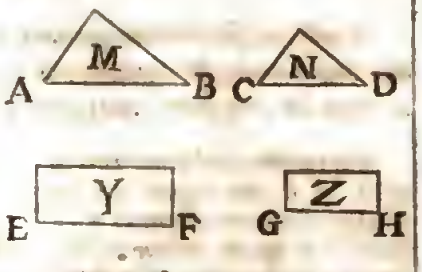
Perche i rettilinei A, & B sono frà di loro simili, perciò sono equiangoli. Similmente essendo i rettilinei B, & C simili, saranno equiāgoli; ma il rettilineo A è equiangolo al rettilineo B; i rettilinei dunque A, & C sono equiangoli, per la qual cosa hanno [a] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la prima definitione di questo, sono frà di loro simili, ch'era da dimostrarsi.

[a] 4. del 6.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XXII.

Se quattro linee rette sono proportionali, i rettilinei simili,

e ſimilmente deſcritti ſopra di eſſe, ſono proportionali: e ſe quattro rettilinei ſimili ſono proportionali, le linee rette, ſopra le quali ſono ſimilmente deſcritti, ſaranno proportionali.



Siano prima le quattro rette linee AB, CD, EF, GH, proportioli: cioè che AB à CD ſia come EF à GH; e ſopra le due AB, CD, ſiano deſcritti i rettilinei M, N ſimili, e ſimilmente poſti; come ancora ſopra le due EF, GH ſiano deſcritti due altri rettilinei Y, Z ſimili frà di loro, e ſimilmente poſti. Dico che il rettilineo M al ſimile rettilineo N hà l'iſteſſa proportione, quale hà il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z.

Perche i rettilinei ſimili M, N ſono ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD; ſaranno le rette AB, CD lati homologhi di eſſi rettilinei: e per l'iſteſſa ragione le rette EF, GH ſono lati homologhi de'i ſimili rettilinei Y, Z. Hor eſſendo i rettilinei M, N frà di loro ſimili, il rettilineo M al ſimile rettilineo N [a] hà dupplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo CD; ma, per ipoteſi, AB à CD è come EF à GH; hauerà il rettilineo M al rettilineo N [b] duplicata proportione di quella, che hà EF à GH; ma il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z hà la medeſima duplicata proportione, che hà EF à GH; hauerà il rettilineo M al ſimile rettilineo N, [c] l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al rettilineo Z, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 20. del 6.
b 13. del 5.
c 11. del 5.

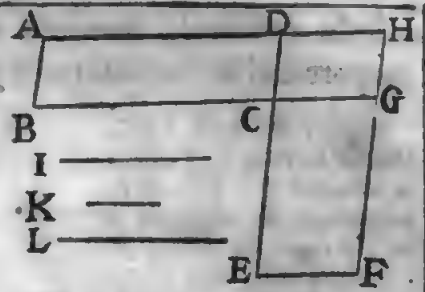
Di nuouo ſiano i rettilinei M, N frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti ſopra le rette AB, CD, ed i rettilinei Y, Z ſiano frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti alle rette EF, GH; ed habbia il rettilineo M al rettilineo N l'iſteſſa proportione, che hà il rettilineo Y al rettilineo Z. Dico che AB à CD ſarà come EF à GH. Perche i rettilinei M, ed N ſono frà di loro ſimili, il rettilineo M al rettilineo N [d] hà duplicata proportione, che il lato homologo AB al lato homologo CD; ma per ipoteſi, il rettilineo M al rettilineo N è come il rettilineo Y al rettilineo Z; hauerà il rettilineo Y al rettilineo Z duplicata proportione di quella, che hà AB alla retta CD; e perche il rettilineo Y al ſimile rettilineo Z, hà duplicata proportione, che il lato homologo EF al lato homologo GH; ſarà AB à CD come EF à GH, ch'era da dimoſtrarſi.

d 20. del 6.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XXIII.

Se due parallelogrammi ſono equiangoli, haueranno la proportione compoſta delle proportioni de i lati, che ſono intorno à gli angoli vguali.

Siano



Siano i parallelogrammi equiangoli ABCD, CEFG; e sia l'angolo B C D vguale all'angolo E C G. Dico che la proportione del parallelogrammo AC al parallelogrammo CF, è composta di due proportioni; cioè della proportione del lato B C al lato CG; e della proportione del lato D C al lato C E. Si adattino i proposti parallelogrammi AC, CF, in modo che si tocchino secondo gli angoli vguali C; e che i lati BC, CG costituiscano la sola retta linea BCG; e per il Corollario alla 14. propos. di questo, i lati EC, CD, costituiranno vna sola retta linea: si prolunghino i lati A D, FG fino che concorrono in qualche punto H. Poi si prenda qualunque retta linea I, e si faccia si come BC à CG, così I [a] ad vn altra, che sia K: e similmente si faccia si come D C à C E, così K [b] ad vn altra, che sia L. Perche i parallelogrammi A C, DG hanno vna medesima altezza, sarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG, [c] come la base BC alla base CG: ma per costruttione, BC à CG è come I à K; sarà il parallelogrammo A C al parallelogrammo DG [d] come I à K. Similmente, essendo i parallelogrammi DG, CF sotto d'vna medesima altezza, il parallelogrammo D G al parallelogrammo CF [e] sarà come la base DC alla base CE; ma per costruttione, DC à CE è come K ad L; sarà il parallelogrammo DG al parallelogrammo CF, [f] come K ad L. Si considerino sei quantità, tre da vna parte, cioè i parallelogrammi AC, DG, CF; e tre da vna altra parte, cioè le rette I, K, L. Perche la prima AC alla seconda DG, è come la prima I alla seconda K; e la seconda DG alla terza CF è come la seconda K alla terza L; sarà, per l'egualità, la prima AC alla terza CF, [g] come la prima I alla terza L: ma la prima I alla terza L, per il lemma 7. doppo la 18. propos. di questo, hà la proportione composta delle proportioni di I à K, e di K ad L; haverà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione composta delle proportioni di I à K, e di K ad L: ma la proportione di I à K, è come quella di BC a CG; e la proportione di K ad L è come quella di DC à CE; haverà il parallelogrammo A C al parallelogrammo CF la proportione composta delle proportioni di B C à CG, e di DC à CE, come si propose dimostrare.

[a] 12. del 6.
[b] 12. del 6.
[c] 1. del 6.
[d] 11. del 5.
[e] 1. del 6.
[f] 11. del 5.
[g] 22 del

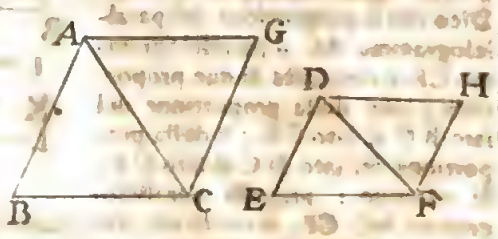
SCOLIO.

Il medesimo si verifica in due triangoli, de'quali vn angolo dell'vno sia vguale ad vn angolo dell'altro, come nel seguente Theorema.

I triangoli, de'quali vn angolo dell'vno è vguale ad vn

angolo

angolo dell'altro, hanno la proportione composta delle proportioni de'lati intorno à gli angoli vguali.



Siano i triangoli A B C, D E F, e sia l'angolo B vguale all'angolo E. Dico che la proportione del triangolo A B C, al triangolo D E F è composta delle proportioni, cioè di A B à D E, e di B C ad E F. Dal punto C si tiri la

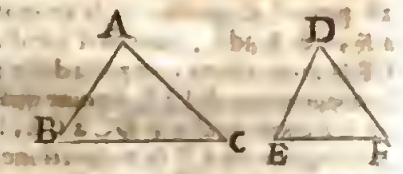
a 31. del 1. *retta C G,* [a] *parallela ad A B; e dal punto A si tiri la retta A G parallela al lato B C, le quali concorreranno in qualche punto G: e sarà fatto il parallelo-*

b 34. del 1. *grammo B G, il quale* [b] *sarà il doppio del triangolo A B C; nell'istesso modo si compisca il parallelogrammo E H, che sarà il doppio del triangolo D E F; dal*

c 15. del 5. *che tutto il parallelogrammo B G à tutto il parallelogrammo E H,* [c] *sarà come la metà A B C alla metà D E F; mà per l'antecedente propositione la proportione del parallelogrammo B G al parallelogrammo equiangolo E H, è composta delle proportioni di A B à D E, e di B C ad E F; sarà la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F composta delle proportioni di A B ad E D, e di B C ad E F, ch'era da dimostrarsi.*

Qui aggiunge il Commandino il seguente Theorema, che noi più breuemente dimostraremo col P. Clauio.

I triangoli, che hanno vn angolo vguale ad vn angolo, sono come i rettangoli contenuti da i lati intorno à gli angoli vguali.



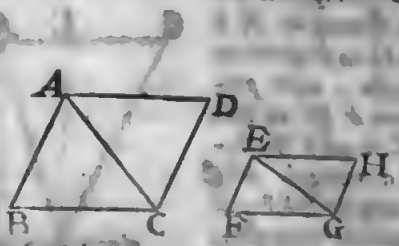
Siano i triangoli A B C, D E F, de' quali l'angolo B sia vguale all'angolo E. Dico che il triangolo A B C al triangolo D E F è come il rettangolo contenuto da i due lati A B, B C, al rettangolo contenuto da i lati D E, E F. Perche gli angoli in B, ed E sono frà di loro vguali, per l'antecedente Scolio, la proportione del triangolo A B C al triangolo D E F, è composta delle proportioni di A B à D E, e di B C ad E F; mà il rettangolo, contenuto dalle rette A B, B C, al rettangolo contenuto dalle rette D E, E F, per l'antecedente propositione, hà la proportione composta dalle medesime due proportioni, cioè di A B à D E, e di B C ad E F; hauerà dunque il triangolo A B C al triangolo D E F l'istessa proportione, quale hà il rettangolo contenuto dai lati A B, B C, al rettangolo contenuto da i lati D E, E F, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quel che s'è detto è manifesto, che i parallogrammi

equian-

equiangoli hanno l'istessa proportione frà di loro, quale hanno i rettangoli contenuto da i lati intorno à gli angoli vguali.



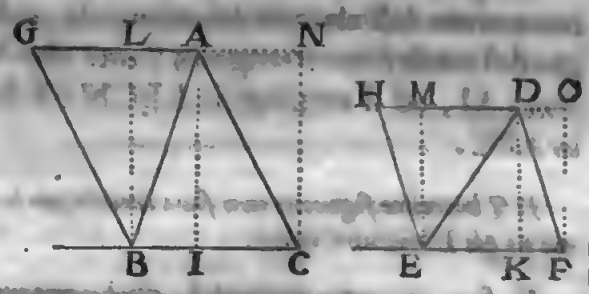
Come ne i parallelogrammi BD, FH equiangoli, sia l'angolo B vguale all'angolo F, tirate le diagonali AC, EG, sarà il parallelogrãmo BD [a] *il doppio del triangolo ABC; ed il parallelogrammo FH sarà il doppio del triangolo EFG; e perciò il parallelogrammo BD al parallelogrammo FH* [b] *sarà come il triangolo ABC al triangolo EFG: mà, per quel che s'è dimostrato anteceaentemente, il triangolo ABC al triangolo EFG, è come il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati EF, FG; sarà il parallelogrammo BD al parallelogrammo FH, come il rettangolo contenuto da i lati AB, BC, al rettangolo contenuto da i lati EF, FG, come si disse.*

[a] 41. del 1.

[b] 15. del 5.

Vn altro Teorema del Commandino, che qui dimostriamo con maggior brevità.

I triangoli, e parallelogrammi, hanno frà di loro la proportione composta delle proportioni delle loro basi, ed altezze.



Siano i triangoli ABC, DEF, ed i parallelogrammi GBCA, HEFD; da gli angoli A, & D si facciano cadere le rette AI, DK, perpendicolari alle basi BC, EF. Dico che il triangolo ABC al triangolo DEF, ouero il parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD, hà la proportione composta dalle proportioni della base BC alla base EF; e dell'altezza AI all'altezza DK. Da i punti B, C, E, F si facciano cadere le rette BL, CN, EM, FO, perpendicolari alle rette GA, HD, le quali sono parallele alle basi BC, EF; i quadrilateri LBCN, MEFO saranno parallelogrammi rettangoli; e perche gli angoli AIC, NCI sono retti, sarà AI parallela ad NC, & il quadrilatero AICN sarà parallelogrammo rettangolo, e perciò AI [a] *sarà vguale ad NC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DK è vguale ad OF. Inoltre perche il rettangolo LBCN, ed il triangolo ABC, hanno vna medesima base, e sono frà le medesime parallele, sarà il rettangolo LBCN* [b] *il doppio del triangolo ABC. Nell'istesso modo si proue-*

[a] 34. del 1.

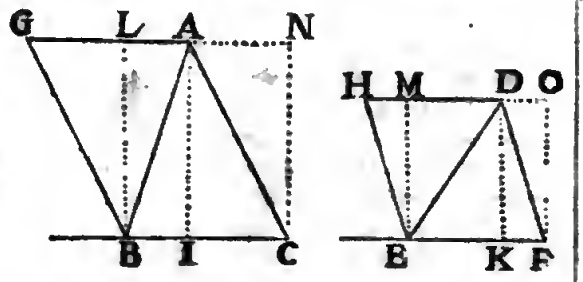
[b] 41. del 1.

rà

rà, che il rettangolo MEFO è il doppio del triangolo DEF, e farà il rettangolo LBCN al rettangolo MEFO, c come il triangolo ABC al triangolo DEF; mà il rettangolo LBCN al rettangolo MEFO, hà la proportione composta d delle proportioni di BC ad EF, e di CN ad FO; haverà il triangolo ABC al triangolo DEF, la proportione composta delle proportioni di BC ad EF, e di CN ad FO; mà CN è vguale ad AI, ed OF è vguale à DK; la proportione dunque del triangolo ABC al triangolo DEF sarà composta delle proportioni della base BC alla base EF, e dell'altezza AI all'altezza DK. E perche la proportione del triangolo ABC al triãgolo DEF è come quella del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD (stante che i parallelogrammi sono il doppio de i detti triangoli); la proportione dunque del parallelogrammo GBCA al parallelogrammo HEFD, sarà composta delle proportioni della base BC alla base EF, e dell'altezza AI all'altezza DK, ch'era da dimostrarsi.

c 25. del 5.

d 23. del 6.



COROLLARIO

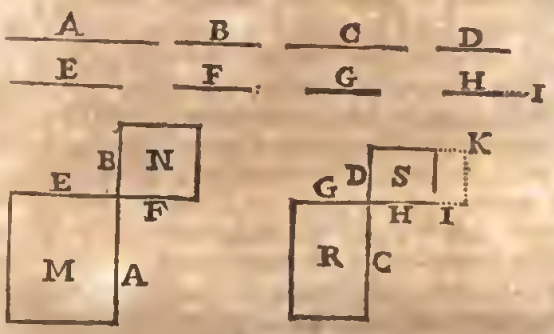
Da quel che s'è detto è manifesto, che il rettangolo contenuto dall'altezza del triangolo, e dalla base è il doppio del medesimo triangolo; stante che NC è vguale all'altezza AI, ed il rettangolo LBCN è il doppio del triangolo ABC.

Il Theorema seguente non sarà inutile per le cose, che dimostraremo ne gli Elementi Conici.

Se saranno otto quantità, cioè quattro da vna parte, e quattro da vn altra parte proportionali; il rettangolo contenuto dalle due prime al rettangolo contenuto dalle due seconde, farà come il rettangolo contenuto dalle due terze al rettangolo contenuto dalle due quarte: e se il rettangolo delle due prime al rettangolo delle due seconde è come il rettangolo delle due terze al rettangolo delle due quarte, e le prime quattro sono proportionali; ancora le altre quattro saranno proportionali.

Siano le quattro quantità A, B, C, D, da vna parte, e le altre quattro E, F, G, H, da vn altra parte; ed habbia prima A à B l'istessa proportione, quale hà C à D; e similmente E ad F sia come G ad H. Dico che il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due seconde B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due terze C, & G, al rettangolo contenuto dalle due quarte D, ed H.

Con le due A, ed E si faccia il rettangolo M; con le due B, ed F, si faccia il rettangolo N; con le due G, & C, si costruisca il rettangolo R; e con le due D, ed H si faccia il rettangolo S. Perche la proportione del rettangolo M al rettangolo N, [a] *è composta delle due proportioni, cioè di A à B, e di E ad F;* a 23. del 6. *e per ipotesi, la proportione di A à B, è come quella di C à D; e la proportione di E ad F è come quella di G ad H; la proportione dell' rettangolo M al rettangolo N sarà composta delle proportioni di C à D, & di G ad H: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo S* [b] *è cõposta delle medesime due proportioni di C à D, e di G ad H; la proportione dunque del rettangolo M al rettangolo N sarà l'istessa, che quella del rettangolo R al rettangolo S; cioè il rettangolo contenuto dalle due prime A, ed E, al rettangolo contenuto dalle due seconde B, ed F, sarà come il rettangolo delle due terze C, & G, al rettangolo delle due quarte D, ed H, che era da dimostrarsi nel primo luogo.* b 23. del 6.



Di nuouo dico che, se il rettangolo contenuto dalle due A, ed E, al rettangolo delle due B, ed F, è come il rettangolo contenuto dalle due C, & G, al rettangolo contenuto dalle due D, ed H; e la proportione di A à B è come quella di C à D, sarà ancora E ad F come G ad H; s'intenda fatta la medesima costruttione di prima. Se la proportione di E ad F nõ è come quella di G ad H, sarà E ad F come G ad vn altra, ò maggiore, ouero minore di H; sia prima maggiore come la notata HI; si compisca il rettangolo SKI. Perche il rettangolo M al rettangolo N [c] *hà la proportione composta di A à B, e di E ad F, e la proportione di A à B, per ipotesi, è come quella di C à D: ed ancora E ad F, per costruttione, è come G ad HI; la proportione del rettangolo M al rettangolo N sarà composta delle proportioni di C à D, e di G ad HI: mà la proportione del rettangolo R al rettangolo SKI è composta delle medesime proportioni di C à D, e di G ad HI; bauerà il rettãgolo M al rettangolo N l'istessa proportione, che il rettangolo R al rettangolo SKI; mà, per ipotesi, il rettangolo M al rettangolo N è come il rettangolo R al rettangolo S; sarà il rettangolo R* [d] *al rettangolo S, come il medesimo rettangolo R al rettangolo SKI; dal che i rettangoli S, & SKI* [e] *sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile; non dunque E ad F è come G ad vna maggiore di H. Nell' istesso modo si proverà, che E*

c 23. del 6.

d 11. del 5.

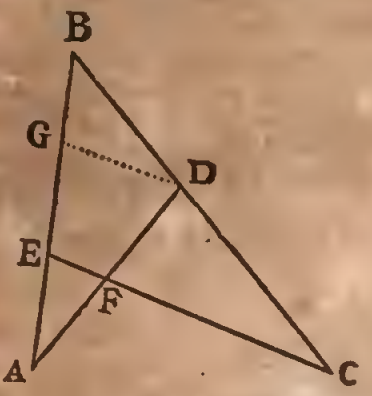
e 9. del 5.

ad F non è come G ad vna minore di H. Per la qual cosa E ad F sarà come G ad H, ch'era da dimostrarsi.

Sarà giouevole porre in questo luogo i due seguenti Theoremi dimostrati da Tolomeo nel primo Libro del suo Almagesto.

I.

Se due rette linee, come A B, C B, contengono qualche angolo A B C, e da gl'estremi A, & C sono inclinate due rette linee come A D, C E, le quali segandosi scambievolmente in qualche punto F, concorrino con le rette AB, CB, come in E, & D; la proportione di CB à BD sarà composta di due proportioni, cioè della proportione di CE ad EF, e della proportione di AF, ad AD.



a 31. del 1. *Dal punto D [a] si tiri la retta D G, parallela alla retta EC, e per il Corollario alla propositione quarta di questo, il triangolo B G D sarà simile al triangolo BEC; e la* b 4. del 6. *proportione di BC à C E [b] sarà come* c 16. del 5. *quella di BD à DG; e permutando, sarà CB à B D [c] come C E à G D. Similmente essendo E F parallela à G D il triangolo A E F, per il citato Corollario, sarà simile al triangolo A D G; e sarà AF* d 4. del 6. *ad FE [d] come A D à D G; e per-* e 16. del 5. *mutando, AF ad A D sarà come EF à GD. Si considerino tre quantità, cioè la prima CE, la seconda EF, e la terza G D; e per il settimo Lemma dopo la 18. propositione di questo, la proportione della prima CE alla terza GD è composta delle proportioni di C E ad EF, e di EF à GD; mà EF à G D, per quel che s'è dimostrato, è come AF ad AD; perciò la proportione di CB à BD sarà composta delle due proportioni cioè di CE ad EF, e di AF ad AD, che era da dimostrarsi. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di AB à BE è composta delle proportioni di AD à DF, e di CF à CE.*

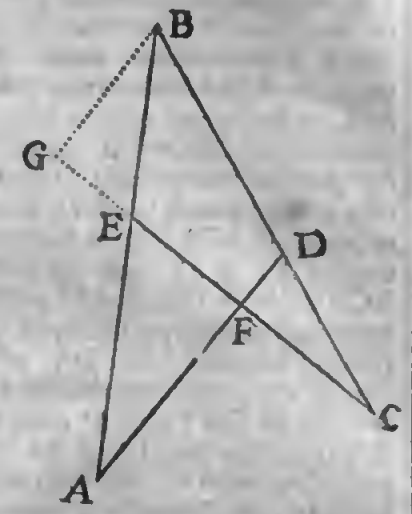
I I.

Supposto le medesime cose. Dico che la proportione di C D à D B è composta delle due proportioni cioè di C F ad FE, e di AE ad AB.

a 31. del 1. *Dal punto B [a] si tiri la retta BG parallela alla retta AD, la quale concorrerà con la retta CE continuata in qualche punto G. Perche le rette AD, BG*
b 29. del 1. *sono frà di loro parallele, segate dalla retta GF, [b] gli angoli alterni A F E,*

BGE,

BGE, sono frà di loro vguali. Similmente, essendo le parallele BG, AD segate dalla retta AB, gli angoli alterni GBE, FAE sono frà di loro vguali: mà gli angoli al vertice A E F, GEB [c] *sono frà di loro vguali; saranno i triangoli GEB, AEF frà di loro equiangoli; e la proportione di G E ad E B* [d] *sarà come quella di FE ad EA; e permutando GE ad EF* [e] *sarà come BE ad EA; e componendo GF ad F E* [f] *sarà come B A ad A E; ed inuertendo, F E ad FG* [g] *sarà come AE ad AB. In oltre essendo FD parallela à GB, sarà CD à DB* [h] *come CF ad FG: frà le due CF, FG si ponga per intermedia F E, per il Lemma settimo dopo la 18. di questo, la proportione della prima CF alla terza FG, sarà composta delle proportioni di C F ad FE, & di FE ad FG: mà FE ad FG, per quel che si è dimostrato, è come AE ad AB; la proportione dunque di CD à DB sarà composta delle proportioni di CF ad FE; e di AE ad A B, come fù proposto dimostrare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la proportione di A E ad E B è composta delle proportioni di AF ad FD, e di CD à C B.*

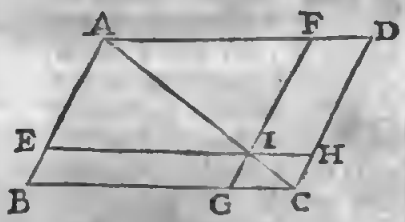


c 15. del 1.
d 4. del 6.
e 16. del 5.
f 18. del 5.
g Coroll. alla 4. del 5
h 2. del 6.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXIV.

In ogni parallelogrammo quei parallelogrammi, che sono intorno al diametro, sono simili frà di loro; ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo.

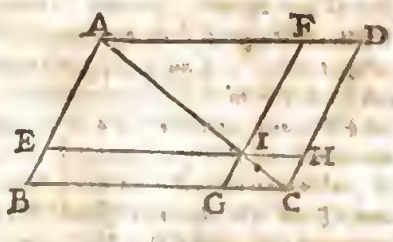
Sia il parallelogrammo ABCD, diuiso ne i parallelogrammi EF, BI, GH, ID, de'quali siano i due EF, GH intorno al diametro AC. Dico che i parallelogrammi EF, GH sono simili frà di loro, ed ogn'vno è simile à tutto il parallelogrammo ABCD. Perche la retta EH è parallela al lato BC, sarà l'angolo esterno AEI [a] vguale all'angolo B interno, ed opposto; e sarà l'angolo esterno AIE vguale all'angolo ACB interno, ed opposto. Similmente perche la retta F G è parallela al lato DC, sarà l'angolo esterno AFI [b] vguale all'angolo D interno, ed opposto; e l'angolo AIF esterno, vguale all'angolo ACD interno, ed opposto; e perciò tutto l'angolo EIF sarà vguale à tutto l'angolo BCD; l'angolo A è commune ad ambidue i parallelogrammi EF, BD; saranno i parallelogrammi EF, BD frà di loro equiangoli. Nell'istesso modo si pro-



a 29. del 1.
b 29. del 1.

uerà che il parallelogrammo GH è equiangolo à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò sarà ancora equiangolo al parallelogrammo EF .

In oltre perche la retta E I è parallela al lato BC, per il Corollario alla 4. propositione di questo, il triangolo AEI è simile al triangolo ABC : e similmente essendo FI parallela al lato CD, sarà il triangolo AIF simile al triangolo ACD; è sarà la proportione di EI ad IA [d] come quella di BC à CA;e la proportione di A I ad I F come quella di AC à CD;e per l'egualità,EI ad IF [e] sarà come BC à CD;e così i lati intorno à gli angoli vguali EIF, BCD sono proportionali.Come ancora sarà IF,ad FA come CD à DA ; ed IE ad EA come CB à BA; e così i lati intorno à gli angoli vguali AEI,ABC, ouero AFI,ADC,sono proportionali. Di più sarà FA ad AI come DA, ad AC, & AI ad AE come CA ad AB,e per l'egualità, FA ad AE [f] sarà come DA ad AB;per la qual cosa i parallelogrammi EF, BD sono frà di loro simili . Nell'istesso modo si dimostrerà , che il parallelogrammo G H è simile à tutto il parallelogrammo BD ; e perciò i parallelogrammi EF, GH sono frà di loro simili , ed ognuno è simile à tutto il parallelogrammo B D , ch'era da dimostrarsi .



d 1. defin. del 6.

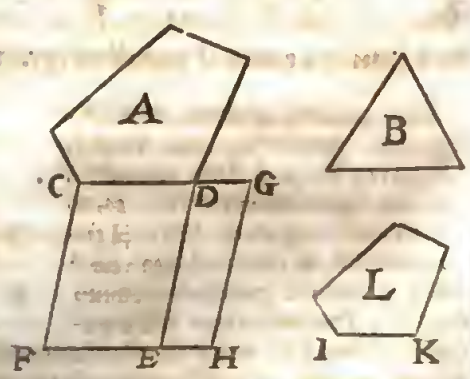
e 22. del 5.

f 22. del 5.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXV.

Dati due rettilinei, costruirne vn terzo simile ad vno de i dati , ed vguale all'altro.

Siano dati i due rettilinei A, & B , e si voglia costruire vn altro rettilineo simile al rettilineo A,ed vguale al rettilineo B . Al lato C D [a] si applichi il parallelogrammo CDEF , secondo qualunque angolo; poi si applichi al lato D E [b] il parallelogrammo DH vguale al rettilineo B , e che habbia l'angolo E D G vguale all'angolo FCD ; frà le due rette CD,DG [c] si troui vna media proportionale , che sia IK ; sopra la retta IK [d] si deseriua il rettilineo L simile , e similmente posto al rettilineo A . Dico che il rettilineo L è vguale al rettilineo B .



a 45. del 1.

b 45. del 1.

c 13. del 6.

d 18. del 6.

vguale al rettilineo A

Perche l'angolo EDG , per costruttione è vguale all'angolo F C D ; vgualmente s'aggiunga l'angolo EDC ; i due angoli EDG, EDC saranno vguali à i due angoli EDC, FCD; ma i due angoli EDC,FCD [e] sono

e 29. del 1.

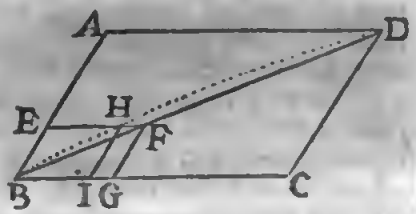
vguali

vguali à due angoli retti; perciò i due angoli EDG, EDC sono vguali à due angoli retti; e le rette CD, DG [f] costituiscono vna sola retta linea; per la qual cosa i parallelogrammi CE, DH sono sotto vna medesima altezza; ed il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH [g] sarà come la base CD alla base DG. In oltre perche IK, per costruttione, è media proportionale frà le due CD, DG, per il Lemma 8. dopo la 18. propositione di questo, la prima CD alla terza DG hà duplicata proportione di quella, che hà la prima CD alla seconda IK: ma il rettilineo A al simile rettilineo L hà la medesima duplicata proportione, che hà CD ad IK; hauerà il rettilineo A al rettilineo L [h] l'istessa proportione, che hà CD à DG; fù dimostrata la proportione di CD à DG essere come il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH; sarà il rettilineo A al rettilineo L, [K] come il parallelogrammo CE al parallelogrammo DH; ma il rettilineo A, per costruttione, è vguale al parallelogrammo CE; sarà il rettilineo L [l] vguale al parallelogrammo DH: e perche il parallelogrammo DH è fatto vguale al rettilineo B; sarà il rettilineo L vguale al rettilineo B, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

f 14. del 1.
g 1. del 6.
h 11. del 5.
K 11. del 5.
l 14. del 5.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn parallelogrammo sia detratto vn parallelogrammo simile, e similmente posto, che habbia vn angolo commune con tutto il parallelogrammo; l'vno, e l'altro parallelogrammo sarà intorno al medesimo diametro.



Dal parallelogrammo ABCD, ne sia detratto vn parallelogrammo simile, e similmente posto, com'è il parallelogrammo EBGF, che habbiano l'angolo EBG commune. Dico che tirato il diametro BD quello passa per il punto F. Se il diametro BD non passa per l'angolo F, ò segarà il lato EF, ouero il lato FG; seghi, s'è possibile, il lato EF in qualche punto H, e sia il diametro la linea DHB; dal punto H si tiri la retta HI, [a] parallela al lato AB, sarà il quadrilatero EBIH parallelogrammo, il quale, per quel che s'è detto, e intorno al diametro DHB; e perciò il parallelogrammo EBIH [b] sarà simile à tutto il parallelogrammo AC; ma il parallelogrammo EBGF è supposto simile al medesimo parallelogrammo AC, i parallelogrammi dunque EBGF, EBIH [c] sono simili frà di loro, e la proportione di EB à BG, [d] sarà come quella della medesima EB à BI: per la qual cosa le rette BI, BG [e] sono frà di loro vguali, la parte è vguale al tutto, ch'è impossibile: non dunque il diametro DB sega il lato EF. Nell'istesso modo si dimostrarà, che non sega il lato FG; e perciò passa per il punto F, ed i parallelogrammi EBGF, ABCD sono intorno al medesimo diametro DB, ch'era da dimostrarsi.

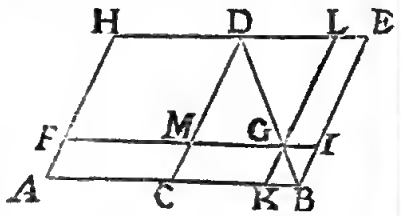
a 31. del 1.
b 24. del 6.
c 21. del 6.
d 1. defin. del 6.
e 9. del 5.

THEO-

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXVII.

Di tutti i parallelogrammi applicati alla medeſima retta linea, che mancano à compire quella retta linea d'vn parallelogrammo ſimile, e ſimilmente poſto à quello, ch'è deſcritto ſopra la metà; il maſſimo è il parallelogrammo deſcritto ſopra la metà.

Sia la retta linea A B, diuiſa in due parti vguali in C, e ſopra la retta AC ſia deſcritto qualunque parallelogrammo AD; dal punto B ſi tiri la
a 31. del 1. retta B E [a] parallela ad A H, ouero C D, la quale concorrerà con H D continuata in qualche punto E. Perche la retta D C è parallela ad AH,
b 29. del 1. l'angolo EDC eſterno [b] è vguale all'angolo DHA interno, ed oppoſto; e per l'iſteſſa ragione l'angolo BCD ſarà vguale all'angolo A. Simil-
c 29. del 1. mente eſſendo DC parallela ad EB, l'angolo HDC eſterno [c] ſarà vguale all'angolo E interno, ed oppoſto; e l'angolo ACD ſarà vguale all'angolo CBE; dal che i parallelogrammi AD, CE ſono equiangoli. E perche CB è vguale ad AC, però DE ſarà vguale ad HD; come ancora EB, DC, HA ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa CD à DE [d] ſarà come A H ad H D, e coſi per tutti gli altri lati intorno à gli angoli vguali. Si che i parallelogrammi AD, CE [e] ſono ſimili frà di loro, ed il parallelogrammo AD, deſcritto ſopra la retta AC, ch'è metà della retta AB, ſarà applicato alla retta AB, e gli manca per compire la retta AB, tutto il parallelogrammo DCBE ſimile, e ſimilmente poſto ad eſſo parallelogrammo AD. Dico che il parallelogrammo AD è il maſſimo di tutti gli altri parallelogrammi applicabili alla medeſima retta AB, che ogn'vno manchi per compire la retta AB d'vn parallelogrammo ſimile ad AD.



d Corol. alla 7. del 5.

e 1. defin. del 6.

Si tiri il diametro DB, nel quale ſia preſo qualunque punto G; e per il
f 31. del 1. punto G [f] ſi faccia paſſare la retta IF parallela ad AB, e per il medeſimo punto G ſi faccia paſſare la retta LK parallela ad EB; e ſarà diuiſo il parallelogrammo CE in quattro parallelogrammi, de' quali i due KI, ML ſono intorno al diametro DB; e perciò
g 24. del 6. [g] ſono ſimili frà di loro, ed ogn'vno è ſimile al parallelogrammo C E; cioè ſimile al parallelogrammo A D, deſcritto ſopra la retta AC, ch'è metà della retta AB: ſarà dũque applicato alla retta AB il parallelogrammo AG, il quale manca, per compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo K I ſimile al parallelogrammo AD, deſcritto ſopra di AC, metà di AB. Dico che il parallelogrammo AG è minore del parallelogrammo AD. Perche i complementi CG,
h 43. del 1. GE, [h] ſono frà di loro vguali, ſe gli aggiunga il commune KI, ne viene il parallelogrammo C I vguale al parallelogrammo K E: ma il parallelo-

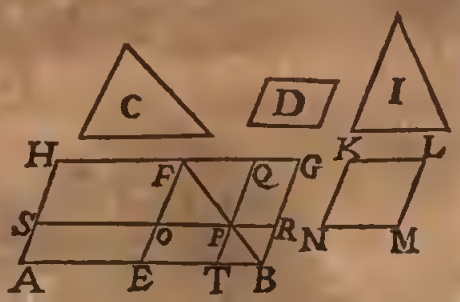
grammo

grammo CI K è vguale al parallelogrammo CF (ſtante che hanno vguali baſi, e ſono frà le medeſime parallele) ſarà il parallelogrammo CF vguale al parallelogrammo KE; vgualmente ſe gli aggiunga il parallelogrammo CG, ne viene tutto il parallelogrammo AG vguale allo gnomone CBELGM; ma queſto gnomone è minore del parallelogrammo CE, cioè minore del parallelogrammo AD; ſarà il parallelogrammo AG minore del parallelogrammo AD. E perche il punto G è preſo ad arbitrio, ouunque il punto G ſarà preſo in DB, ſempre ſi dimoſtrerà il medeſimo. Per la qual coſa di tutti i parallelogrammi applicabili ad AB, che ogn'vno manchi à compire la linea AB per vn parallelogrammo ſimile ad AD, il parallelogrammo AD ſarà il maſſimo, ch'era da dimoſtrarſi. K 31. del 6.

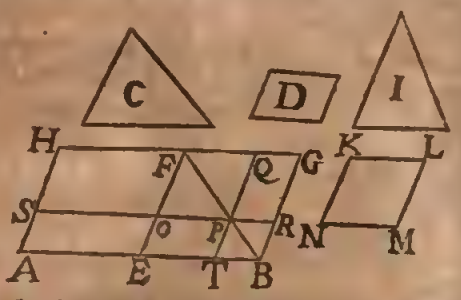
PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Ad vna data retta linea applicare vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che manchi à compire la linea d'vn parallelogrammo ſimile ad vn dato parallelogrammo; è neceſſario però, che il dato rettilineo non ſia maggiore del parallelogrammo deſcritto ſopra la metà, ſimile al dato parallelogrammo.

Sia data la retta linea AB, il rettilineo C, ed il parallelogrammo D; e s'habbia d'applicare alla data retta AB vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che manchi à compire la retta AB per vn parallelogrammo ſimile al dato parallelogrammo D. Diuiſa AB [a] in due parti vguali in E, ſopra la metà AE [b] ſi deſcriua il parallelogrammo AF, ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D; e ſi compiſca tutto il parallelogrammo AG. Si dimoſtri, come ſi fece nel principio dell'antecedente propoſitione, che il parallelogrammo EG è ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo AF, ouero D. Se il parallelogrammo AF ſarà vguale al rettilineo C, haueremo applicato alla retta AB il parallelogrammo AF, che manca per compire la retta AB quanto è il parallelogrammo EG, ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D, ch'era da farſi. Ma ſe il parallelogrammo AF non è vguale al rettilineo C, perche nell'antecedente propoſ. s'è dimoſtrato, che il parallelogrammo AF è il maſſimo di tutti gli applicabili ad AB, che habbiano la mancanza ſimile ad AF; perciò qualunque parallelogrammo applicato ad AB, ſecondo le dette conditioni, ſarà minore di AF, do- a 10. del 1. b 18. del 6.



AF; douendosi dunque applicare ad A B vn parallelogrammo vguale al rettilineo C, con le dette conditioni, non essendo C vguale ad AF è necessario, che sia minore, altrimente l'applicatione da farsi è impossibile. Supposto dunque, che il rettilineo C sia minore di AF per la quantità del rettilineo I; si descriua il parallelogrammo NL simile, e similmente posto al parallelogrammo D [c] ed vguale al rettilineo I; sarà il parallelogrammo NL [d] simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; dal che l'angolo EFG sarà vguale all'angolo NKL. In oltre perche sottraendo dal parallelogrammo AF il rettilineo C, auanza il rettilineo I, cioè NL, perciò i due C, & NL, insieme giunti, sono vguali al parallelogrammo AF, ouero EG; per la qual cosa il parallelogrammo EG sarà maggiore del parallelogrammo NL; e per lo Scolio alla 20. propositione, il lato FG è maggiore di KL, ed il lato FE sarà maggiore di KN. Si tagli da FG [e] la parte FQ vguale ad LK; e da FE si tagli la parte FO vguale ad NK; dal punto Q si tiri la retta QT [f] parallela alla retta GB, e per il punto O si faccia passare la retta SR parallela ad AB. Perche i lati OF, FQ sono vguali à i lati NK, KL, e l'angolo OFQ è vguale all'angolo K; sarà il parallelogrammo OQ [g] vguale, simile, e similmente posto al parallelogrammo NL; ma il parallelogrammo NL è simile, e similmente posto al parallelogrammo EG; saranno i parallelogrammi EG, OQ frà di loro simili, [h] e similmente posti; hanno l'angolo EFG commune; perciò tirato il diametro FB, [K] quello passa per il punto P; ed il parallelogrammo TR sarà intorno al diametro FB; dal che [l] sarà simile al parallelogrammo EG; cioè simile al parallelogrammo AF, ouero D. Si è dunque alla retta AB applicato il parallelogrammo AP, che manca à compire la retta AB, per quanto è il parallelogrammo TR simile al parallelogrammo dato D. Dico che il parallelogrammo AP è vguale al rettilineo C.



Perche i complementi EP, PG [m] sono fra di loro vguali, se gli aggiunga vgualmente il piano TR, ne viene il piano ER vguale al piano TG; ma il parallelogrammo ER è vguale al parallelogramo ES [n] (stante che sono sopra vguali basi, e frà le medesime parallele) sarà il piano ES vguale al piano TG; vgualmente s'aggiunga il piano EP, ne viene il parallelogrammo AP vguale allo gnomone EBGQPO. Finalmente perche i due rettilinei NL, & C, giunti insieme, sono vguali al parallelogrammo AF, cioè vguali al parallelogrammo EG; ed il parallelogrammo NL è dimostrato vguale al parallelogrammo OFQP; sarà il rettilineo C vguale allo gnomone EBGQPO: ma lo gnomone è dimostrato vguale al parallelogrammo AP; sarà il parallellogrammo AP vguale al dato rettilineo C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

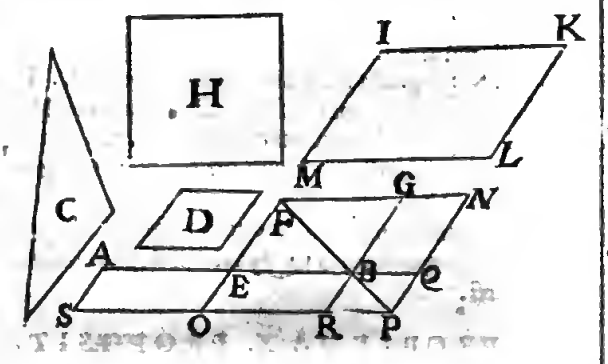
c 25. del 6.
d 21. del 6.
e 3. del 1.
f 31. del 1.
g Scol. alla 4. del 6.
h 22. del 6.
K 26. del 6.
l 24. del 6.
m 43. del 1.
n 36. del 1.

PRO-

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXIX.

Applicare ad vna data retta linea vn parallelogrammo vguale ad vn dato rettilineo, che ſuperi la retta data d'vn parallelogrammo ſimile ad vn altro dato parallelogrammo.

Sia data la retta linea AB, alla quale ſi voglia applicare vn parallelogrammo vguale al dato rettilineo C, che ſuperi la retta AB, per quanto è vn parallelogrammo ſimile al parallelogrammo dato D. Si diuida AB [a] in due parti vguali, e ſopra la metà E B [b] ſi deſcriua il parallelogrammo GE ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D. S'aggiunga il parallelogrammo EG, col rettilineo C [c] in modo, che coſtituiſcano vn ſolo rettilineo, come il notato H; poi ſi coſtruiſca il parallelogrammo M K vguale al rettilineo H; [d] e che ſia ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo D; ſarà il parallelogrammo MK [e] ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo EG; e perciò l'angolo E F G ſarà vguale all'angolo I. Hor perche il parallelogrammo MK è vguale al rettilineo H, ed il rettilineo H è vguale à i due rettilinei EG, & C giunti inſieme; ſarà il parallelogrammo MK maggiore del ſimile parallelogrammo EG: per la qual coſa il lato IK [f] ſarà maggiore di FG, ed il lato IM ſarà maggiore di FE. Si continui FG verſo N, e ſi faccia FN [g] vguale ad IK; e ſi continui il lato FE verſo O, e ſi faccia FO vguale ad IM; dal punto N ſi tiri la retta NP [h] parallela ad FO; e per il punto O ſi faccia paſſare la retta SP parallela ad AB, la quale concorrerà con NP in qualche punto P; dal punto A ſi tiri la retta AS [k] parallela ad FO, la quale concorrerà con PS in qualche punto S; ſi prolunghi AB ſino che concorra con NP in qualche punto Q, e ſi prolunghi GB ſino ad R. Perche l'angolo OFN è vguale all'angolo MIK, ed i lati OF, FN ſono vguali à i due MI, IK; ſarà il parallelogrammo ON [l] ſimile, e ſimilmente poſto, ed vguale al parallelogrammo M K; dal che i due parallelogrammi O N, EG [m] ſono frà di loro ſimili, e ſimilmente poſti; hanno l'angolo F commune, e perciò tirato il diametro FP, [n] quello paſſa per il punto B; dal che il parallelogrammo RQ ſarà intorno al diametro FP: per la qual coſa ſarà [o] ſimile à tutto il parallelogrammo FOPN, cioè ſarà [p] ſimile al parallelogrammo



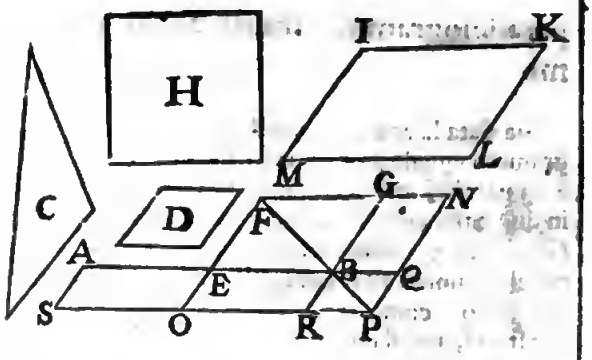
a 10. del 1.
b 18. del 6.
c 45. del 1.
d 25. del 6.
e 21. del 6.
f Scol. alla 20. del 6.
g 3. del 1.
h 31. del 1.
k 31. del 1.
l 4. del 6.
m 21. del 6.
n 26. del 6.
o 24. del 6.
p 21. del 6.

rallelogrammo dato D, ſarà dunque applicato alla retta AB il parallelogrammo SQ, il quale ſupera la retta AB, per quanto è il parallelogrammo R Q, ſimile al parallelogrammo D. Dico che il parallelogrammo SQ è vguale al dato rettilineo C.

I parallelogrammi AO, OB hanno vguali baſi, e ſono frà le medeſime parallele, e perciò q ſono frà di loro vguali; ma O B, r è vguale al complemento BN, ſarà il piano AO vguale al piano B N; vgualmente ſe gli aggiunga il piano OQ, ne viene il parallelogrammo SQ vguale allo gnomone OPNGBE. In oltre perche il parallelogrammo ON è vguale al parallelogrammo MK; ed il parallelogrammo MK è vguale à i due rettilinei EG, & C inſieme; ſarà il parallelogrammo ON vguale à i due piani EG, & C, giunti inſieme; ſe ne leui il commune EG, reſta il rettilineo C vguale allo gnomone OPNGBE: ma queſto gnomone fù dimoſtrato vguale al parallelogrammo S Q; ſarà il parallelogrammo S Q vguale al dato rettilineo C, eh'era da farſi, e dimoſtrarſi.

q 36. del 1.

r 43. del 1.

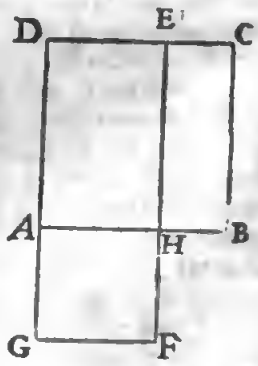


PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXX.

Diuidere vna data retta linea terminata ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

Sia data la retta terminata AB, la quale ſi voglia diuidere ſecondo l'eſtrema, e media proportione; cioè che tutta alla maggior parte, habbia l'iſteſſa proportione, quale hà la maggior parte al rimanente. Sopra la retta A B ſi deſcriua il quadrato AC, e ſi applichi al lato A D il parallelogrammo EG, vguale al quadrato AC, e che ſuperi la retta AD per vn parallelogrammo ſimile al medeſimo quadrato AC; cioè che ſuperi la retta AD per vna figura quadrata, il lato EF ſegarà la retta AB in qualche punto H. Dico che AB ad AH è come AH ad HB.

a 29. del 6.



Perche il parallelogrammo DF, per coſtruttione, è vguale al quadrato AC; leuatone il commune rettangolo AE, reſta il quadrato AF vguale al rettangolo EB. In-

oltre,

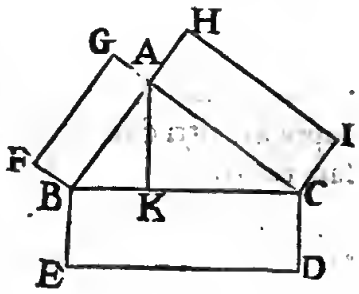
oltre, essendo i rettangoli AF, EB frà di loro vguali, e gli angoli ad H retti; i lati intorno à gli angoli vguali [b] sono reciprochi; e perciò EH ad HF sarà come AH ad HB: ma EH è vguale à CB, cioè vguale ad AB; sarà A B ad F H come A H ad H B; E perche il lato F H è vguale al lato A H (stante che AF è quadrato) sarà AB ad AH, come A H ad H B. Per la qual cosa la retta A B è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da farsi, e dimostrarsi. [b] 14. del 6.

SCOLIO.

Volendo diuidere qualunque retta AB secondo l'estrema, e media proportione con modo facile, si operi come si disse nell' 11. *proposition del secondo Libro.*

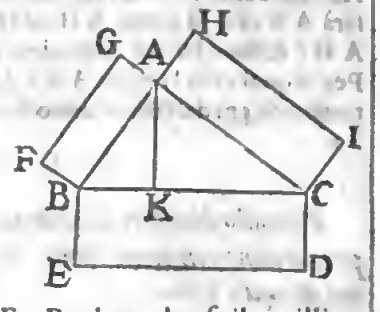
THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXXI.

Ne i triangoli rettangoli, la figura descritta sopra del lato opposto all'angolo retto, è vguale alle figure simili, e similmente descritte sopra i lati, che contengono l'angolo retto.



Sia il triangolo A B C, angolo retto in A, e sopra i lati BC, CA, AB siano descritte figure rettilinee simili, e similmente poste, che siano le notate BD, CH, BG. Dico che la figura BD descritta sopra del lato B C, opposto all'angolo retto, è vguale alle figure CH, BG, descritte sopra i lati AB, AC, che contengono l'angolo retto A. Dall'angolo retto A si faccia cadere la retta AK [a] perpendicolare al lato B C, e per il Corollario 2. all'8. propositione di questo, la retta AC è media proportionale frà le due BC, CK; e la retta AB è media proportionale frà le due CB, BK; dalche BC ad AC sarà come AC à CK; e per il Lemma 8. dopo la 18. propositione di questo, la prima BC alla terza CK, hà duplicata proportione di quella, che hà BC à CA: Ma il rettilineo EC al simile rettilineo CH [c] hà la medesima duplicata proportione, che hà BC ad AC; hauerà BC à CK l'istessa proportione, quale hà il rettilineo EC al rettilineo CH; ed inuertendo CK à CB [b] sarà come il rettilineo CH, al rettilineo CE. Similmente essendo AB media proportionale frà le due CB, BK, hauerà C B à BK duplicata proportione di quella, che hà C B ad A B: ma il rettilineo EC al simile rettilineo BG [f] hà la medesima duplicata proportione di quella, che hà CB à BA, hauerà CB à BK l'istessa proportione, che hà il rettilineo DB al rettilineo BG; ed inuertendo, BK à B C, sarà come il rettilineo B G al rettilineo B D. Si considerino sei [a] 12. del 1. [c] 20. del 6. [b] Corol. alla 4. del 5. [f] 20. del 6.

quantità, la prima CK, la ſeconda CB, la terza CH, la quarta CE, la quinta BK, e la ſeſta BG. Perche ſi è dimoſtrato, che la prima CK alla ſeconda CB hà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza CH alla quarta CE, e s'è dimoſtrato ancora, che la quinta BK alla ſeconda CB, hà l'iſteſſa proportione, quale hà la ſeſta BG alla quarta CE; la prima CK con la quinta BK alla ſeconda BC [c] hauerà l'iſteſſa proportione, quale hà la terza CH con la ſeſta BG alla quarta CE; ma la prima CK con la quinta BK è vguale alla ſeconda BC, la terza dunque CH con la ſeſta BG [d] ſarà vguale alla quarta CE. Per la qual coſa il rettilineo EC è vguale à i due rettilinei ſimili CH, BG, giunti inſieme, ch'era da dimoſtrarſi.



c 14. del 5.

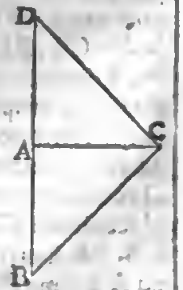
d 14. del 5.

SCOLIO.

Il Campano fà la conuerſa à queſta propoſitione, la quale non è diuerſa dalla 48. propoſitione del primo Libro in coſa alcuna, e perciò con ogni brevità l'eſponiamo in queſto luogo.

Se la figura deſcritta ſopra del lato d'vn triangolo è vguale, ſimile, e ſimilmente poſta alle figure deſcritte ſopra gli altri due lati; l'angolo contenuto da quei due lati ſarà retto.

Nel triangolo ABC, ſuppoſto che la figura deſcritta ſopra del lato BC ſia vguale, ſimile, e ſimilmente poſta alle figure deſcritte ſopra degli altri due lati BA, AC. Dico che l'angolo BAC è retto. Nel punto A ſopra la retta AC, ſi erigga la perpendicolare AD; ſi faccia AD [b] vguale ad AB, e ſi tiri la retta DC. Le figure ſimili, e ſimilmente deſcritte ſopra i lati DA, AC; [c] ſono vguali alla ſimile figura, e ſimilmente deſcritta ſopra del lato CD. Inoltre perche DA è vguale ad AB, la figura deſcritta ſopra DA [d] ſarà vguale alla figura ſimile, e ſimilmente deſcritta ſopra AB; e perciò le due ſimili figure deſcritte ſopra i lati CA, AD ſono vguali alle due ſimili figure deſcritte ſopra i lati CA, AB; cioè la figura deſcritta ſopra del lato CD è vguale alle due figure ſimili, e ſimilmente deſcritte ſopra i lati CA, AB: ma queſte, per ipoteſi, ſono vguali alla ſimile figura, e ſimilmente deſcritta ſopra del lato BC; ſarà la figura deſcritta ſopra del lato DC vguale alla ſimile figura, e ſimilmente deſcritta ſopra del lato BC; è per lo Scolio alla propoſ. 2. di queſto, ſarà DC vguale al lato BC. Finalmente perche i lati DA, AC ſono vguali à i due lati BA, AG, e la baſe DC è



a 11. del 1.

b 3. del 1.

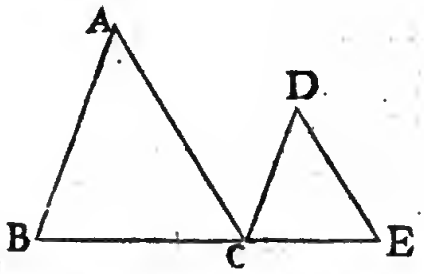
c 31. del 6.

d Scol. alla 20. del 6.

vguale alla baſe BC; ſarà l'angolo DAC c vguale all'angolo BAC: ma l'angolo DAC, per coſtruttione è retto; l'angolo dunque BAC ſarà retto, ch'era da dimoſtrarſi. c 8. del 1.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXXII.

Se due triangoli, che hanno due lati proportionali à due lati, ſiano compoſti ſecondo vn angolo talmente, che i lati homologhi ſiano frà di loro paralleli, e l'angolo, ſecondo il quale ſono compoſti, ſia alterno à gli angoli contenuti da i lati proportionali; i reſtanti due lati ſaranno in vna medeſima dirittura, e coſtituiranno vna ſola retta linea.



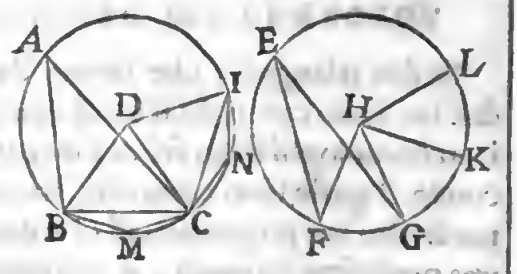
Siano i due triangoli A B C, D C E, compoſti ſecondo l'angolo ACD, il quale ſia alterno à gli angoli A, & D; e la proportione di BA ad AC ſia come quella di C D à D E; e ſiano i lati homologhi AB, DC frà di loro paralleli; come ancora i lati homologhi AC, DE ſiano frà di loro paralleli. Dico che i lati BC, CE coſtituiſcono vna ſola retta linea BE. Perche i lati AB, DC ſono paralleli, e ſono ſegati dalla retta AC, l'angolo BAC a ſarà vguale all'angolo alterno ACD; ſimilmente eſſendo i lati AC, DE frà di loro paralleli, ſarà l'angolo EDC vguale all'angolo alterno ACD; per la qual coſa l'angolo A ſarà vguale all'angolo D. In oltre perche gli angoli A, & D ſono vguali, e la proportione di BA ad AC, per ipoteſi, è come quella di CD à DE; i triangoli ABC, DCE b ſono equiangoli; e ſarà l'angolo ACB vguale all'angolo E, e l'angolo DCE vguale all'angolo B. Hor all'angolo DCE s'aggiunga l'angolo DCA; ed all'angolo B s'aggiunga l'angolo A; ſarà tutto l'angolo E C A vguale à i due angoli A, & B, giunti inſieme. Se tanto all'angolo ECA, quanto alla ſomma de i due angoli A, & B, s'aggiunga l'angolo ACB, i due angoli ECA, ACB, ſaranno vguali alli trè angoli del triangolo A B C: ma i tre angoli del triangolo ABC c ſono vguali à due angoli retti, i due angoli dunque ECA, ACB ſono vguali à due angoli retti, e le rette BC, CE d coſtituiſcono la ſola retta linea BE, ch'era da dimoſtrarſi. a 29. del 1. b 6. del 6. c 32. del 1. d 14. del 1.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXXIII.

Ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle cir-

confe-

conferenze, come ancora i ſettori, hanno la medeſima proportione, che gli archi, à i quali inſiſtono.



Siano i due circoli vguali ABC, EFC, i di cui centri D, ed H; e ſiano due qualunque angoli a i centri, come BDC, FHG, e due altri alla circonferenza, come BAC, FEG, i quali ſiano oppoſti à gli archi BMC, FG. Dico, che l'angolo B D C all'angolo FHG; ouero l'angolo BAC all'angolo FEG; come ancora il ſettore DBMC al ſerrore FHG, è come l'arco BMC all'arco FG.

a 23. del 1. Sopra la retta HG, nel punto H, ſi faccia l'angolo G H K [a] vguale all'angolo GHF; e ſopra la retta H K ſi coſtituiſca l'angolo KHL, vguale all'angolo FHG, ouero GHK; e col medeſimo ordine ſe ne coſtituiſcano quanti altri ſe ne vogliano. Similmenre nel circolo ABC, ſopra la retta

b 23. del 1. CD, nel punto D, [b] ſi coſtituiſca l'angolo CDI, vguale all'angolo BDC; e ſe ne coſtituiſcano col medeſimo ordine, quanti altri ſi vogliano, ogn'vno vguale all'angolo BDC; ſaranno gli archi FG, GK, KL, frà di loro vguali; e tante volte l'angolo FHL ſarà miſurato dall'angolo FHG, per quante volte l'arco FL è miſurato dall'arco FG: per la qual coſa l'angola FHL è multiplice dell'angolo FHG, come l'arco FL è multiplice dell'arco FG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo BDI è multiplice dell'angolo BDC, come l'arco BI è multiplice dell'arco BC. Se dunque l'angolo BDI è vguale all'angolo F H L, ſarà l'arco B I

c 26. del 3. [c] vguale all'arco FL; ſe l'angolo BDI è maggiore dell'angolo FHL, per il Corollario alla 26. propoſitione del terzo Libro, l'arco B I ſarà maggiore dell'arco FL; e ſe l'angolo BDI è minore dell'angolo F H L, l'arco B I ſarà minore dell'arco FL. Si conſiderino quattro quantità; cioè l'angolo BDC prima, l'angolo FHG ſeconda, la terza ſia l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono l'angolo BDI, e l'arco BI; e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta ſono l'angolo FHL, e l'arco FL: perche l'angolo BDI, ch'è multiplice della prima, ſe è maggiore dell'angolo FHL, ch'è multiplice della ſeconda, ancora l'arco BI, ch'è multiplice della terza, è maggiore dell'arco FL, ch'è multiplice della quarta; e ſe l'angolo BDI è minore, ò vguale all'angolo FHL, ancora l'arco BI è minore, ò vguale all'arco FL; e per la ſeſta definitione del quinto Libro, la prima alla ſeconda haverà l'iſteſſa proportione, che la terza alla quarta; cioè l'angolo BDC all'angolo FHG ſarà, come l'arco BC all'arco FG. In oltre perche l'angolo B D C al centro è il doppio dell'angolo BAC alla circonferenza; e l'angolo FHG al centro è il doppio dell'angolo FEG alla circonferenza; ſaranno gli angoli BDC, FHG, vguali multiplici degli angoli BAC, FEG; e perciò l'angolo B D C all'

ango-

angolo FHG [d] è come l'angolo BAC all'angolo FEG: ma ſi è dimoſtrato, che l'angolo BDC all'angolo FHG è come l'arco BC all'arco FG; ſarà l'angolo BAC all'angolo FEG [e] come l'arco BC all'arco F G. Per la qual coſa ne i circoli vguali gli angoli à i centri, ouero alle circonferenze ſono come gli archi, à i quali inſiſtono.

Finalmente dico, che il ſettore B D C al ſettore F H G, è come l'arco BC all'arco FG. Si tirino le rette BC, CI. Perche gli archi BC, CI ſono frà di loro vguali, le rette ancora BC, CI [f] ſono frà di loro vguali. Proueremo prima, che eſſendo gli archi B C, C I frà di loro vguali, che i ſettori ancora DBC, CDI ſono frà di loro vguali. Ne gli archi BC, CI ſi prendano due qualunque punti M, & N, e ſi tirino le rette BM, MC, CN, NI. Perche gli archi BMC, CNI ſono frà di loro vguali, i rimanenti di tutta la circonferenza, cioè gli archi BAIC, CBAI ſono frà di loro vguali: ma gli archi vguali [g] ſi oppongono ad angoli vguali; gli angoli dunque BMC, CNI ſono frà di loro vguali; dalche le portioni BMC CNE [h] ſono frà di loro ſimili: ma ſono poſte ſopra le rette vguali B C, CI; perciò [K] ſono frà di loro vguali. In oltre ſi conſiderino i triangoli DBC, DCI. Perche i due lati BD, DC ſono vguali à i due lati C D, DI, e l'angolo BDC è vguale all'angolo CDI; ſarà il triangolo D B C i vguale al triangolo DCI; à i quali s'aggiungano le vguali portioni BMC, CNI, ne viene il ſettore DBMC vguale al ſettore DCNI. Nell'iſteſſo modo ſi proverà che i ſettori HFG, HGK, HKL ſono frà di loro vguali: e ſe l'arco BCI è vguale all'arco FKL, nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il ſettore BDIC è vguale al ſettore FHLG. D'onde facilmente ſi può dimoſtrare, che ſe l'arco B C I è maggiore, ò minore dell'arco FGL; ancora il ſettore BDIC ſarà maggiore, ò minore del ſettore FHLG. Hor perche tanti ſono gli archi vguali FG, GK, KL, per quanti ſono gli vguali ſettori HFG, HGK, HKL; ſarà il ſettore F H L G multiplice del ſettore HFG, come l'arco F L è multiplice dell'arco F G. E per l'iſteſſa ragione ſarà il ſettore BDIC multiplice del ſettore B D C, come l'arco BCI è multiplice dell'arco BC. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia il ſettore DBC, la ſeconda il ſettore HFG, la terza l'arco B C, e la quarta l'arco FG. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono il ſettore BDIC, e l'arco BI; gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta ſono il ſettore FHL, e l'arco FL; e perche ſe il ſettore BDI è vguale al ſettore FHL ancora l'arco BI è vguale all'arco FL; e ſe il ſettore BDI è maggiore, ò minore del ſettore FHL, ancora l'arco BI è maggiore, ò minore dell'arco F L, per la ſeſta definitione del quinto Libro, ſarà la prima, cioè il ſettore DBC alla ſeconda, ch'è il ſettore HFG, come la terza, cioè l'arco BC, alla quarta, ch'è l'arco FG, come fù propoſto dimoſtrare.

d 15. del 5.
e 11. del 5.
f 29. del 3.
g 27. del 3.
h 10. defin. del 3.
K 24. del 3.
l 4. del 1.

COROLLARIO I.

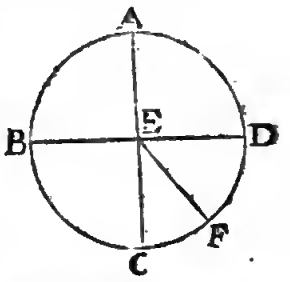
Eſſendo l'arco BC all'arco FG, come l'angolo BDC all'angolo FHG; cioè come l'angolo BAC all'angolo FEG; ſarà manifeſto, che il ſettore DBC al ſettore HFG è come

l'ango-

l'angolo BDC all'angolo FHG; ed è ancora come l'angolo BAC all'angolo FEG.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propoſ.è parimente manifeſto, che l'angolo al centro à quattro angoli retti è come l'arco oppoſto all'angolo nel centro à tutta la circonferenza del circolo; ed al contrario, i quattro angoli retti hanno l'iſteſſa proportione all'angolo nel centro, quale hà tutta la circonferenza all'arco, al quale inſiſte l'angolo nel centro.



Nel circolo ABCD, il di cui centro E, & i diametri AC, BD ſi ſeghino ad angoli retti in E;
a 23. del 3. *ſaranno gli archi AB, BC, CD, DA,* [a] *frà di loro vguali. Si prenda nell'arco CD qualunque punto F, e ſi tiri la retta FE. Per l'antecedente propoſitione l'angolo CED all'angolo FED ſarà come l'arco CD all'arco FD; e perche i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED ſono multiplici dell'angolo retto CED; come i quattro archi DA, AB, BC, CD ſono multiplici dell'arco CD; per il Corollario alla 24. propoſitione del 5. libro, li quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, all'angolo retto CED, hanno l'iſteſſa proportione, che i quattro archi DA, AB, BC, CD, cioè che tutta la circonferenza ABCD all'arco CD: ma l'angolo CED all'angolo FED è come l'arco CD all'arco FD, per*
b 22. del 5. *l'egualità, i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED all'angolo FED,* [b] *ſono come tutta la circonferenza ABCD all'arco FD; ed inuertendo, l'angolo*
c Corol. alla 4. del 5. *al centro FED* [c] *à i quattro angoli retti DEA, AEB, BEC, CED, ſono come l'arco FD à tutta la circonferenza, come ſi diſſe.*

SCOLIO.

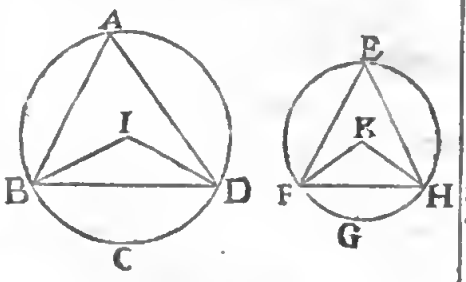
Non ſarà inutile ſpiegare qui col Clauio il ſeguente Theorema.

I.

Se da due qualunque circoli ſi taglino portioni ſimili; la proportione dell'arco à tutta la circonferenza del ſuo circolo, è come quella dell'altro arco à tutta la circonferenza del ſuo circolo.

Ne i circoli ABCD, EFGH, i di cui centri I, & K, ſiano tagliate le portioni ſimili BAD, FEH. Dico che l'arco BAD à tutta la circonferen-

za ABCD, è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH. Da i centri I, & K ſi tirino le rette IB, ID, KF, KH. Perche le portioni BAD, FEH ſono ſimili, perciò gli angoli BAD, FEH, [a] *alle circonferenze ſono frà di loro vguali; & i loro dupli, cioè gli angoli BID, FKH, à i centri, ſono frà di loro vguali; e tal proportione haurà l'angolo I à quattro angoli retti,* [b] *quale hà l'angolo K à quattro angoli retti: ma, per l'antecedente Corollario, l'angolo I à quattro angoli retti è come l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD; e l'angolo K à quattro retti è come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; ſarà l'arco BCD à tutta la circonferenza ABCD,* [c] *come l'arco FGH à tutta la circonferenza EFGH; ed inuertendo, tutta la circonferenza ABCD all'arco BCD, ſarà come tutta la circonferenza EFGH* [d] *all'arco FGH; e per la conuerſione della proportione, tutta la circonferenza ABCD all'arco BAD* [e] *è come tutta la circonferenza EFGH all'arco FEH; ed inuertendo, l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD* [f] *è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH, ch'era da dimoſtrarſi.*



a 10. defin. del 3.

b Coroll. alla 7. del 5.

c 11. del 5.

d Coroll. alla 4. del 5.

e Coroll. alla 19. del 5.

f Coroll. alla 4. del 5.

COROLLARIO.

Sarà manifeſto dal quel, che s'è detto, che gli archi delle ſimili portioni ſono come le circonferenze de'loro circoli, e ſono ancora come i reſtanti archi.

Perche eſſendoſi dimoſtrato, che l'arco BAD à tutta la circonferenza ABCD è come l'arco FEH à tutta la circonferenza EFGH; ſarà, permutando, l'arco BAD all'arco FEH [g] *come la circonferenza ABCD alla circonferenza EFGH: ma tutta la circonferenza ABCD à tutta la circonferenza EFGH, per quel che s'è dimoſtrato, è come l'arco BCD all'arco FGH; ſarà l'arco BAD all'arco FEH* [h] *come l'arco BCD all'arco FGH, come ſi diſſe.*

g 16. del 5.

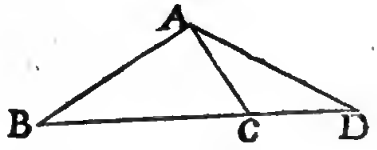
h 11. del 5.

Per facilitare le coſe che ſeguono pongo quì li ſeguenti due Theoremi.

II.

Se ſarà qualunque triangolo ABC, e ſarà fatto l'angolo DAC vguale all'angolo B; ſarà il triangolo ABD ſimile al triangolo ACD, oltre à ciò la retta AD ſarà media proportionale

tionale frà le rette BD, DC, e la proportione di BA ad AC ſarà come quella di BD à DA, ouero come quella di AD ad AC; e ſe AD è media proportionale frà le rette BD, DC, l'angolo DAC ſarà vguale all'angolo B.



Suppoſto prima, che l'angolo DAC ſia vguale all'angolo B. Dico che i triangoli ABD, ACD ſono frà di loro ſimili; che la retta AD è media proportionale frà le rette BD, DC; e che BA ad AC è come BD à DA. Perche l'angolo CAD è vguale all'angolo B, vgualmente s'aggiunga l'angolo BAC, i due angoli CAB, CBA [a] *ſaranno vguali à tutto l'angolo BAD. Nel triangolo ABC, il lato BC è continuato in D, dal che l'angolo eſterno DCA* [b] *è vguale à i due angoli CBA, CAB interni, ed oppoſti: ma i due angoli CBA, CAB, inſieme giunti, per quel che s'è dimoſtrato, ſono vguali all'angolo BAD; ſarà l'angolo DCA* [c] *vguale all'angolo BAD; l'angolo D è commune ad ambidue i triangoli ABD, ACD; ſaranno i due triangoli ABD, ACD equiangoli; per la qual coſa* [d] *haueranno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e perciò ſono frà di loro ſimili, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

a 2. aſſioma.
b 32. del 1.
c 1. aſſioma.
d 4. del 6.

Perche dunque i triangoli ABD, ACD ſono ſimili, ed hanno l'angolo D commune, ſarà BD à DA [e] *come AD à DC, e la retta AD ſarà media proportionale frà le due BD, DC, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.*

e 4. del 6.

In oltre, eſſendo i triangoli ABD, ACD frà di loro ſimili, e l'angolo CAD è vguale all'angolo B; ſarà AB à BD [f] *come AC ad AD; e permutando, AB ad AC* [g] *ſarà come BD à DA, ouero come AD à DC, ch'era da dimoſtrarſi.*

f 4. del 6.
g 16. del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che AD ſia media proportionale frà le due BD, DC. Dico che l'angolo CAD è vguale all'angolo B. Perche AD è media proportionale frà le due BD, DC, ſarà BD à DA come AD à DC; ſi che i triangoli ABD, ACD hanno i lati proportionali intorno all'angolo commune D, e perciò [h] *ſono equiangoli, e gli angoli vguali ſaranno DCA, BAD, che ſono oppoſti à i lati homologhi AD, DB; e ſimilmente gli angoli CAD, DBA, che ſono oppoſti à i lati homologhi CD, DA ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.*

h 6. del 6.

COROLLARIO.

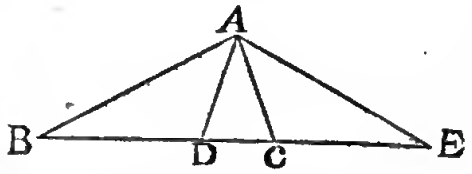
Da quel che s'è detto è manifeſto, che douendoſi inclinare vna retta, come AD, che ſottenda l'angolo eſterno ACD, e che AD ſia media proportionale frà le rette BD, DC, baſta à fare l'angolo CAD vguale all'angolo B.

III.

In qualunque triangolo ABC, del quale l'angolo BAC

ſia

ſia diuiſo in due parti vguali con la retta AD, ed in punto A ſia fatto l'angolo DAE vguale all'angolo ADE; e prolongata la retta AE concorra con BC in qualche punto E. Dico che la retta DE, ouero AE, ſarà media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE ſarà ſimile al triangolo BAE.



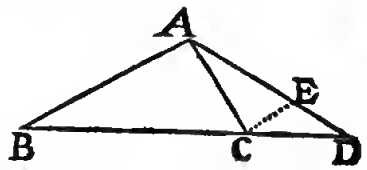
Nel triangolo ABD il lato BD è continuato verſo E; ſarà l'angolo ADE [a] *eſterno vguale à i due angoli DAB, DBA interni, ed oppoſti: ma l'angolo ADE* [b] *è vguale all'angolo DAE; ſarà l'angolo DAE vguale à i due angoli DAB, DBA; ma per ipoteſi, l'angolo DAC è vguale all'angolo DAB; ſarà il rimanente angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente Theorema, ſarà AE media proportionale frà le due BE, EC; ed il triangolo ACE ſarà ſimile al triangolo BAE, ch'era da dimoſtrarſi.*

a 32. del 1.
b 5. del 1.

Di Pappo propoſ. 119, lib. 7.

I V.

Se ſarà qualche triangolo ABC, del quale continuato il lato BC verſo D in modo, che BD à DC ſia come il quadrato di BA al quadrato di AC, tirata la retta AD. Dico che il rettangolo BDC è vguale al quadrato di AD.



Dal punto C ſi tiri la retta CE [a] *parallela ad AB; ſarà il triangolo DEC* [b] *equiangolo al triangolo ABD; e ſarà BD ad AB* [c] *come DC, à CE; e permutando, BD à DC* [d] *ſarà come BA à CE; e preſe le rette AB, EC come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia AB; ſarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE* [e] *come la baſe AB alla baſe CE; cioè* [f] *come BD à DC: ma BD à DC, per ipoteſi, è come il quadrato di AB al quadrato di AC; ſarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, CE, come il medeſimo quadrato di AB* [g] *al quadrato di AC; e perciò il quadrato di AC* [h] *ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AB, CE; donde le tre rette BA, AC, CE* [K] *ſono proportionali; e ſarà AB ad AC come AC à CE. Si conſiderino i triangoli ABC, ACE; eſſendo i lati AB, CE, per coſtruttione, frà di loro paralleli, gli angoli alterni BAC, ECA* [l] *ſono frà di loro vguali. Si diſſe che BA ad AC è come AC à CE; i lati dunque intorno à gli angoli vguali ſono proportionali; e perciò i triangoli ABC, EAC* [m]

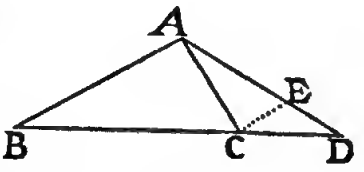
a 31. del 1.
b Corol. alla 4. del 6.
c 4. del 6.
d 16. del 5.
e 1. del 6.
f 11. del 5.
g 11. del 5.
h 9. del 5.
K 17. del 6.
l 29. del 1.
m 6. del 6.

ſono equiangoli; e ſarà l'angolo CAE vguale all'angolo B; e per l'antecedente theorema, la retta AD ſarà media proportionale frà le due BD, DC; ed il rettangolo contenuto dalle due BD, DC ſarà vguale al quadrato di AD, che era da dimoſtrarſi.

Il ſeguente theorema è la conuerſa all'antecedente, la quale dimoſtreremo con Pietro Herigonio nel ſeguente modo.

V.

Se il rettangolo contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; ſarà BD à DC, come il quadrato di AB al quadrato di AC.



Perche il rettangolo cõtenuto dalle due BD, DC è vguale al quadrato di AD;
a 17. del 6. *ſarà AD a media proportionale frà le due BD, DC; e per il ſecondo degli antecedenti theoremi, l'angolo DAC ſarà vguale all'angolo B; il triangolo ACD ſarà ſimile à tutto il triangolo ABD; e la*
b 4. del 6. c 11. del 5. e 8. Lemma dopo la 18. prop. del 6. f 13. del 5. g 10. del 6. *proportione di BA ad AC b ſarà come quella di c BD à DA; ouero di AD à DC. Hor eſſendo AD media proportionale frà le due BD, DC, hauerà BD à DC e duplicata proportione di quella, che hà BD à DA: ma BD à DA è come BA ad AC, hauerà BD à DC f duplicata proportione, che BA ad AC. E perche il quadrato di BA al quadrato di AC g hà la medeſima duplicata proportione, che BA ad AC; ſarà dunque BD à DC come il quadrato di BA al quadrato di AC, come fù propoſto dimoſtrare.*

Dimoſtra Pietro Herigonio il ſeguente Theorema di Pappo propoſ. 154. del lib. 7. nel modo, che ſegue.

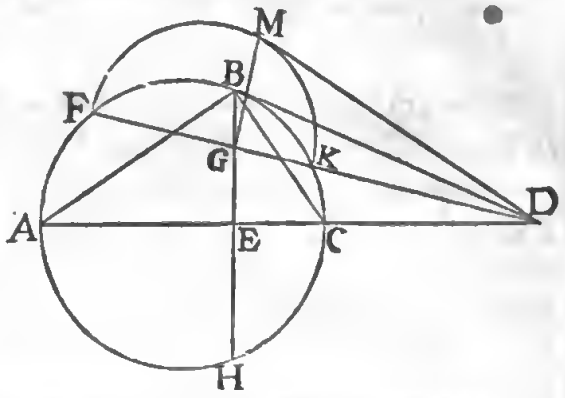
V I.

Se da qualche punto preſo fuori del circolo ſono tirate più rette linee, delle quali vna tocchi il circolo, e le altre lo ſeghino; e dal contatto cada vna retta perpendicolare à quel diametro, che continuato paſſi per il punto preſo; la proportione di tutta la ſegante alla parte eſterna, ſarà come le parti interpoſte frà la perpendicolare, e la circonferenza di eſſo circolo.

Sia il circolo ABC, e da qualche punto D, fuori del circolo, ſiano tirate le rette DB, DF, DA; cioè che DB tocchi il circolo in qualche punto B, e le rette

DF,

DF, DA lo ſeghino; e paſſi la retta D A per il centro del circolo; dal contatto B cada la retta BE, perpendicolare al diametro AC, la quale ſeghi la retta D F in qualche punto G. Dico che AD à DC è come AE ad E C; e che FD à D K è come F G à GK. Si prolunghi BE ſino ad H; ſarà [a] *B E vguale ad E H, ed il rettangolo cõtenuto dalle due BE, E H ſarà vguale al quadrato di BE. Si tirino le rette BA, BC. Perche la retta D B tocca il circolo A B C, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AD, DC* [b] *vguale al quadrato di DB; e per l'antecedente Theorema, AD à DC è come il quadrato di AB al quadrato di BC. In oltre eſſendo l'angolo ABC* [c] *nel mezzo circolo retto, e dall'angolo retto B cade la retta B E perpendicolare ad A C, la retta B E diuide il triangolo ABC* [d] *ne' ſuoi due triangoli ABE, B E C ſimili frà di loro, e ſimili à tutto il triangolo ABC; e per il primo Corollario all'ottaua propoſitione di queſto, ſarà BE media proportionale frà le due AE, EC; e perciò la proportione della prima AE alla terza EC* [e] *è duplicata di quella, che hà la prima AE alla ſecõda EB: mà il quadrato di A E al quadrato di EB* [f] *hà la medeſima duplicata proportione, che hà AE ad EB; hauerà il quadrato di AE al quadrato di E B l'iſteſſa proportione, che hà AE ad EC. Di più, eſſendo i triangoli ABC, AEB frà di loro ſimili, ſarà AB à BC,* [g] *come AE ad EB; ed il quadrato di AB al quadrato di BC* [h] *ſarà come il quadrato di AE al quadrato di EB; fù dimoſtrato il quadrato di AB al quadrato di BC eſſere come AD à DC; ed il quadrato di AE al quadrato di EB, come AE ad EC; ſarà dunque* [k] *AD à DC come AE ad EC; ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*



Di nuouo dico che FD à D K è come FG à G K. Sopra la retta F K ſi deſcriua il mezzo circolo F M K; nel punto G [l] *ſi erigga la retta GM, perpendicolare alla retta F K; e ſi tiri la retta D M. La retta H B è diuiſa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in G, il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di EG,* [m] *è vguale al quadrato di EB; vgualmente ſi aggiunga il quadrato di E D; ſarà il rettangolo delle due H G, G B, con li due quadrati GE, E D, cioè* [n] *col quadrato di GD, vguali à i quadrati de i due lati BE, ED, cioè* [o] *vguali al quadrato di BD: mà il quadrato di BD* [p] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due AD, DC, cioè al rettangolo* [q] *delle due FD, DK; ſarà il rettangolo contenuto dalle due HG, GB, col quadrato di GD, vguale al rettangolo contenuto dalle due FD, DK; e perche il rettangolo delle due HG, GB* [r] *è vguale al rettangolo contenuto dalle due FG, GK; ed il rettangolo delle due FG, GK* [s] *è vguale al quadrato di GM (ſtante che GM è media proportionale frà le due FG, G K) ſaranno i quadrati de i due lati MG, GD, cioè* [u] *il quadrato di MD, vguale al rettangolo contenuto dal-*

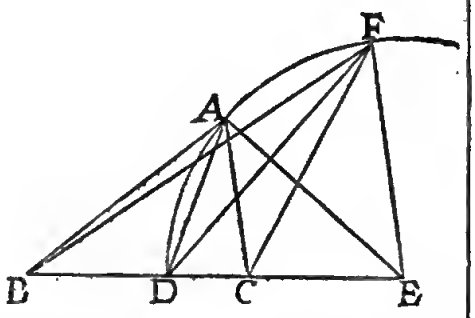
le

a 3. del 3.
b 36. del 3.
c 31. del 3.
d 8. del 6.
e Lemma 8. dopo la 18. prop. del 6.
f 20. del 6.
g 4. del 6.
h 22. del 6.
k 11. del 5.
l 12. del 1.
m 5. del 2.
n 47. del 1.
o 47. del 1.
p 36. del 3.
q Corol. alla 36. del 3.
r 35. del 3.
s 17. del 6.
u 47. del 1.

a 17. del 3. *le due FD, DK: per la qual cosa la retta DM a tocca il circolo nel punto M: mà per costruttione, dal contatto M cade la retta MG perpendicolare al diametro FK, per quel che si è dimostrato nella prima parte, la proportione di FD à DK è come quella di FG à GK, come fù proposto dimostrare.*

VIII.

Se sarà qualunque triangolo ABC, del quale sia cõtinuato il lato BC verso E, e dal punto A sia inclinata la retta AE in modo, che AE sia media proportionale frà le due BE, EC, e fatto centro in E, coll'interuallo EA, si descriua il circolo DAF; preso nella circonferenza DAF qualunque punto F, dal quale à i punti B, D, C, si tirino le rette FC, FD, FB. Dico che l'angolo BFD è vguale all'angolo DFC.



Si tiri la retta EF; perche le rette EA, EF sono frà di loro vguali, e la retta EA, per ipotesi, è media proportionale frà le due BE, EC; sarà la retta EF media proportionale fra le due BE, EC, e per il secondo de gli antecedenti Theoremi, l'angolo EFC sarà vguale all'angolo FBC. Nel triangolo FBD, il lato BD è continuato verso E, e perciò

a 32. del 1. b 5. del 1. *l'angolo EDF a esterno è vguale à i due angoli DFB, DBF interni, ed opposti: mà l'angolo EDF è vguale all'angolo EFD (stante che le rette EF, ED b sono frà di loro vguali) sarà l'angolo EFD vguale à i due angoli DBF, DFB. Fù dimostrato l'angolo EFC vguale all'angolo DBF; sarà il rimanente angolo CFD vguale al rimanente angolo DFB. E perche il punto F è preso ad arbitrio, perciò da qualunque altro punto preso nella circonferenza DAF, tirate rette linee à i punti B, D, C sempre saranno angoli vguali nel punto F; ch'era da dimostrarsi.*

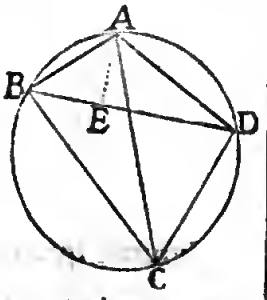
COROLLARIO.

Dà quel, che s'è detto, è manifesto, che se nella circonferenza DAF sia preso qualunque punto F, dal quale siano tirate à i punti B, D, C, le rette FB, FD, FC, sempre la proportione di BF ad FC sarà come quella di BD à DC; e questo perche l'angolo BFC sarà sempre diuiso dalla retta FD in due parti vguali.

Di Tolomeo nel libro 1. del ſuo Almageſto.

VIII.

Se dentro d'vn circolo ſia deſcritto qualunque quadrilatero, i rettangoli contenuti da i lati oppoſti, giunti inſiéme, ſono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali di eſſo quadrilatero.



Nel circolo ABCD ſia iſcritto qualunque quadrilatero ABCD, e le diagonali ſiano le rette AC, BD. Dico che il rettangolo contenuto da i due lati BC, AD, col rettangolo contenuto da i due lati AB, DC, è vguale al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD. Nel punto A, ſopra la retta AB, ſi faccia l'angolo BAE, [a] vguale all'angolo CAD; e ſi continui AE ſino che ſeghi il lato BD in qualche punto E. Si conſiderino i triangoli AEB, ACD, de' quali l'angolo BAE, per coſtruttione, è vguale all'angolo CAD; gli angoli ABE, ACD [b] nella medeſima portione, ſono frà di loro vguali; e perciò il rimanente angolo ADC [c] è vguale al rimanente angolo AEB, ed i triangoli AEB, ADC ſono equiangoli. Di nuouo, eſſendo l'angolo EAB vguale all'angolo CAD, s'aggiunga all'uno, ed all'altro il commune angolo EAC, ne viene tutto l'angolo BAC vguale all'angolo EAD: mà gli angoli ADE, ACB, [d] nella medeſima portione, ſono frà di loro vguali; ſarà il terzo angolo AED [e] vguale al rimanente angolo ABC; ed il triangolo AED ſarà equiangolo al triangolo ABC; e la proportione di AD, à DE [f] ſarà come quella di AC à CB; dalche il rettangolo delle eſtreme AD, BC [g] è vguale al rettangolo contenuto dalle medie AC, ED. Similmente, eſſendoſi dimoſtrato il triangolo AEB equiangolo al triangolo ACD, la proportione di AB à BE [h] ſarà come quella di AC à CD; ed il rettangolo contenuto dalle eſtreme AB, DC, [K] ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BE, AC: mà ſi è dimoſtrato, che il rettangolo contenuto dalle due ED, AC, è vguale al rettangolo delle due AB, BC; ſaranno i rettangoli, cioè vno contenuto dalle due AD, BC, e l'altro contenuto dalle due AB, DC, inſieme giunti, vguali à i due rettangoli, cioè vno contenuto dalle due BE, AC, e l'altro contenuto dalle due ED, AC; mà i rettangoli contenuti da AC, ED, e dalle due AC, EB, [l] ſono vguali à tutto il rettangolo contenuto dalle due AC, BD; i rettangoli dunque contenuti da i lati oppoſti, cioè il rettangolo contenuto da i due lati AD, BC, ed il rettangolo contenuto da i lati AB, DC, giunti inſieme, ſono vguali al rettangolo contenuto dalle diagonali AC, BD, come ſù propoſto dimoſtrare.

[a] 23. del 1.
[b] 21. del 3.
[c] 32. del 1.
[d] 21. del 3.
[e] 32. del 1.
[f] 4. del 6.
[g] 16. del 6.
[h] 4. del 6.
[K] 16. del 6.
[l] 1. del 2.

Fine del Seſto Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO SETTIMO.

DEFINITIONI.

I.

L'vnità è quella, ſecondo la quale ciaſcheduna delle coſe, che ſono, ſi dice vna, ouero vno.

II.

Il numero è moltitudine compoſta di vnità.

ACCIOCHE *ſi faccia diſtintione dal proferire qualche coſa, ch'è conſiderata ſola, e ſeparata dall'altre, al proferirne più inſieme; è vſo commune, quella, la quale è conſiderata ſola, eſprimere con queſta voce, Vna, ouero Vno; come quando ſi proferiſce vn huomo, vna naue, vna linea &c. Hor queſta particola Vna, ouero Vno (con che s'eſprime la coſa nominata eſſer ſola) è quella, ch'Euclide chiama, vnità, la quale ſi ſegna con queſta nota* 1. *ſi che in luogo di notare vn huomo, vna pietra, vna ſuperficie &c. ſi eſporrà* 1. *huomo*, 1. *pietra*, 1. *ſuperficie &c. E notiſi che l'vnità, nella quantità diſcreta, è indiuiſibile, come è indiuiſibile il punto nella quantità continua; con queſta differenza, che l'vnità è principio della quantità diſcreta, ed il punto non è principio della quantità continua, ma termine della quantità continua: cioè la quantità diſcreta comincia con l'vnità, e la quantità continua comincia dal punto.*

Le coſe poi, che ſono più d'vna, per proferirle con voci diſtinte da quelle, che ſono conſiderate ſole, volgarmente ſi dicono eſſere molte; e queſta pluralità, ò compoſto di più vnità, ſi chiama Numero. Notiſi però, che queſta voce Numero è nome generico à tutte le moltitudini di qual ſi ſia grandezza; ſi che tanto ſe la moltitudine ſarà compoſta di due vnità, quanto s'è compoſta di tre vnità, quanto s'è compoſta di quattro, ò più vnità, ſempre quella moltitu-

dine

dine ſi chiama numero : è ben vero che , ſe quella moltitudine è compoſta di dne ſole vnità , s'eſprime con queſta voce numero dne, e ſi ſegna con la ſeguente nota 2. ſe ſarà compoſta di tre vnità , ſi dice nnmero tre , e ſi nota col ſegnente carattere 3. s'è compoſta di quattro vnità ſi dice numero quattro , e ſi nota 4. s'è di cinque vnità , ſi dicè numero cinque, e ſi nota 5 ; e con queſt'ordine il numero ſei ſi nota 6; il numero ſette ſi nota 7; il numero otto ſi nota 8; e s'è compoſta di nouc vnità ſi dice numero noue , e ſi nota 9. Queſti eſpoſti numeri , come anco l'vnità , e la nota o (che ſi chiama zero , la qual voce ſignifica nulla) cioè 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. ſi chiamano Digiti , co'i quali ſi compongono gli altri numeri , come i notati 10. 11. 12. &c. 20. 21. 22. 23. &c. 30. 31. 32. &c.

Perche dunque s'è detto che il numero è vna moltitndine compoſta di vnità, e l'vnità è indiniſibile , perciò la minima parte di qualunque numero ſarà l'vnità : per la qual coſa il numero hanerà tante minime parti , per quante ſono le vnità , che lo compongono . Per eſempio il numero 7 , il quale è compoſto di ſette vnità , ſi dinide in ſette minime parti, e ciaſcheduna ſi dice eſſere la ſettima parte di eſſo numero; ſimilmente il nnmero 60, ch'è compoſto di ſeſſanta vnità, ſi dinide in ſeſsãta parti minime, e ciaſcheduna di quelle ſi dice eſſere la ſeſſanteſima parte di eſſo numero: ed il ſimile s'intẽde di tutti gli altri numeri.

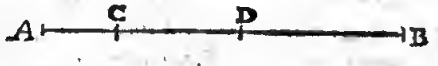
Ogni nnmero dnnque ſi riſolue nelle ſne vnità , e l'vnità miſura tante volte quel nnmero , per quante ſono l'vnità , che lo compongono : dal che l'vnità è miſura commune di tutti i numeri , e per conſeguenza tutti i numeri ſono frà di loro commenſurabili ; ſtante che le quantità ſi dicono commenſurabili, quando hanno vna commune miſura , cioè quando l'vna è l'altra è miſurata giuſtamente da vna terza quantità , che ſi chiama commune miſnra , come à ſuo luogo più chiaramente ſi ſpiegherà .

Ogni quantità , sì continua , come diſcreta , può eſſere conſiderata come vnità , la qualc è ſempre indiniſibile . Per eſempio , la linea B conſiderata come vna ſola , per quel che s'è detto , ſarà denominata dall'vnità : e benche l'vnità ſia indiuiſibile , non è per queſto , che la linea B, per eſſere denominata dall'vnità , cioè conſiderata come vna , debba eſſere indiniſibile , ſtante che non la linea B è vnità , mà ben ſi la linea B è quella coſa , che chiamiamo vna; e perciò la linea B come quantità continua è diuiſibile , e l'vnità è ſempre indiuiſibile . Si che dinidendoſi la linea B , non per qneſto ſi diuide l'vnità ; mà ſi diuide quella coſa , che chiamiamo vna . E per maggior chiarezza , ſiano eſpoſte le linee A , B , frà di loro ineguali ; perche la linea A è vna ſola , perciò ſarà denominata dall'vnità . E ſimilmente eſſendo la linea B vna ſola, ſarà anco denominata dall'vnità ; ſi pongano inſieme queſte due vnità , ne viene il nnmerò 2. che denota le linee A , & B in moltitudine eſſere due . Donde è manifeſto , che nella quantità diſcreta non s'attende all'vgnalità , ò inegualità delle coſe , che ſi nnmerano , mà alla moltitudine di eſſe ; e perciò non ſi deue dire , che vna vnità è maggiore , ò minore dell'altra ; mà ben ſi le coſe che ſi dicono vna , ouero vno , poſſono eſſere vguali , e poſſono ancora eſſere ineguali . Dal che la coſa la quale è chiamata vna , non è vnità , mà è denomi-

B

A B

nata dall'vnità ; cioè è conſiderata come vna ſola , e ſeparata dall'altre . Similmente s'intenda diuiſa la linea AB in quante ſi voglia parti AC, CD, DB. Perche AC è vna ſola parte , perciò ſarà denominata dall'vnità; e per l'iſteſſa ragione C D ſarà denominata dall'vnità , come ancora DB. E conſiderando AD come vna ſola linea, ſarà AD conſiderata come vnità . Parimente la linea CB , conſiderata come vna , ſarà denominata dall'vnità , e l'iſteſſo s'intende di tutta la linea AB . Hor ſe ciaſcuna delle linee AC, CD, DB, AD, CB, AB, è conſiderata come vna, cioè come vnità ; poſte inſieme queſte vnità compongono il numero 6 , che denota il numero delle linee , che ſi contano in A B , eſſere compoſto di ſei vnità , ſenza che s' habbia riguardo all'inegualità delle dette linee ; mà ſi hà ſolo conſideratione alla di loro moltitudine . Quindi è (come ſopra ſi diſſe) che la coſa , conſiderata come vnità , s'è diuiſibile per ſua natura , ſi diuide in tutte le ſue parti , e l'vnità reſta ſempre intatta , e libera da qualunque diuiſione .



In oltre ſe le parti AC, CD, DB ſono frà di loro vguali , ſarà AC vna terza parte di tutta la linea AB, che ſi nota $\frac{1}{3}$: mà la parte AC ſù conſiderata come vnità , ne ſegue $\frac{1}{3}$ ancora poterſi conſiderare come vnità ; il medeſimo s'intende ſe AC foſſe la quarta , ò quinta , ò altra parte di A B . Di più perche AC è la terza parte di AB, e CD è ancora la terza parte di AB; ſarà AD i due terzi di AB , che ſi notano $\frac{2}{3}$: mà AD ſù conſiderata come vnità , li $\frac{2}{3}$ dunque ſi poſſono conſiderare come vnità ; ed il medeſimo s'intende di tutti gli altri rotti , auuertendo ſempre , che quando ſi dice $\frac{1}{3}$, ò $\frac{1}{4}$, ouero $\frac{1}{5}$ &c. non s'intende eſſere la terza , ò quarta , ò quinta parte dell'vnità , mà ben ſi è la terza , ò quarta , ò quinta parte di quella coſa , che conſideriamo eſſere vna ſola .

Finalmente ſia eſpoſto qualunque numero, come per eſſempio 10 , il quale è compoſto di diece vnità . Perche eſſo numero 10 ci rappreſenta eſſere vna decina , per queſta voce Vna lo poſſiamo conſiderare come vnità . Hor eſſendo il numero 10 compoſto di dieee vnità , non ſarà eſſo numero 10 l'vnità ; mà ben ſi eſſo numero 10 ſarà quella coſa, che chiamiamo vna . Si che diuiſo il numero 10 nelle ſue vnità , ò in altre parti poſſibili , non ſarà diuiſa l'vnità , mà ſarà diuiſa quella coſa , che chiamiamo vna . Ed il medeſimo ſi deue intendere di tutti gli altri numeri conſiderati come vnità .

Si conchiude dunque , che l'vnità non è numero , mà principio , e fondamento del numero ; ſtante che , eſſendoſi definito il numero eſſere vna moltitudine compoſta di vnità , è neceſſario che ſiano più vnità inſieme acciòche formino il numero . Di più , che la coſa la quale chiamiamo vna , ouero vno, non è vnità ; mà l'vnità è quella ſingolarità , ſecondo la quale nominiamo quella coſa da per sè eſſere vna ſola ; e perciò quella coſa , che ſi diee vna , ouero vno, può eſſere diuiſibile nelle ſue parti ; e l'vnità , ſecondo la quale ciaſcheduna delle coſe , che ſi dicono vno , ò vna , è ſempre indiuiſibile : oltre à ciò ogni quantità , ſi continua , come diſcreta , può eſſere conſiderata come vnità ; e queſto non ſolo accade negl'intieri , mà ancora ne' rotti ; e finalmente tutti i numeri ſono commenſurabili , ſtante che tutti ſono miſurati dall'vnità .

III.

Il numero minore è parte del maggiore, quando misura il maggiore giustamente.

Il numero minore si dice misurare il numero maggiore giustamente, quando detratto il minore dal maggiore, e da quel che resta, se ne detrae il medesimo numero minore, e dall'auanzo se ne leua di nuouo il minore, e con quest'ordine sempre da ogn'auanzo se ne detrae il minore, finalmente nell'vltima detrattione non resta cos'alcuna; come per essempio: Sia il numero minore 3, ed il maggiore sia 12, sottraendo dal maggiore 12 il minore 3, resta il numero 9; da questo se ne detragga il minore 3, resta 6; e da questo se ne leui il minore 3, resta 3; e finalmente leuato da questo auanzo il minore 3, non resta cos'alcuna; in tal caso il numero minore 3 si dice misurare giustamente il numero maggiore 12: ed il simile s'intende di tutti gli altri numeri. Quando poi dalla continua sottrattione nel modo, che antecedentemente s'è fatto, resta qualche numero composto di minor moltitudine d'vnità di quelle, che sono nel numero minore, all'hora il numero minore non si può sottrarre da quell'auanzo; ed in tal caso il numero minore non si dice misurare giustamente il maggiore; come se il numero minore fosse 5, ed il maggiore 13, detratto dal numero maggiore 13 il minore 5, resta 8; e detratto da questo auanzo il minore 5, resta 3: e perche da questo auanzo non se ne può sottrarre il minore 5, perciò il numero 5 non misura giustamente il maggiore 13: e l'istesso s'intende de gli altri numeri. Hor Euclide in questa definitione spiega, che all'hora il numero minore si dice esser parte del numero maggiore, quando il minore misura giustamente il maggiore; come per essempio, il numero minore 4, il quale misura giustamente il maggiore 28 sette volte, e non auanza cos'alcuna, si dice esser parte del numero 28. E nell'istesso modo ciascuno de'i numeri 2. 3. 4. 6. 12 sarà parte del numero 24, stante che il 2 misura il 24 dodici volte; il 3 misura il medesimo 24 giustamente otto volte; il 4 lo misura sei volte; ed il numero 6 lo misura quattro volte; ed il numero 12 lo misura giustamente due volte. Il medesimo s'intende di tutti gli altri numeri.

Notisi che la parte prende il nome dal numero, secondo il quale il minore misura il maggiore, cioè se il minore misura il maggiore due volte, si dice il minore essere la metà del maggiore; se il minore misura il maggiore tre volte, si dice essere la terza parte del maggiore; se lo misura quattro volte, si dirà essere la quarta parte del maggiore, e con questo ordine in infinito.

IV.

Il numero minore si dice esser parti del maggiore, quando il minore non misura giustamente il maggiore.

Due casi possono succedere in due dati numeri ineguali; cioè, ò che il minore misuri giustamente il maggiore, ouero che non lo misuri giustamente; ma che sopravanzi qualche cosa. Se il numero minore misura giustamente il maggiore, per quel che s'è detto nell'antecedente definitione, il minore si dice esser parte del maggiore; ma se non lo misura giustamente, vuole Euclide ch'il minore si dica esser parti del maggiore. Per essempio, siano esposti i numeri 3,

& 7; perche il numero minore 3 non misura giustamente il maggiore 7, si dirà il minore 3 essere parti del 7, cioè essere tre di quelle parti, delle quali nel maggiore ne sono sette. Similmente se il minore fosse 9, ed il maggiore 11, si direbbe il minore essere noue di quelle parti, che nel maggiore sono vndeci: ed il simile s'intenda negli altri.

V.

Il numero maggiore è multiplice del minore, quando è misurato dal minore giustamente.

Quando il numero minore misura giustamente il numero maggiore; se si fà la comparatione dal minore al maggiore, si dice il minore esser parte del maggiore, come fù spiegato nella definitione terza; e se si farà la comparatione dal maggiore al minore, si dirà il maggiore essere multiplice del minore.

V I.

Il numero paro è quello, che si diuide in due parti vguali.

Tutti i numeri, che si possono diuidere giustamente in due parti vguali, si dicono numeri pari; come i numeri 4, 8, 10, 20, 50, 100, 1000 &c. i quali si dicono numeri pari, stante che ogn'vno si diuide giustamente in due parti vguali, e le loro metà sono 2, 4, 5, 10, 25 50, 500.

V I I.

Numero disparo è quello, che non si diuide in due parti vguali; ouero, è quello ch'è differente dal numero paro per vna vnità.

A distintione del numero pari, chiama Euclide numero disparo quello, che non si diuide in due parti vguali, ouero ch'è differente dal numero paro per vna sola vnità; come sono i numeri 3, 5, 7, 9, 11, 15, 47, 101. 1001, i quali sono differenti da i seguenti numeri pari 2, 4, 6, 8, 10, 14, 46, 100, 1000, ouero 4, 6, 8, 10, 12, 16, 48, 102, 1002 per quanto è vna sola vnità.

V I I I.

Numero parimente paro è quel numero, ch'è misurato da vn numeto paro, per volte pari; cioè per vn numero paro.

Siano esposti i numeri 64, e 32, questi, secondo la definitione d'Euclide, sono ambidue numeri parimente pari, stante che il numero 64 è misurato dal 4, ch'è numero pari, sedici volte, cioè per il numero pari 16; e similmente il numero 32 è misurato dal numero paro 8 quattro volte, cioè per il numero paro 4.

Nume-

IX.

Numero parimente diſparo ſi chiama quello, ch'è miſurato da vn numero paro per numero diſparo.

Sia eſpoſto il numero 30, il quale è miſurato dal numero paro 6 per il numero diſparo 5; e queſto numero 30, ſecondo l'antecedente definitione, ſi chiama numero parimente diſparo. Il medeſimo ſi deue intendere d'ogn'altro numero, che hauerà le medeſime conditioni.

E d'auuertirſi che ſi trouano de i numeri come il 20, il 24, e ſimili, i quali hanno le medeſime conditioni d'ambedue l'antedette definitioni, cioè ſono numeri parimente pari, ed ancora parimente diſpari. ſtante che il numero 20 è miſurato dal numero paro 2, per il numero paro 10, e per l'ottaua definitione il numero 20 è numero parimente paro: e perche il medeſimo numero paro 20 è miſurato dal numero paro 4 per il numero diſparo 5, per quel che prima s'è detto, il numero 20 ſarà numero parimente diſparo. Il medeſimo ſuccede al numero 24, il quale è miſurato dal numero paro 4 per il numero paro 6; ed ancora è miſurato dal numero paro 8 per il numero diſparo 3, e benche alcuni Commentatori hanno ſtimato, che ſimili numeri non ſiano parimente pari, ne meno parimente diſpari, con tutto ciò vniformandomi con l'interpretatione del P. Clauio, dico che ſimili numeri ſono parimente pari, ed ancora parimente diſpari; ſtante che ſe Euclide haueſſe voluto eſcludere queſti dal ſignificato, e conditioni del numero parimente paro, non haurebbe definito il numero parimente paro eſſer quello, ch'è miſurato da vn numero paro per numero paro, mà hauerebbe detto numero parimente paro è quello, del quale tutti i numeri, che lo miſurano, ſono numeri pari; ed in tal caſo hauerebbe eſcluſi da queſti i numeri 20, 24, e ſimili: mà hauendo fatta la definitione più generica, dobbiamo ſenza dubio ſtimare, ch'Euclide non habbia eſcluſo da i numeri parimente pari i numeri 20, 24, e ſimili, e coſi diremo; che i numeri 20, 24, e ſimili, ſono numeri parimente pari, e ſono ancora numeri parimente diſpari.

X.

Numero diſparimente diſparo è quel numero, ch'è miſurato dal numero diſparo per vn numero diſparo; ouero è quel numero, del quale tutti i numeri, che lo miſurano, ſono numeri diſpari.

Quando tutti i numeri, che miſurano vn numero, ſono numeri diſpari, quello ſi dice numero diſparimente diſparo. Per eſſempio ſia eſpoſto il numero diſparo 135. il quale è miſurato da i ſeguenti numeri diſpari 3, 5, 9, 15, 27, 45, cioè è miſurato dal 3. per il numero 45, è miſurato dal 5, per il numero 27, & è miſurato dal 9, per il numero 15, i quali tutti ſono numeri diſpari; in tal caſo il numero 135, ò altro, che habbia le medeſime conditioni, ſi chiama numero diſparimente diſparo.

X I.

Primo numero è quello, ch'è miſurato ſolamente dall' vnità.

Tutti i numeri, che non poſſono eſſere miſurati giuſtamente da altri numeri, cioè che non ſono numeri parimente pari, ne parimente diſpari, ne meno diſparimente diſpari, mà che poſſono eſſere miſurati ſolamente dall'vnità, ſi dicono numeri primi: come ſono i ſeguenti 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 &c. Notiſi però, che niſſun numero miſura il numero primo, eccettuatone, che ſi miſuri da ſe medeſimo; come il numero 2 è miſurato dal medeſimo 2; il 3 è miſurato dal medeſimo 3; mà niſſun altro numero lo può miſurare, e l'iſteſſo ſi deue intendere di tutti gli altri numeri primi.

X I I.

Quei numeri ſi dicono eſſere frà di loro primi, de' quali la commune miſura è ſolamente l'vnità.

Si come, quando vn numero è miſurato dalla ſola vnità, ſi dice numero primo; coſi quando due, ò più numeri, hanno per commune miſura la ſola vnità, ſi dicono eſſere frà di loro primi. Per eſſempio ſiano eſpoſti i numeri 4, e 9; benche il numero 4 ſia miſurato dal 2, ed il numero 9 ſia miſurato dal 3 contutto ciò, non potendo il numero 3 miſurare ambidue i numeri 4, e 9, e ne meno il 2 può miſurare ambidue eſſi numeri 4 & 9; tanto il numero 3, come il numero 2, non ſarà commune miſura de i numeri 4, e 9; mà ben ſi la commune miſura ſarà ſolamente l'vnità: ed in tal caſo i numeri 4, e 9 ſi chiamano numeri frà di loro primi. Similmente i numeri 5, 8, 21, ſono frà di loro primi, ſtante che la di loro commune miſura è ſolamente l'vnità; e l'iſteſſo s'intende di tutti gli altri, che hanno per commune miſura ſolamente l'vnità.

X I I I.

Numero compoſto è quello, ch'è miſurato da qualche numero.

Perche ogni numero è miſurato dall'vnità, e non tutti ſono miſurati da altri numeri, perciò Euclide, volendo fare diſtintione frà il numero, ch'è miſurato dalla ſola vnità, e quello, ch'oltre l'eſſere miſurato dall'vnità, è ancora miſurato da qualche numero; chiama numero primo quello, ch'è miſurato dalla ſola vnità; e numero compoſto chiama quello, il quale non ſolo è miſurato dal vnità, mà ancora da qualche numero: come il numero 24, il quale, oltre che è miſurato dall'vnità, è ancora miſurato da tutti i numeri ſeguenti 2. 3. 4. 6. 8. 12. Parimente il numero 15 è miſurato dall'vnità, ed ancora da i ſeguenti numeri 3. & 5; e queſti numeri 24 & 15, come ancora altri, che ſono miſurati da qualche numero, ſi dicono numeri compoſti. E notiſi, che tutti i numeri parimente pari, parimente diſpari, e diſparimente diſpari, ſono numeri compoſti.

X I V.

Quei numeri ſi dicono frà di loro compoſti, i quali hanno per commune miſura qualche numero.

Il numero, che miſura giuſtamente due, ò più numeri, ſi chiama commune miſura de i numeri miſurati, come altroue ſi diſſe. Per eſſempio, i numeri 9, & 12, ſono ambidue miſurati giuſtamente dal numero 3: poiche il 3 miſura il 9 tre volte, e miſura il 12 quattro volte; e ſecondo quel, che s'è detto, il numero 3 ſarà commune miſura de i due 9, & 12; e coſi per gli altri. Hor perche i numeri 9, & 12, hanno per commune miſura il numero 3, eſſi numeri 9, & 12, ſi chiameranno numeri frà di loro compoſti. E ſimilmente i numeri 25, & 40 ſono frà di loro compoſti, ſtante che la loro commune miſura è il numero 5; ed i numeri 7, 28, 35, ſi dicono ancora frà di loro compoſti à cauſa, che il numero 7 è loro commune miſura.

X V.

Vn numero ſi dice multiplicare vn altro numero, quando ſi prende tante volte il numero multiplicato, per quante vnità ſono nel multiplicante; e quel numero compoſto ſi chiama Prodotto.

Quando vn numero ſi multiplica per vn'altro numero, quello, che multiplica, ſi chiama multiplicante, e l'altro ſi dice numero multiplicato. Siano dunque eſpoſti i numeri 5, & 9; ſia 5 il multiplicante, ed il numero multiplicato ſia 9: perche nel multiplicante ſono cinque vnità, prendendo il numero 9 cinque volte, il compoſto di queſte cinque volte il 9 ſarà 45; e coſi diremo che il 9 ſi è multiplicato per il 5, ed il prodotto è 45. All'incontro ſe porremo il 9 come numero multiplicante, ed il 5 ſarà il numero multiplicato; eſſendo nel multiplicante noue vnità, ſi prenderà noue volte il numero multiplicato 5, che ſimilmente produrrà il numero 45; e diremo, ch'il numero 5 s'è multiplicato per il numero 9, ed il prodotto è 45. E queſto intende Euclide per la voce Multiplicare, cioè trouare vn numero, che ſia compoſto di tante volte il numero multiplicato, per quante vnità ſono nel numero multiplicante.

All'antecedente definitione ſi può aggiungere la ſeguente.

Diceſi diuidere vn numero per vn altro numero, quando ſi troua vn numero compoſto di tante vnità, per quante volte il diuiſore miſura il numero diuiſo; e quel numero trouato ſi chiama Quotiente.

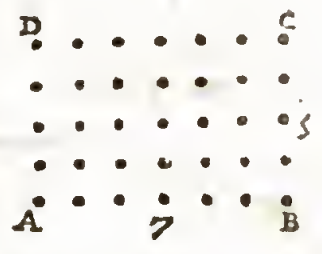
Siano eſpoſti due qualunque numeri, come 7, & 21; all'hora il numero 7 ſi dice diuidere il numero 21, quando ſi troua vna quantità, nella quale ſiano tante vnità, per quante volte il numero 7 miſura il numero 21. E perche

il

il 7 misura il numero 21 tre volte, il numero 3, in questo essempio, sarà quello, nel quale sono tante vnità, per quante volte il 7 misura il 21; ed il numero 3 sarà quello, che si chiama Quotiente. Notisi che quel numero, che diuide, si chiama diuisore, e l'altro si chiama numero diuiso; come per essempio hauendosi à diuidere il numero 32 per 8, perche il numero 8 è quello, che diuide, perciò il numero 8 si chiamerà diuisore, ed il numero 32 sarà il numero diuiso. Si veda dunque quante volte il numero 8 misura il 32, e trouaremo quattro volte, e così il numero 4 sarà il quotiente; cioè sarà quello, che indica essere di tante vnità, per quante volte il diuisore misura il numero diuiso.

XVI.

Quando due numeri, multiplicandosi scambieuolmente frà di loro producono, altro numero, quel prodotto si dice numero piano, ed i numeri multiplicati si chiamano lati di quel piano.



Siano due qualunque numeri AB, BC, le vnità de' quali siano disposte in lunghezza, e larghezza con vguali distanze, rappresenteranno vn parallelogrammo rettangolo, come il notato ABCD, i di cui lati saranno i dati numeri AB, BC, ed il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, saranno l'vnità, che occupano il piano ABCD. Quindi è, ch' Euclide definisce il numero piano esser quello, ch'è prodotto dalla multiplicatione di due numeri, e quei due numeri, multiplicati scambieuolmente frà di loro, gli chiama lati di quel piano. Quando dunque nelle cose auuenire si dirà il prodotto contenuto da vn numero in vn altro numero, si concepirà vn parallelogrammo rettangolo, formato dalla dispositione delle vnità, che sono nel prodotto con vguali distanze, tanto in lunghezza, come in larghezza, ed i numeri multiplicati saranno i lati di esso prodotto.

Benche i numeri piani possano essere infiniti, cioè possano formare innumerabili figure piane, come triangolari, pentagonali, &c. con tutto ciò Euclide s'è contentato di parlare solamente di quei numeri piani, che formano le figure parallelogramme rettangole, tralasciando l'altre come non necessarie al suo fine: di questi numeri però, come triangolari, pentagonali, esagonali, &c. ne parleremo nell' Aritmetica pratica, e qui proseguiremo la spiegatione delle sole cose poste da Euclide.

Perche il numero, che forma il piano rettangolo ABCD, cioè il prodotto fatto dalla multiplicatione di AB in BC, per la 15. definitione, è composto di tante volte il numero delle vnità, che sono in BC, per quante vnità sono in AB, perciò il numero BC misura tante volte il numero piano ABCD, per quante vnità sono nel lato AB. Similmente, essendo il numero piano ABCD, per la 15. definitione di questo, composto di tante volte il numero AB, per

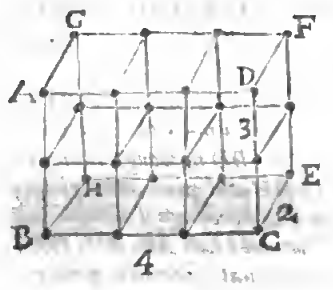
quante

quante vnità ſono in BC, tante volte il numero AB miſurerà il numero piano ABCD, per quante vnità ſono nel lato EC; la onde per quel, che ſi diſſe nella 15. definitione, diuidendo il numero piano ABCD per le vnità, che ſono in BC, cioè per il numero, che rappreſenta il lato EC, il quotiente ſarà il lato AB: ed all'incontro, diuiſo il numero piano ABCD per il lato AB, il quotiente ſarà il lato BC.

XVII.

Quando tre numeri, multiplicandoſi ſcambieuolmente frà di loro, producono vn altro numero, quel numero prodotto ſi chiama numero ſolido, ed i numeri multiplicati ſi dicono eſſer lati di quel numero ſolido.

Siano i tre numeri BC, CE, CD, le di cui vnità ſiano diſpoſte con vguali diſtanze in lunghezza, larghezza, ed altezza in modo, che il prodotto fatto da i due BC, CD, formi il piano rettangolo ABCD; ed il prodotto de i due DC, CE faccia il piano rettangolo DCEF; come anco il prodotto de i due BC, CE formi il piano rettangolo BCEH, ſarà fatto tutto il ſolido GBCF contenuto da ſei piani rettangoli; e perciò le vnità del prodotto fatto dalla multiplicatione de i tre numeri BC, CD, CE, diſpoſte con vguali diſtanze il lunghezza, larghezza, e profondità, formeranno il ſolido GBCF. Quindi è, ch' Euclide definiſce il numero ſolido eſſer quello, ch'è prodotto dalla ſcambieuole multiplicatione di tre numeri frà di loro; cioè dalla multiplicatione del primo nel ſecondo, ed il prodotto nel terzo; ed i numeri BC, CD, CE, multiplicati ſi chiamano lati del prodotto numero ſolido. Qui ancora Euclide, tralaſciando ogn'altro numero ſolido, hà definito ſolamente quelli, che ſono contenuti da piani rettangoli, le di cui faccie oppoſte ſono parallele; e perciò nelle coſe, che ſeguono, quando ſi dirà il numero ſolido contenuto dal prodotto fatto dalla multiplicatione di tre numeri frà di loro, doueremo concepire le vnità del prodotto talmente diſpoſte in lunghezza, larghezza, e profondità, che formino vna figura come la notata GBCF, i dui cui lati vengano rappreſentati dalle vnità de i numeri multiplicati.

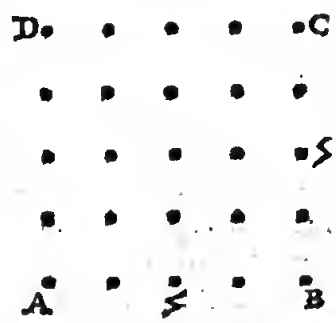


XVIII.

Numero quadrato è quello, ch'è vgualmente vguale, cioè ch'è contenuto da due numeri vguali.

Definiſce Euclide il numero quadrato eſſer quello, ch'è vgualmente vguale; cioè che le ſue vnità formano vn piano d'vguale lunghezza, e larghezza,

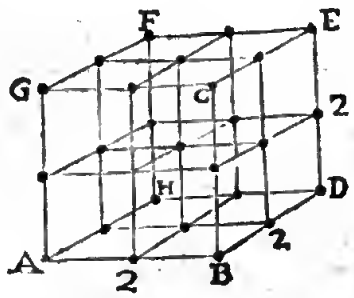
ed è l'istesso, come se dicessimo, che le sue vnità occupano vn piano quadrato; come il notato ABCD, i di cui lati AB, BC sono frà di loro vguali; e perche dalla multiplicatione del numero AB nell' vguale numero BC, ne nasce il piano AB CD quadrato, dalla multiplicatione ancora del lato AB nel medesimo lato AB, si produrrà l'istesso numero quadrato ABCD Quindi è, che multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, il prodotto, che ne viene, è numero quadrato; ed il numero, che fù multiplicato in se medesimo è il lato di quel numero quadrato, che generalmente si chiama radice quadrata. Si che nelle figura ABCD, il numero quadrato è il composto delle vnità, che formano il quadrato ABCD, ed il lato, ò radice quadrata è il notato AB, ouero BC.



X I X.

Chiamasi numero Cubo quello, ch'è contenuto da tre numeri vguali; cioè che vien prodotto dalla continua multiplicatione di tre numeri vguali.

Siano i tre numeri vguali AB, BD, DE, e dalla multiplicatione de i due vguali AB, BD ne venga il numero quadrato ABDH, & il quale, multiplicato dal numero ED, ne venga il numero solido FABE. E perche i lati AB, BD, DE, sono frà di loro vguali, perciò il numero solido FABE sarà vgualmente vguale in lunghezza, larghezza, e profondità; e questo Euclide lo chiama numero Cubo; ed ogn' vno de i numeri vguali AB, BD, DE, &c. si chiama lato del numero cubo FABE. E perche dalla continua multiplicatione de i tre lati vguali AB, BD, DE se ne produce il numero cubo FABE; dalla multiplicatione ancora d'vno di questi lati, come AB, in se medesimo, e dal prodotto, multiplicato per il medesimo lato AB, se ne produrrà l'istesso numero cubo FABE. e perciò multiplicandosi qualunque numero in se medesimo, ed il prodotto multiplicandosi per l'istesso numero, quel, che ne viene, si chiamerà numero Cubo; e quel numero multiplicato in se medesimo, e di nuouo multiplicato per il prodotto, si chiamerà lato di quel numero Cubo, che volgarmente si chiama ancora Radice cuba. Si che, nella figura FABE, il composto delle vnità, che formano il solido FABE, si chiama numero Cubo, ed ogn'vno de i suoi lati AB, BD, DE, &c. si chiama Radice cuba, ouero lato del Cubo FABE.



X X.

Numeri proportionali ſono, quando il primo è multiplice, ò parte, ò parti del ſecondo, come il terzo è multiplice, ò parte, ò parti del quarto: o pure, quando il primo contiene vgualmente il ſecondo, come il terzo contiene il quarto, e di ſopra più il primo, e terzo, contengono vguali parte, ò parti del ſecondo, e quarto.

Dopo ch'Euclide hà definito che coſa ſia numero, e come s'intenda vn numero eſſer multiplice, ò parte, ò parti d'vn altro numero; ed oltre à ciò che coſa dobbiamo intendere per numero piano, e che coſa per numero ſolido; ſpiega in queſta definitione quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche ſiano proportionali; cioè acciòche frà di loro cada proportionalità: &, ſupponendo quel, che diſſe nella ſettima definitione del quinto Elemento, cioè Le quantità, che hanno la medeſima proportione ſi dicono proportionali, *definiſce qui ſolamente quali ſiano quei numeri, che douremo chiamare proportionali; cioè quali conditioni deuono hauere quattro numeri, acciòche la proportione del primo al ſecondo ſia come quella del terzo al quarto numero. E dice che all'hora quattro numeri ſi diranno eſſere proportionali, quando il primo è vgualmente multiplice del ſecondo, come il terzo è multiplice del quarto; ouero, quando il primo è vgualmente parte, o parti del ſecondo, come il terzo è parte, ò parti del quarto: ò pure quando il primo, & terzo contengono vgualmente il ſecondo, e quarto, e di ſopra più la medeſima parte, ò le medeſime parti del ſecondo, e quarto. Verbi gratia ſiano i quattro numeri A, B, C, D; ſe il primo A è multiplice del ſecondo B, come il terzo C è multiplice del quarto D, come nel primo eſſempio: ouero, ſe il primo numero A è parte del ſecondo B come il terzo C è parte del quarto D (come nel ſecondo eſempio): ouero il primo A ſia tante parti del ſecondo B per quante parti è il terzo C del quarto D, come nel terzo eſempio; ò finalmente il primo A contenga il ſecondo B, come il terzo C contiene il quarto D; e li due A, & C contengano di ſopra più vguali parte, ò parti di B, & D, come nel quarto, e quinto eſſempio. In tutt'i detti caſi li quattro numeri A, B, C, D, ſi dicono numeri proportionali. E perche ſù definito nel quinto Libro le quantità proportionali eſſer quelle, le quali hanno la medeſima proportione, chiamando Euclide i notati A, B, C, D, numeri proportionali, ſarà la proportione di A à B, come quella di C à D. Donde è manifeſto, che la proportione frà due numeri è la ſcambieuole relatione, ſecondo la quale l'vno è multiplice, ò parte, ò parti dell'altro; ò che l'vno contenga l'altro, e di ſopra più contenga vguale parte, ò parti dell'altro.*

A	B
24	8
12	4
C	D

A	B
6	30
9	45
C	D

A	B
6	8
9	12
C	D

A	B
12	8
6	4
C	B

A	B
30	8
15	4
C	D

DIVISIONE DELLE PROPORTIONI.

I numeri, frà quali cade la proportione, ſi chiamano Termini della proportione, de' quali quello, che ſi nomina nel primo luogo, ſi chiama Antecedente, e l'altro, che ſi nomina nel ſecondo luogo, ſi chiama Conſeguente: come, facendoſi la comparatione da 9 à 7; i numeri 9, e 7 ſi chiamano termini della proportione, ed il numero 9, che habbiamo nominato nel primo luogo, ſi chiama Antecedente; l'altro, cioè il numero 7, poſto nel ſecondo luogo, ſi chiama Conſeguente.

Denominatore della proportione ſi chiama quel numero, che ci rappreſenta che parte, ò parti, ouero multiplice, è l'antecedente del conſeguente; ò pure come l'antecedente contiene il conſeguente, e con che parte, ò parti di più lo contiene. E perche diuidendoſi vn numero per vn altro numero, per la natura della diuiſione, il quotiente ci moſtra qual parte, ò parti, ò multiplice, è il numero diuiſo del diuiſore; perciò quando ſaranno propoſti due numeri, e ſi voglia ritrouare qual proportione ſia frà l'antecedente, e conſeguente, cioè ſi voglia ritrouare quella quantità, che ci moſtra qual parte, ò parti, ò multiplice, ſia l'antecedente del conſeguente, la quale habbiamo chiamato denominatore della proportione, ſempre ſi diuiderà l'antecedente per il conſeguente, ed il quotiente ſarà il denominatore della proportione; cioè ſarà quel numero, dal quale prenderà il nome quella proportione. Per eſſempio ſiano eſpoſti i numeri 18, & 6, perche diuidendo l'antecedente 18 per il conſeguente 6, il quotiente 3 ci moſtra la grandezza dell'antecedente 18 eſſer tanta, per quanto è tre volte il conſeguente 6, per ciò il quotiente 3 ſarà il denominatore della proportione. Similmente habbiaſi da ritrouare il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7, ſi diuida l'antecedente 25 per il conſeguente 7, il quotiente ſarà 3 $\frac{4}{7}$, il quale rappreſenta la grandezza dell'antecedente 25 eſſer tanta, per quanto è tre volte il conſeguente 7, e di più quattro ſettime parti del medeſimo conſeguente 7; e queſto numero 3 $\frac{4}{7}$ ſarà il denominatore della proportione, ch'è da 25 à 7. In oltre douendoſi trouare il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; perche l'antecedente 5 non è miſurato dal 9, ſarà l'antecedente 5 noue parti del conſeguente, che ſi nota $\frac{5}{9}$; e queſto ſarà il denominatore della proportione, ch'è da 5 à 9; e l'iſteſſo s'intende di tutti gli altri numeri.

La proportione ſi diuide nella proportione d'vgualità, e d'inegualità.

Diceſi proportione d'vgualità, quando l'antecedente è vguale al conſeguente, come ſe ſi farà la comparatione da 7 à 7, ouero da 13 à 13 &c.

La proportione d'inegualità è quando l'antecedente è ineguale al conſeguente, come ſe ſi farà la comparatione da 3 à 7; ouero da 7 à 3 &c.

La proportione d'inegualità ſi diuide nella proportione di maggiore inegualità, e nella proportione di minore inegualità.

Quando l'antecedente è maggiore del conſeguente, la proportione, che cade frà quei due termini, ſi chiama proportione nella maggiore inegualità; e ſe l'antecedente ſarà minore del conſeguente, ſi dirà proportione nella minore inegualità.

La proportione nella maggiore inegualità ſi diuide in cinque generi di proportioni, de' quali tre ſono ſemplici, e due compoſti. Il primo de ſemplici ſi chia-

ma

ma Multiplice; il ſecondo Superparticolare; ed il terzo Superpartiente. De i due compoſti il primo ſi dice Multiplice ſuperparticolare (per eſſer compoſto del multiplice, e del ſuperparticolare,) l'altro ſi chiama Multiplice ſuperpartiente (ſtante che è compoſto del multiplice, e del ſuperpartiente.)

La proportione multiplice ſi diuide in infinite proportioni multiplici; e queſto è quando l'antecedente è miſurato dal conſeguente più d'vna volta, e non auanza coſa alcuna. Come ſe ſi farà la comparatione da 6 à 3; perche l'antecedente 6 è miſurato dal conſeguente 3 due volte, e non auanza coſa alcuna, cioè diuiſo l'antecedente 6 per il conſeguente 3, il quotiente è 2; ſarà il quotiente due il denominatore della proportione; cioè indicarà che l'antecedente contiene il conſeguente due volte: e queſta ſi chiamerà proportione dupla. Similmente habbiaſi da fare la comparatione da 12 à 4, perche, diuiſo l'antecedente 12 per il conſeguente 4, il quotiente è tre; perciò la proportione di 12 à 4 ſi dirà eſſer Tripla. Se poi, diuidendoſi l'antecedente per il conſeguente, il quotiente ſarà 4, tal proportione ſi chiamerà Quadrupla. E ſe il quotiente ſarà 5, ſi dirà Quintupla, e con queſt'ordine in infinito.

La proportione ſuperparticolare ſi diuide in infinite proportioni ſuperparticolari: e queſto è quando l'antecedente è miſurato dal conſeguente vna volta, ed auanza vno, come ſe ſi farà la comparatione da 3 à 2, che, diuiſo l'antecedente 3 per il conſeguente 2, il quotiente ſarà 1 $\frac{1}{2}$: e queſta proportione ſi dice Seſquialtera. Di nuouo douendoſi fare la comparatione da 4 à 3, ſi diuida l'antecedente 4 per il conſeguente 3, il quotiente, ò denominatore della proportione ſarà 1 $\frac{1}{3}$; e tal proportione ſi chiama ſeſquitertia. Se poi, diuiſo l'antecedente per il conſeguente, il quotiente ſarà 1 $\frac{1}{4}$, ſi dirà proportione ſeſquiquarta. Se il quotiente ſarà 1 $\frac{1}{5}$ ſi dirà ſeſquiquinta; e con queſt'ordine per l'altre proportioni ſuperparticolari.

La proportione ſuperpartiente ſi diuide in infinite proportioni ſuperpartienti: e queſto è quando l'antecedente è miſurato dal conſeguente vna volta, ed auanza più di vno: come ſe ſi farà la comparatione di 5 à 3, che diuiſo l'antecedente 5 per il conſeguente 3 il quotiente ſarà 1 $\frac{2}{3}$; e tal proportione ſi dice ſuperbipartiente tertia. Se diuidendoſi l'antecedente per il conſeguente il quotiente ſarà 1 $\frac{3}{4}$, ſi dirà proportione ſupertripartiente quarta. Se il quotiente ſarà 1 $\frac{3}{5}$, ſi dirà ſupertripartiente quinta. Se ſarà 1 $\frac{4}{5}$ ſi dirà ſuperquadripartiente quinta; e con queſt'ordine ſi procederà in tutte l'altre del medeſimo genere.

La proportione multiplice ſuperparticolare ſi diuide in infinite proportioni multiplici ſuperparticolari: e queſto è quando l'antecedente è miſurato dal conſeguente più d'vna volta, ed auanza vno; come ſe ſi farà la comparatione di 5 à 2, che diuidendo l'antecedente 5 per il conſeguente 2, il quotiente ſarà 2 $\frac{1}{2}$; e queſta proportione ſi dice dupla ſequialtera. Similmente facendoſi la comparatione di 7 à 3, diuiſo l'antecedente 7 per il conſeguente 3, il quotiente ſarà 2 $\frac{1}{3}$; e tal proportione ſi chiamerà dupla ſeſquitertia. Se poi diuidendoſi l'antecedente per il conſeguente il quotiente ſarà 3 $\frac{1}{4}$, ſi dirà tripla ſeſquitertia. Se il quotiente ſarà 4 $\frac{1}{5}$, ſi dirà quadrupla ſeſquiſettima, e con queſt'ordine ſi procederà per tutte l'altre del medeſimo genere.

La proportione multiplice ſuperpartiente ſi diuide in infinite proportioni multiplici ſuperpartienti: e queſto è quando l'antecedente è miſurato dal con-

ſeguen-

ſeguente più d'vna volta, ed auanza più di vno: come ſe ſi farà la comparatione da 8 à 3, che diuiſo l'antecedẽte 8 per il conſeguente 3, il quotiente ſarà 2 $\frac{2}{3}$; e tal proportione ſi dice dupla ſuperbipartiente tertia, e diuidendoſi l'antecedente per il conſeguente, ſe il quotiente ſarà 2 $\frac{1}{4}$, ſi dirà dupla ſupertripartiente quarta. Se il quotiente ſarà 3 $\frac{1}{4}$, ſi dirà tripla ſupertripartiente quarta. Se ſarà 4 $\frac{3}{4}$, ſi dirà quadrupla ſuperbipartiente tertia, e ſe ſarà 5 $\frac{3}{4}$ ſi dirà quintupla ſuperſeptipartiente ottaua; e con queſt'ordine ſi procederà in infinito.

La proportione nella minore inegualità ſi diuide ne i medeſimi cinque generi come s'è fatto nella maggiore inegualità, con la ſola differenza, che in queſta di minore inegualità vi s'aggiunge ſempre la particola Sotto. E così diremo, ſumultiplice, ſuſuperparticolare, ſuſuperpartiente, ſumultiplice, ſuſuperparticolare, ſumultiplice ſuperpartiente, ſudupla, ſutripla, ſuquadrupla &c. ſuſeſquialtera, ſuſeſquitertia, ſuſeſquiquarta &c. ſuſuperbipartiente tertia, ſuſupertripartiente quarta &c. ſudupla ſeſquialtera, ſudupla ſeſquitertia, ſutripla ſeſqui ſettima &c. ſudupla ſuperbipartiente tertia, ſudupla ſupertripartiente quarta, ſutripla ſuperbipartiente quinta, ſuquadrupla ſuperquadripartiente nona &c.

Per eſſempio ſiaſi propoſta fare la comparatione di 1 à 2, ſi diuida l'antecedente 1 per il conſeguente 2, il quotiente ſarà $\frac{1}{2}$; e queſta ſi dice proportione ſudupla; ſe il quotiente ſarà $\frac{1}{3}$ ſi dirà ſutripla, ſe ſarà $\frac{1}{4}$, ſi dirà ſuquadrupla, e con queſt'ordine per le altre del medeſimo genere. E per maggior facilità, quando ſono propoſti due numeri nella minore inegualità, cioè che l'antecedente ſia minore del conſeguente, e ſi voglia vedere qual ſpecie di proportione ſia, ſi permutino i termini, e ſi ponga il conſeguente in luogo dell'antecedente, e l'antecedente in luogo del conſeguente, e ſi veda qual ſpecie di proportione è in queſta diſpoſitione della maggiore inegualità; ſe nella maggiore inegualità ſi trouaſſe eſſere in proportione tripla, vi s'aggiunga la particola Sotto, e ſi dirà, che i numeri dati ſono nella proportione ſutripla; ſe nella maggiore inegualità foſſe nella proportione ſeſquialtera, ò ſeſquitertia &c. ſi dirà che nella minore inegualità ſono nella proportione ſuſeſquialtera, ouero ſuſeſquitertia &c. Per eſſempio, habbiaſi da fare la comparatione da 7 à 25; perche l'antecedente è minore del conſeguente, i propoſti numeri ſaranno eſpoſti nella minore inegualità; ſi permutino queſti termini, facendo dell'antecedente conſeguente, e del conſeguente antecedente, ſaranno eſpoſti nel ſeguente modo 25 à 7: ſi diuida il 25 per il 7; il quotiente ſarà 3 $\frac{4}{7}$, e perciò i numeri 25, & 7 eſpoſti nella maggiore inegualità ſono nella proportione, che ſi dice tripla ſuperquadripartiente ſettima, vi s'aggiunga la particola Sotto, e così diremo, che la proportione di 7 à 25 è ſutripla ſuperquadripartiente ſettima; ed il denominatore di tal proportione ſarà $\frac{7}{25}$, ſtante che ſempre ſi diuide l'antecedente per il conſeguente; tenendo per regola ferma, ch'il denominatore della proportione di due termini, che ſono nella minore inegualità, in qualunque genere di proportione, ſempre ſarà vn rotto ſenza intiero alcuno; e nella maggiore inegualità ſempre ſarà, ò ſemplicemente intiero, ouero ſarà intiero accompagnato da qualche rotto.

DELLE PROPORTIONALITA'.

La proportionalità ſpiegata da Euclide nella quarta definitine del quinto, ſi diuide in tre generi, e ſi dicono Medietà, che ſono Medietà, Aritmetica, Geometrica, ed Armonica.

La proportionalità, ò Medietà Aritmetica è quando tre, ò più numeri, ſi auanzano con vguali differenze, come ſono i ſeguenti 5. 8. 11. 14. 17. &c. ouero 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c. Donde ſi vede, che il ſecondo ſupera il primo, come il terzo ſupera il ſecondo, ed il quarto ſupera il terzo &c. Queſta medietà, ò è continua, ouero diſcontinua. Continua ſi dice, quando ſono più di tre termini nella Medietà Aritmetica, i quali continuatamente, e ſenza interrompimento alcuno, ognuno ſupera il ſuo proſſimo antecedente con vguale differenza, come appare negli eſſempij antecedenti. E ſi dice Diſcontinua, quando nella progreſſione de' numeri, ſi fà interrompimento in modo, che la differenza frà il primo, e ſecondo, è vguale alla differenza frà il terzo, e quarto, e frà il quinto, e ſeſto, e con queſt'ordine preſi à due à due: ma non è vguale alla differenza frà il ſecondo, e terzo, ne frà il quarto, e quinto &c. come appare ne i ſeguenti numeri 3. 7. 9. 13. 12. 16. doue la differenza frà i due 3. 7 è vguale alla differenza, ch'è frà i due 9. 13. ed ancora è vguale alla differenza, ch'è frà i due 12. 16. ma non è vguale alla differenza, ch'è frà i due 7. 9. ne à quella, ch'è frà i due 13. 12.

La proportionalità, ò Medietà Geometrica è quando ſono tre, ò più numeri, i quali ſucceſſiuamente ſono nella medeſima proportione; cioè, che la proportione del primo termine al ſecondo, ſia l'iſteſſa, che la proportione del ſecondo al terzo, e del terzo al quarto, e con queſt'ordine per tutti i termini, come ſono i ſeguenti 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. ouero 2. 6. 18. 54. 162. &c. che nel primo eſempio s'auanzano tutti ſucceſſiuamente nella proportione dupla; e nel ſedo eſempio s'auanzano nella proportione tripla. Queſta proportionalità ancora ò è continua, ouero diſcontinua. Proportionalità continua ſi dice quando il primo termine al ſecondo è come il ſecondo al terzo, ed il terzo al quarto, &c. come ne' gli eſempij antecedenti: e ſi chiama diſcontinua quando ſi fà interrompimento in modo, che ſono proportionali à due à due; cioè il primo al ſecondo è come il terzo al quarto, ed ancora come il quinto al ſeſto, &c. come per eſempio 2. 4. 5. 10. 12. 24, doue appariſce, che la proportione de i due 2. 4 è l'iſteſſa, che la proportione de i due 5. 10, e de i due 12. 24; mà la proportione de i due 2. 4 non è l'iſteſſa, che la proportione de i due 4. 5, ne come quella de i due 10. 12, &c.

La proportionalità, ò Medietà Armonica, è quando tre numeri ſono talmente diſpoſti, che la proportione del maſſimo al minimo ſia l'iſteſſa, quale è quella frà la differenza del maſſimo, e medio, alla differenza frà il medio, e minimo in modo, che le differenze frà i proſsimi non ſiano vguali, come nella medietà Aritmetica, ne ſiano nella medeſima proportione, come ſi diſſe nella medietà Geometrica. Come per eſempio ſono i tre numeri 3. 4. 6, doue appariſce, che la proportione del numero 6 al numero tre è l'iſteſſa, che la proportione, che hà la differenza frà il 6, e 4 alla differenza frà il quattro, ed il 3; poiche la proportione del 6 al 3 è dupla, ed ancora la proportione della

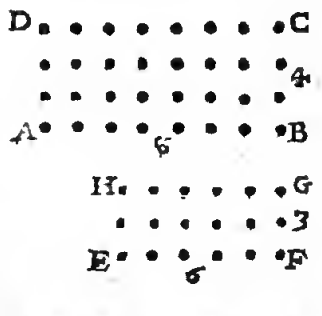
dif-

differenza frà il 6, e 4, ch'è 2, alla differenza frà il 4 e 3, ch'è 1, è dupla. E questi non hanno successiuamente la medesima differenza, ne meno il primo al secondo hà l'istessa proportione, che il secondo al terzo, come richiede la medietà Geometrica; questa proportionalità si chiama Armonica, stante che i numeri esposti secondo tal dispositione; per lo più hanno quelle proportioni, che si richiedono alle consonanze della Musica; come nel soprapposto esempio, doue la proportione del 4 à 3 è sesquitertia, la quale costituisce la consonanza, che si dice Diatessaron, ouero quarta, In oltre la proportione del 6 al 4 è sesquialtera, e questa costituisce la consonanza, che si dice Diapente, ouero quinta: e la proportione del 6 al 3 è dupla, la quale costituisce la consonanza che si chiama Diapason, ouero ottaua. Circa poi al modo di ritrouare quanti si voglia numeri nella proportionalità Aritmetica, ò Geometrica, ò Armonica, si veda la mia Aritmetica Prattica, doue si troverà il tutto diffusamente spiegato,

XXI.

Quei numeri piani, ò solidi, si dicono essere frà di loro simili, i quali sono contenuti da lati proportionali.

Siano esposti i due numeri piani ABCD, EFGH, ed il numero piano ABCD, sia prodotto dalla multiplicatione de i numeri AB, BC; similmente il numero piano EFGH sia prodotto dalla multiplicatione de i due numeri EF, GE; definisce Euclide, che sei numeri, ò lati AB, BC, EF, FG sono proportionali, cioè se la proportione del numero AB al numero BC è come quella del numero EF al numero FG, i numeri piani ABCD, EFGH, contenuti da quelli, si dicono essere frà di loro simili [illegible]. Il medesimo s'intende de' numeri solidi, cioè se i numeri, da' quali sono prodotti, sono proportionali, quei numeri solidi si dicono essere frà di loro simili. E però da notarsi, ch'Euclide nel definire i numeri piani simili, ed i numeri solidi simili, non assegna altre conditioni, se non che chiama simili quelli, che hanno i lati proportionali, stante che parla solo de' piani rettangoli, e de' solidi contenuti da piani rettangoli,



XXII.

Numero perfetto è quello, ch'è vguale alle sue parti giunte insieme.

Quando vn numero è misurato da più numeri, quelli, che rappresentano le quantità delle volte, che lo misurano, si chiamano parti aliquote. Per esempio il numero 12 è misurato da tutti i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2. cioè

è mi-

è misurato dal 12 una volta ; dal 6 due volte ; dal 4 tre volte; dal 3 quattro volte; e dal due sei volte . Hor quelli, che rappresentano le volte, che il numero 12 è misurato da i numeri 12. 6. 4. 3. 2. si chiamano parti aliquote , ch'in questo essempio sono 1. 2. 3. 4. 6. e secondo questa spiegatione si deuono intendere le parti , delle quali parla Euclide in questa definitione ; e così diremo , che se le parti aliquote , secondo le quali un numero è misurato da tutti i numeri , che lo possono misurare , giunte insieme , sono frà di loro vguali al medesimo numero misurato , tal numero si chiamerà numero perfetto , come è il numero 6, le di cui parti aliquote sono 1. 2. 3. le quali giunte insieme fanno giustamente 6. Similmente il numero 28 si dirà essere numero perfetto , stante che le sue parti aliquote 1. 2. 4. 7. 14, le quali , giunte insieme , fanno giustamente il medesimo numero 28 .

Se tutte le parti aliquote d'vn numero , giunte insieme , sono minori del medesimo numero , all'hora quel numero si chiamerà numero diminuto ; com'è il numero 8, il quale è misurato da i numeri 8. 4. 2; e le parti aliquote sono 1. 2. 4, che , giunte insieme , fanno il numero 7 minore del proposto numero 8 .

Quando poi tutte le parti aliquote d'vn numero , giunte insieme , sono maggiori del medesimo numero ; in tal caso quel numero si chiama numero abondante ; come è il numero 12, il quale è misurato da i seguenti numeri 12. 6. 4. 3. 2, e le parti aliquote sono 1. 2. 3. 4. 6, che , giunte insieme , fanno il numero 16 maggiore del proposto numero 12 .

Dopo spiegate le definitioni d'Euclide stimo bene aggiungere quì i seguenti postulati , ed assiomi introdotti da altri Autori per maggior spiegatione di quel che segue .

POSTVLATI.

I.

Si prende per concesso potersi pigliare quanti si voglia numeri , ò vguali , ò multiplici à qualunque altro numero.

II.

Che si possa prendere vn numero maggiore di qualunque altro numero.

Benche il numero non si può diminuire in infinito , stante che l'vnità è la sua minima parte , con tutto ciò questo non impedisce , che non si possa accrescere quanto si vuole , coll'aggiungere sempre più , e più vnità : donde è manifesto , che à qualunque dato numero se gli può trouare altro numero maggiore, e più maggiore , quanto si vuole .

ASSIOMI.

I.

Tutti i numeri , che sono vguali multiplici d'vn medesimo , ò d'altri numeri vguali; sono frà di loro vguali.

I I.

Quei numeri, de' quali vn medesimo è vgualmente multiplice, ouero de' quali gli vgualmente multiplici sono vguali, ancor essi sono frà di loro vguali.

Se il numero A è vgualmente multiplice de i due B, & C, i due numeri B, & C sono frà di loro vguali; ouero se i numeri vguali D, E sono vguali multiplici de i due B, C, i numeri B, & C sono frà di loro vguali.

A 28

B 7 7 C

D 35 35 E

I I I.

Tutti i numeri, che sono la medesima parte, ò le medesime parti dell'istesso numero, ouero di numeri vguali, sono frà di loro vguali.

I V.

I numeri, de' quali il medesimo numero, ouero numeri vguali, sono la medesima parte, ò le medesime parti, sono frà di loro vguali.

V.

L'vnità misura ogni numero secondo le vnità, che lo compongono, cioè lo misura tante volte, per quante sono le vnità, che lo compongono.

V I.

Ogni numero misura se medesimo secondo vna sola vnità, cioè lo misura vna sol volta.

V I I.

Se vn numero, multiplicato per vn altro, produce qualche numero, il multiplicante misura il prodotto secondo le vnità, che sono nel multiplicato, ed il multiplicato misura il medesimo, secondo le vnità, che sono nel multiplicante.

V I I I.

Se vn numero misura vn altro numero, quello, secondo il quale lo misura, misurerà il medesimo secondo le vnità, che sono in quello, che misura.

Per

Per eſſempio il numero 4 miſura il numero 12 ſecondo le vnità del numero 3; ed il numero 3 miſura il medeſimo numero 12 ſecondo le vnità del numero 4; cioè il numero quattro entra tre volte nel numero 12, ed all'incontro il numero 3 entra quattro volte nell'iſteſſo numero 12.

I X.

Ogni numero, che miſura vn altro numero, ſe multiplica quello, ſecondo il quale egli lo miſura, ò è multiplicato da quello, produce il medeſimo numero miſurato.

Per eſſempio il numero 7 miſura il numero 28 per il numero 4; ſe il numero 7 multiplica il numero 4, ouero il numero 4 multiplica il numero 7, ſempre il prodotto ſarà vguale al numero 28.

X.

Se vn numero miſura due, o più numeri, miſurerà ancora il compoſto da quelli.

X I.

Qualunque numero, che miſura vn altro numero, miſurerà ancora il miſurato da quello.

Se il numero 4 miſura il numero 12, ed il numero 12 miſura il numero 24; il numero 4 miſurerà ancora il numero 24.

X I I.

Qualunque numero, che miſura il tutto, e miſura la parte detratta, miſurerà ancora il rimanente.

Cioè ſe il numero AB miſura tutto il numero CF, e miſura la parte CD. Dico che miſurerà ancora l'auanzo DF. Se il numero AB non miſura l'auanzo DF, ſi detragga dal numero DF quanto ſi può il numero AB, e quel che reſta ſia EF; ſarà EF minore di AB. Perche AB, per ipoteſi, miſura CD, e per coſtruttione miſura DE, per il 10 aſſioma, miſurerà ancora tutto il numero CE; s'aggiunga à CE la parte EF minore di AB; il numero AB non miſurerà giuſtamente CF, ch'è contro all'ipoteſi, eſſendoſi ſuppoſto, ch'il numero AB miſura tutto CF. Donde è manifeſto, che ſe AB miſura il tutto CF, e miſura la parte CD, miſurerà ancora il rimanente DF, ch'era da dimoſtrarſi:

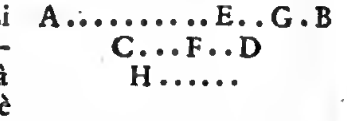
C . . . . . D . . . . E . . F
A . . . . B

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due propoſti numeri ineguali ſi detrae ſempre quanto ſi può il minore dal maggiore reciprocamente, ed

il rimanente mai misuri quello, che l'antecede, fin tanto, che si peruenga all'vnità; i due numeri proposti saranno frà di loro primi.

Siano proposti i due numeri ineguali AB,CD, e dal maggiore AB, ne sia detratto quante volte si può il numero CD, e quel che resta, sia EB, sarà EB minore di CD; sia poi detratto da CD quanto si può il numero EB, e quel che resta sia FD; sarà FD minore di EB; similmente da EB ne sia detratto quanto si può il numero FD, e l'auanzo sia GB, e con questo ordine si proceda fin che si può; se in questa continua detrattione reciprocamente fatta, nissun auanzo misura il numero antecedente, ma che in questa continuata detrattione l'vltimo auanzo, come GB, sia l'vnità. Dico che i numeri AB, CD sono frà di loro primi; cioè che la loro commune misura è solamente l'vnità.



Se i numeri A B, C D non sono primi frà loro, qualche numero sarà loro commune misura; cioè l'vno, e l'altro sarà misurato da qualche numero. Sia, s'è possibile, quel numero, che li misura, il notato H. Perche il numero H, per la suppositione fatta, misura il numero CD; ed il numero CD, per ipotesi, misura il numero AE, il numero H dunque [a] misurerà il numero AE: ma il numero H, per ipotesi, misura il tutto AB, il numero H misurerà ancora [b] il rimanente EB. In oltre perche il numero E B, per ipotesi, misura CF; perciò il numero H [c] misurerà CF. Per suppositione il numero H misura il tutto CD; il numero H dunque misurerà ancora [d] il rimanente FD, E perche FD, per ipotesi, misura EG, in conseguenza il numero H [e] misurerà EG. Di più essendosi dimostrato, che il numero H misura il tutto EB; misurerà ancora [f] il rimanente GB; ma per ipotesi, GB rappresenta l'vnità, il numero H dunque misurerà l'vnità GB; il tutto misura la parte, ch'è impossibile. Non dunque alcun numero, fuor che l'vnità, misura i due numeri AB, CD; e perciò i numeri AB, CD sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi.

a 11. assioma del 7.
b 12. assioma del 7.
c 11. assiom. del 7.
d 12. assiom. del 7.
e 11. assiom. del 7.
f 12. assiom. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione la fà il Campano nel seguente modo.

Se di due proposti numeri frà di loro primi si detrae sempre, quanto si può, il minore dal maggiore, con reciproca detrattione; nissuno degli auanzi, prima che si peruenga all'vnità, misurerà il numero antecedente.

Siano i due numeri AB, CD, frà di loro primi, e dal maggiore AB se ne detrag-

detragga quanto si può il minore CD, e l'auanzo sia EB; sarà EB minore di CD. Similmente dal numero CD se ne detragga quanto si può il numero EB, e l'auanzo sia FD, sarà FD minore di EB; poi dal numero EB se ne detragga quanto si può il numero FD; e quel che resta sia GB. Dico ch'in questa continua detrattione reciprocamente fatta, mai alcun'auanzo, prima di peruenire all'vnità, misurerà il numero antecedente. Misuri s'è possibile prima, che si peruenga all'vnità, l'auanzo GB il numero antecedente FD; perche FD, per ipotesi, misura EG, dunque l'auanzo GB [a] *misurerà ancora il numero EG; mà l'auanzo GB misura se medesimo; perciò* [b] *misurerà ancora tutto il numero EB. In oltre perche GB misura EB; ed il numero EB, per ipotesi, misura CF; in conseguenza GB* [c] *misura CF: mà, per il supposto fatto, GB misura FD, dunque GB* [d] *misurerà CD. Il numero CD, per ipotesi, misura AE, perciò l'auanzo GB* [e] *misurerà AE. Di più perche GB misura AE, e per quel che s'è dimostrato, misura ancora EB; dunque GB* [f] *misurerà il tutto AB. Mà, per quel, che s'è dimostrato, GB misura tutto il numero CD; perciò l'auanzo GB sarà commune misura de i due proposti numeri AB, CD; per la qual cosa i numeri AB, CD* [g] *sono frà di loro composti, ch'è contro all'ipotesi; mentre furono supposti frà di loro primi. Non dunque alcun' auanzo, prima, che si peruenga all'vnità, misura il numero antecedente, ch'era da dimostrarsi.*

A.....E..G—B
C.....F..D

[a] 11. assioma del 7.
[b] 10. assiom. del 7.
[c] 11. assioma del 7.
[d] 10. assiom. del 7.
[e] 11. assiom. del 7.
[f] 10. assiom.
[g] 14. defin. del 7.

Il P. Clauio aggiunge la seguente dimostratione.

Se di due proposti numeri frà di loro composti, si detrae sempre quanto si può il minore dal maggiore con reciproca detrattione; la detrattione non peruerrà fino all'vnità, ma peruerrà à tale auanzo, che misurerà il numero precedentemente detratto.

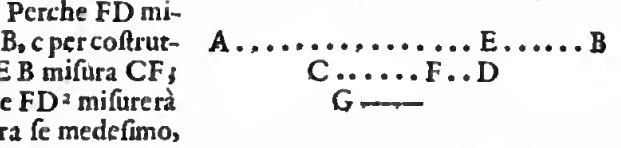
Perche se la detrattione peruiene fino all'vnità; cioè se l'vltimo auanzo sarà l'vnità, per la prima propositione di questo, i numeri proposti saranno frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi: non dunque la detrattione peruiene all'vnità, mà si peruiene à tale auanzo, che misura il numero precedentemente detratto, ch'era da dimostrarsi.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Dati due numeri non primi frà loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano i due dati numeri, non primi frà loro AB, CD, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Dal maggiore A B se ne detragga quanto si può il minore CD, e quelche resta sia EB; sarà EB minore

nore di CD. Similmente dal numero CD ſe ne detragga quanto ſi può il numero EB, e quel che reſta ſia FD: e continuandoſi queſta reciproca detrattione, col ſottrarre ſempre il minore dal maggiore fin à tanto, che ſi peruenga ad vn auanzo, che miſuri il numero antecedente; non potendoſi peruenire all'vnità, ſtante che ſe l'vltimo auanzo foſſe l'vnità, i numeri AB, CD [m] ſarebbero frà di loro primi, ch'è contro all'ipoteſi. Sia dunque F D quell'auanzo, che miſura l'antecedenre numero E B. Dico che FD ſarà la maſſima commune miſura d'ambiduc i propoſti numeri AB, CD. Perche FD miſura il numero EB, e per coſtruttione il numero E B miſura CF; il numero dunque FD [a] miſurerà CF: ma FD miſura ſe medeſimo, perciò FD [b] miſura il tutto C D. In oltre il numero FD, per quel che ſi è dimoſtrato, miſura il numero C D; il numero C D per coſtruttione miſura AE; il numero dunque FD [c] miſura AE: ma per ipoteſi FD miſura EB; perciò il numero FD [d] miſura il tutto AB. Fù dimoſtrato, ch'il medeſimo numero FD miſura il tutto CD, in conſeguenza FD ſarà commune miſura d'ambidue i numeri AB, CD.

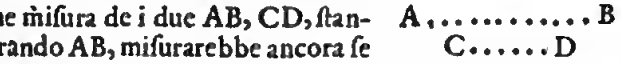


m 1. del 7.
a 11. aſſiom. del 7.
b 10. aſſiom. del 7.
c 11. aſſiom. del 7.
d 10. aſſiom. del 7.

Dico finalmente che FD è la maſſima commune miſura de' medeſimi numeri AB, CD. Perche ſe FD non è la maſſima commune miſura, qualche altro numero ſarà maſſima commune miſura de i due AB, CD. Sia s'è poſſibile il numero G commune miſura de i numeri A B, C D, e ſia maggiore di FD. Perche G è commune miſura de i due AB, CD, perciò G miſurerà CD: ma CD per coſtruttione miſura AE, il numero G [e] dunque miſurerà AE; ſi diſſe che G miſura il tutto AB, in conſeguenza G [f] miſurerà il rimanente EB. Di più, perche G miſura E B, ed il numero EB miſura CF, il numero G [g] miſurerà ancora CF; ma G, per ſuppoſitione, miſura tutta CD; miſurerà [h] ſimilmente l'auanzo FD. Fù ſuppoſto il numero G maggiore di FD, il maggiore dunque, cioè G, miſura il minore FD, ch'è impoſſibile. Non dunque è maggiore di FD: per la qual coſa FD ſarà la maſſima commune miſura de i numeri A B, C D, ch'era da dimoſtrarſi.

e 11. aſſiom. del 7.
f 12. aſſiom. del 7.
g 11. aſſiom. del 7.
h 12. aſſiom. del 7.

Se poi detraendo quanto ſi può il minor numero CD dal maggiore AB, non auanzaſſe cos'alcuna, all'hora CD ſarà la maſſima commune miſura de i due AB, CD, ſtante che CD, miſurando AB, miſurarebbe ancora ſe medeſimo, ch'è quanto ſi doueua dimoſtrare.



COROLLARIO

Da quel che s'è detto, è manifeſto, che ſe vn numero miſura due altri numeri, miſurerà ancora la maſſima commune miſura di quelli.

Nella dimoſtratione antecedente ſupponendo G commune miſura de i due AB, CD, fù dimoſtrato, ch'il medeſimo numero G miſura la parte FD; ſe

dunque

dunque FD sarà la massima commune misura de i due AB, CD; sarà manifesto, che G, essendo commune misura de i due AB, CD, misurerà ancora la loro massima commune misura FD, come si disse.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE III.

Dati tre numeri non primi frà di loro, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano dati i tre numeri A,B,C, non primi frà di loro, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Si troui prima [a] la massima commune misura de i due A, & B, che sia D. Se il numero D misura C, sarà D la massima commune misura de i tre dati numeri A, B, C: perche se non fosse D la massima, che misura i tre A, B, C, sarebbe qualche altro numero maggiore di D, che sia per essempio H. Perche D, per costruttione, è massima commune misura de i due A,& B, ed il numero H misura i due A, & B, per l'antecedente Corollario, il numero H misurerà ancora la massima commune misura D; dalche il numero maggiore misurarebbe il minore, ch'è impossibile; non dunque altro numero maggiore di D è massima commune misura de i tre A,B,C, ma la massima commune misura sarà il numero D, come si disse. Di nuouo supposto ch'il numero D non misuri il numero C. Perche i tre A,B,C, per ipotesi, sono numeri compositi; per la 14. definitione di questo, haueranno vna commune misura, la quale, se è commune misura di tutti tre i numeri A, B, C, sarà ancora commune misura de i due A,B; e per il Corollario antecedente, quello, che misura i due A,B, misurerà ancora la loro massima misura commune D: dal che quello, che misura i tre A,B,C, misura ancora il numero D; e perciò i due C, & D, [b] sono numeri compositi; si troui dunque [c] la massima commune misura de i due C,& D, che sia E. Dico che il numero E è massima commune misura de i tre dati numeri A,B,C. Perche il numero E misura i due C,& D; ed il numero D misura i due A, & B; il numero E [d] misurerà i due A, & B: ma per costruttione misura ancora C; dunque sarà E commune misura de i tre A, B, C. Dico finalmente, che non solo il numero E è commune misura de i tre A,B,C; ma che è la massima commune misura de i tre A,B,C. Se il numero E non è la massima commune misura, qualche altro numero maggiore di E sarà massima commune misura de i tre A,B,C, sia quello s'è possibile il notato F. Perche F misura i due A, & B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora la loro massima commune misura D: ma il numero F, per la suppositione fatta, misura C, perciò F sarà misura commune de i due C,& D; e per il Corollario antecedente, F misurerà la loro massima commune misura E: per la qual cosa il numero maggiore F misura il numero minore E, ch'è impossibile. Non dunque altro numero maggiore di E è massima commune misura de i tre A,B,C; ma la loro massima commune misura sarà il numero E; ch'era da farsi, e dimostrarsi.

H.....
A.....
B..... D....
C..... E.. F——

[a] 2. del 7.

[b] 14. defin. del 7.

[c] 2. del 7.

[d] 11. assiom. del 7.

CO-

COROLLARIO.

Quindi appare, che ſe vn numero miſura tre numeri, miſurerà ancora la maſſima commune miſura di quei tre numeri.

Si è dimoſtrato nell'vltima parte dell'antecedente propoſitione, che ſe F miſura i tre A,B,C, miſurerà ancora il numero E: ma s'è dimoſtrato, che il numero E è la maſſima commune miſura de i tre A, B, C; quel numero dunque, che miſura i tre A, B, C, miſurerà ancora la loro maſſima commune miſura, come ſi diſſe.

Col medeſimo ordine ſi può trouare la maſsima commune miſura di più di tre numeri frà di loro non primi: cioè, ſe ſaranno quattro numeri, ſi troua prima la maſsima commune miſura à tre di quelli, come antecedentemente ſi è fatto; e poi ſi troui la commune miſura frà vno di quei tre, ed il quarto, quella ſarà la maſsima commune miſura di tutti quattro. Se i numeri ſaranno cinque, ſi troua prima la maſsima commune miſura di quattro di quelli, e poi ſi troui la maſsima commune miſura di vno di quei quattro, e del quinto; quella ſarà la maſsima commune miſura di tutti cinque. E con queſt'ordine ſi procederà ſe ſaranno più di cinque; e ſempre quel numero, che miſura tutti i numeri, miſurerà ancora la loro maſsima commune miſura, come s'è detto nell'antecedente Corollario: poiche la medeſima dimoſtratione fatta, quando ſono tre ſoli numeri, ſi può fare quando ſono più di tre.

THEOREMA II. PROPOSITIONE IV.

Ogni numero ò è parte, ò è parti d'ogn'altro numero maggiore.

Siano due numeri come A, & B; e ſia il numero A minore del numero B. Dico che il numero A ò è parte del numero B, ouero è tante parti del numero B. Siano prima i numeri A, & B frà di loro primi. Perche qualunque vnità del numero A è parte del numero B, conterrà il numero A tante parti di B, per quante vnità ſono nel medeſimo numero A; per la qual coſa il numero A ſarà parti di B, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A.....
B.....

In oltre non ſiano A, & B numeri primi; ſe il numero A miſura il numero B, per la terza definitione di queſto, ſarà A parte di B. Finalmente non ſia A parte di B: perche A, & B, per ſuppoſitione non ſono numeri primi, ſi troui, per la prima propoſitione di queſto, la loro commune miſura, che ſia C. Perche C miſura A, perciò A ſi può diuidere nelle parti vguali à C; ſi diuida dunque il numero A nelle parti vguali à C, che ſiano AD, DE, EF. Perche C miſura il numero B, ed AD è vguale al numero C; perciò AD

A..D..E..F
B.....
C..

miſu-

misurerà il numero B; e per la terza definitione, AD sarà parte di B. Nell'istesso modo si dimostrerà, che DE è parte di B, e che EF è parte del medesimo numero B; e perciò i numeri AD, DE, EF saranno tante parti di B, per quante volte C misura AF. Per la qual cosa ogni numero ò è parte, ouero è parti d'ogn'altro numero maggiore, che era da dimostrarsi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

Se vn numero è parte d'vn numero, ed vn altro numero è la medesima parte d'vn altro; i due, che sono parte, giunti insieme, saranno parte degli altri due, come vno è parte di vno, ò l'altro è parte dell'altro.

Sia il numero A parte di BC, come D è parte di EF. Dico che i due numeri A, & D insieme, sono parte di BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come D è parte di EF.

Perche A è parte di BC, come D è parte di EF; tante volte A misurerà BC, per quante volte D misura EF. Si diuida il numero BC nelle parti vguali ad A, che siano BG, GC; e si diuida il numero EF nelle parti vguali al numero D, che siano EH, HF. Perche A è vguale à BG, ed il numero D è vguale ad EH; al numero A s'aggiunga D, ed al numero BG s'aggiunga EH: i due A, & D insieme giunti, saranno vguali à i due BG, & EH insieme. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i due A, & D insieme, sono vguali à i due GC, HF insieme: dal che tante volte A, & D insieme, misura le due BC, EF insieme, per quante volte A misura BC, ouero D misura EF. Per la qual cosa le due A, & D insieme, sono parte de i due BC, EF insieme, come A è parte di BC, e come il numero D è parte di EF; che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Quel, che s'è detto nell'antecedente propos. di due soli numeri, si deue intendere ancora di più di due numeri: cioè, se quanti si voglia numeri, di quanti si voglia altri numeri, ciascuno da per se, è la medesima parte del suo corrispondente, tutti insieme sono tal parte di tutti gli altri insieme, come vno è parte di vno. E la dimostratione è la medesima, che si è fatta antecedentemente.

Qui si può ancora dimostrare che se quanti numeri si vogliano sono vguali multiplici di altretanti numeri, tutti insieme saranno multiplici di tutti insieme, come vno è multiplice di vno.

Siano i numeri A, & C vguali multiplici de i numeri B, & D. Dico che A è multiplice di B, ouero C è multiplice di D, come i numeri A, & C, insieme, sono multiplici de' numeri B, & D insieme. Perche A è multiplice di B come C è multiplice di D; tante volte B misura il numero A, per quante volte D misura il numero C: dal che B è parte di A come D è parte di C; e per l'antecedente propositione B, & D insieme sono parti di A, & C insieme, come B è parte di A, e come D è parte di C: per la qual cosa B, & D insieme, misura A, & C insieme, tante volte, per quante volte B misura A; ouero D misura C: e perciò A, & C insieme, è multiplice di B, & D insieme, come A è multiplice di B, e come C è multiplice di D, che era da dimostrarsi.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . .

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Se due, ò più numeri, sono vgualmente parti di altretanti numeri; tutti saranno parti di tutti, come vno è parti di vno.

Sia il numero AB tale parti del numero C, quale parti è DE del numero F. Dico che AB, DE insieme, sono tali parti di C, ed F insieme, quali parti è AB di C; e quali parti è DE di F. Perche AB è tante parti di C, per quante parti è DE di F; saranno in A B tante parti di C, per quante in DE sono parti di F. Si diuida AB nelle parti di C, e siano AG, GB; cioè AG sia parte di C, ed anco GB sia parte di C. Similmente si diuida DE nelle parti di F, che siano DH, HE, cioè, che DH sia parte di F, ed anco HE sia parte di F; la moltitudine delle parti in AB sarà vguale alla moltitudine delle parti in DE. E perche AB è tale parti di C, quale parti è DE di F; ogn'vna delle parti in AB sarà parte di C, come ogn'vna delle parti in DE è parte di F: dal che AG è parte di C, come DH è parte di F: donde le due insieme AG, DH, [a] saranno parte delle due insieme C, ed F, come AG è parte di C, ouero DH è parte di F. Nell'istesso modo si proverà, che li due insieme GB, HE sono parte delli due insieme C, ed F, come GB è parte di C, ouero HE è parte di F; e perciò AB, DE insieme, sono parti di C, ed F insieme, come AB è parti di C, ouero DE è parti di F. L'istesso si dimostrerà se i numeri saranno più di due. Per la qual cosa se due, ò più numeri, sono vguali parti di altretanti numeri, tutti sono parti di tutti, come vno è parti di vno, che era da dimostrarsi.

A . . . G . . . B D . . . . H . . . . E
C . . . . . F . . . . . .

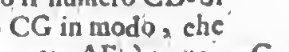
a 5. del 7.

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Se vn numero è parte d'vn altro numero, come il numero detratto dall'vno è parte del numero detratto dall'altro;

tro; il rimanente sarà parte del rimanente, come tutto è parte di tutto;

Sia il numero AB parte di CD come AE è parte di CF. Dico che il rimanente numero EB è parte del rimanente FD, come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia parte di CG, come AE è parte di CF; cioè come tutto il numero AB è parte di tutto il numero CD. Perche EB è parte di CG, come AE è parte di CF; sarà tutto AB [a] parte di tutto GF, come AE è parte di CF; cioè come tutto AB è parte di CD: e perciò sarà il medesimo numero AB tale parte di GF, quale parte è di CD; per la qual cosa [b] i numeri GF, CD sono frà di loro vguali: se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; preso EB come terza quantità, sarà EB tale parte di FD, quale è di CG: ma EB, per costruttione, è parte di CG, come tutto AB è parte di tutto CD; sarà il rimanente numero EB, parte del rimanente numero FD, come tutto AB è parte di tutto CD, che era da dimostrarsi.



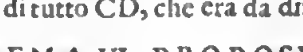
[a] 5. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se vn numero è tante parti d'vn altro numero, per quante parti è il numero detratto dall'vno del numero detratto dall'altro; il rimanente sarà tante parti del rimanente, per quante parti è tutto di tutto.

Sia il numero AB tante parti di CD, per quante parti è il numero AE del numero CF. Dico che il rimanente EB sarà tante parti del rimanente FD, per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD. Si concepisca il numero CG in modo, che EB sia tante parti di CG, per quante parti è il numero AE di CF; sarà tutto il numero AB tante parti di GF, [a] per quante parti è AE di CF: ma, per ipotesi, AE è tante parti di CF, per quante parti è AB di CD; sarà AB tante parti di GF, per quante parti è il medesimo numero AB di CD: per la qual cosa i numeri GF, CD [b] sono frà di loro vguali; se ne leui il commune CF, resta GC vguale ad FD; dal che tante parti è il numero EB di FD, per quante parti è il medesimo numero EB di GC: ma, per costruttione, EB è tante parti di CG, per quante parti è AE di CF; sarà EB tante parti di FD, per quante parti è AE di CF; cioè per quante parti è tutto il numero AB di tutto il numero CD, come fù proposto dimostrare.



[a] 6. del 7.

[b] 4. assioma del 7.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Se vn numero è parte d'vn numero, come vn altro nu-

cioè ſarà AG tale parte di C, quale parte è DH di F; e permutando, ſarà AG a tale parte, ò parti, di DH, quale parte, ò parti è il numero C del numero F. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che tale parte, ò parti è GB di HE, quale parte, ò parti, è C di F. Per la qual coſa tale parte, ò parti è AG di DH, quale parte, ò parti è GB di HE; e perciò tutto AB ſarà tale parte, ò parti di tutta DE, quale parte, ò parti è AG di DH. Ma quale parte, ò parti è AG di DH, per quel che ſi è dimoſtrato, tale parte, ò parti è C di F; quale parte, ò parti dunque è il numero AB del numero DE, tale parte, ò parti ſarà C di F, che era da dimoſtrarſi. a 9. del 7. b 5. & 6. del 7.

SCOLIO.

Prima di paſſare in altro, ſtimo bene dimoſtrare ne i numeri quella medeſima paſſione, che fù dimoſtrata nel Corollario alla quarta propoſitione del quinto Libro.

Se di quattro numeri la proportione del primo al ſecondo è come quella del terzo al quarto; inuertendo, il ſecondo al primo hauerà l'iſteſſa proportione, che il quarto al terzo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D, ed habbia il primo A al ſecondo B l'iſteſſa proportione, quale hà il terzo C al quarto D. Dico che, inuertendo, B ad A ſarà come D à C. Suppoſto prima, che A, & C ſiano minori di B & D. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D; ſarà A a parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D: ſe A è parte di B, come C è parte di D; ſarà B multiplice di A, come D, è multiplice di C; e perciò B ad A b ſarà come D à C. Se A è parti di B, come C è parti di D; all'hora B, & D c conterranno vgualmente i numeri A, & C, e di più conterranno la medeſima parte, ò le medeſime parti di A, & C; e per la 20. definitione di queſto B ad A ſarà come D à C.

A . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . . a 20. defin. del 7. b 20. defin. del 7. c 20. defin. del 7.

Di nuouo ſiano li due A, & C maggiori de i due B, & D. Perche A à B, è come C à D, i due A, & C d ſaranno ò vguali multiplici de i due B, & D; ouero conterranno vgualmente i due B, & D, e di ſopra più la medeſima parte, ò le medeſime parti di B, & D. Se A, & C ſono vguali multiplici di B, & D, ſarà B parte di A, come D è parte di C: dalche B ad A e ſarà come D à C. Se poi li due A, & C contengono vgualmente li due B, & D, e di ſopra più la medeſima parte, ò le medeſime parti di B, & D; ſarà B parti di A, come D è parti di C. Per la qual coſa B ad A f ſarà come D à C, come fù propoſto dimoſtrare.

A . . . . . C . . . . .
B . . . . . D . . . . . d 20. defin. del 7. e 20. defin. del 7. f 20. defin. del 7.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Se tutto vn numero à tutto vn altro numero è come la parte detratta dall'vno alla parte detratta dall'altro, il rimanente al rimanente sarà come il tutto al tutto.

Sia tutto il numero AB à tutto il numero CD, come la parte AE alla parte CF. Dico che l'auanzo EB all'auanzo FD, è come tutto il numero AB à tutto il numero CD. Sia prima AB minore di CD. Perche AB à CD è come AE à CF; sarà AB [a] parte, ò parti di CD, come AE è parte, ò parti di CF: dal che il rimanente EB, [b] sarà parte, ò parti, del rimanente FD, come tutto AB è parte, ò parti di tutto CD; e perciò EB ad FD [c] sarà come AB à CD.

A..... E...B
C..... F..... D

In oltre sia AB maggiore di CD: perche AB à CD, per ipotesi, è come AE à CF, inuertendo, CD ad AB [d] sarà come CF ad AE; e sarà CD parte, ò parti di AB, [e] come CF è parte, ò parti di AE; dalche il rimanente FD [f] sarà parte, ò parti di EB, come CD è parte, ò parti di AB; e perciò FD ad EB [g] sarà come CD ad AB; ed inuertendo, EB ad FD [h] sarà come AB à CD, ch'era da dimostrarsi.

A..... E...B
C..... F... D

a 20. defin. del 7.
b 7. & 8. del 7.
c 20. defin. del 7.
d Scol. ant.
e 20. defin.
f 7. & 8. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. ant.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Se quanti si voglia numeri sono proportionali; sarà vno antecedente ad vn conseguente, come tutti gl'antecedenti insieme à tutti li conseguenti insieme.

Siano quanti si voglia numeri proportionali A, B, C, D, E, F; cioè sia A à B come C à D, e come E ad F. Dico che tutti gli antecedenti A, C, E, insieme à tutti i conseguenti B, D, F, insieme, sono come l'antecedente A al conseguente B; ouero come C à D, ò pure come E ad F. Siano prima i numeri A, C, E minori de i numeri B, D, F. Perche A à B, per ipotesi, è come C à D, sarà A [a] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; e perciò i due insieme A, & C [b] saranno parte, ò parti de i due B, D [i] insieme, come A è parte, ò parti di B; similmente perche A à B è come E ad F, sarà A [c] parte, ò parti di B, come E è parte ò parti di F; ma per quel, che si è dimostrato A è parte, ò parti di B, come A, C, è parte, ò parti di B, D; sarà A, C parte, ò parti di B, D, come E è parte, ò parti di F; dalche A, C, E insieme, saranno parte, ò parti di B, D, F [d] insieme, come A, C, insieme, sono parte, ò parti di B, D, insieme; cioè, come A è

A..... C.. E.....
B..... D.... F.....

a 20. defin. del 7.
b 5. e 6. del 7.
c 20. defin.
d 5. e 6. del 7

parte,

parte, ò parti di B. Per la qual cosa la proportione di A,C,E, insieme, à B,D,F insieme, sarà come A à B. e 20. defin. del 7.

Di nuouo siano i numeri A,C,E maggiori de i numeri B,D,F. Perche A à B è come C à D, sarà, inuertendo, B ad A, f come D à C; e sarà B g parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C. Similmente, perche A à B è come E ad F, inuertendo, B ad A h sarà come F ad E; e sarà B parte, ò parti di A, K come F è parte, ò parti di E: ma per quel che si è dimostrato, B è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di C; sarà F parte, ò parti di E, come D è parte, ò parti di C. Per la qual cosa i numeri B,D,F sono vgualmente parte, ò parti de i numeri A,C,E; e per quel che si è dimostrato nel principio, i numeri B,D,F, l insieme, à i numeri A,C,E, insieme, sono come il numero B al numero A; ed inuertendo, i numeri A, C, E, m insieme, à i numeri B,D,F, insieme, sono come A à B, ch'era da dimostrarsi.

A .....; C .... E .....
B ..... D .. F ...

f Scol. alla prop. 10. del 7.
g 20. defin. del 7.
h Scol. alla prop. 10. del 7.
K 20. defin. del 7.
l 5. e 6. del 7.
m Scol. alla prop. 10. del 7.

SCOLIO.

Quì facilmente, con modo simile à quello tenuto nell'antecedente propositione si può prouare quel, che dimostra Euclide nell'vndecima propositione del quinto Libro; cioè.

Ne i numeri le proportioni, che sono le medesime ad vna terza, sono le medesime frà di loro.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, che il numero C al numero D; e sia E ad F come C à D. Dico che la proportione di A à B è l'istessa, che quella di E ad F. Siano prima li tre A, C, E minori de i tre B, D, F. Perche C à D è come A à B; e similmente C à D è come E ad F; sarà C parte, ò parti di D, a come A è parte, ò parti di B; e come E è parte, ò parti di F; dalche A è parte, ò parti di B, come E è parte, ò parti di F; e perciò A à B b sarà come E ad F. Di nuouo siano le tre A,C,E, maggiori delle tre B, D, F. Perche C à D, è come A à B, sarà, inuertendo, D à C c come B ad A: e similmente D à C sarà come F ad E; e per quel, che si è dimostrato, B ad A sarà come F ad E; ed inuertendo, A à B d sarà come E ad F, ch'era da dimostrarsi.

A ..... C .... E .....
B ..... D .. F ...

a 20. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c Scol. alla 20. prop. del 7.
d Scol. alla 20. prop. del 7.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se quattro numeri sono proportionali, permutandosi saranno ancora proportionali.

Siano i quattro numeri A,B,C,D, proportionali; e sia il numero A al

nume-

numero B, come C à D. Dico che, permutandosi, A à C sarà come B à D. Siano prima A, & C minori de i due B, & D; e sia A minore di C, come nella prima figura. Perche A à B è come C à D, sarà A [a] parte, o parti di B, come C è parte, ò parti di D; e permutando, il numero A [b] sarà parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C sarà come B à D. Di nuouo siano A, & C minori de' numeri B, & D, e sia A maggiore di C, come nella seconda figura. Perche A à B è come C à D, sarà A [c] parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di D; cioè C sarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di B: e permutando, C [d] sarà parte ò parti di A, come D è parte, ò parti di B: per la qual cosa C ad A [e] sarà come D à B; ed inuertendo, A à C [f] sarà come B à D. In oltre siano A, & C maggiori di B, & D, e sia A minore di C. Perche A à B è come C à D, inuertendo B ad A [g] sarà come D à C; donde B [h] sarà tale parte, ò parti di A, quale è D di C; e permutando, B [k] sarà parte, ò parti di D, come A è parte, ò parti di C; cioè A è parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D: e perciò la proportione di A à C [l] sarà come quella di B à D. Siano poi li due A, & C maggiori de i due B, & D; e sia A maggiore di C. Perche C à D, per ipotesi, è come A à B; inuertendo, D à C [m] sarà come B ad A; dalche D sarà parte, ò parti di C, [n] come B è parte, ò parti di A; e permutando, D [o] sarà parte, ò parti di B, come C è parte, ò parti di A: cioè C è parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; e perciò C ad A [p] sarà come D à B; ed inuertendo, A à C [q] sarà come B à D.

Di più se A è vguale à B, ed il numero C vguale à D, ed A sia minore di C, sarà A parte, ò parti di C, come B è parte, ò parti di D; e perciò A à C [r] sarà come B à D. Finalmente sia A vguale à B, ed il numero C vguale à D, e sia A maggiore di C; sarà C parte, ò parti di A, come D è parte, ò parti di B; dalche la proportione di C ad A, [s] sarà come quella di D à B; ed inuertendo, A à C [t] sarà come B à D, ch'era da dimostrarsi.

a 20. defin. del 7.
b 9. & 10. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 9. e 10. del 7.
e 20. defin. del 7.
f Scol. alla 10. prop. del 7.
g Scol. alla 10. prop. del 7.
h 20. defin. del 7.
K 9. & 10. del 7.
l 20. defin. del 7.
m Scol. alla 10. prop. del 7.
n 20. defin. del 7.
o 9. e 10. del 7.
p 20. defin. del 7.
q Scol. alla 10. del 7.
r 20. defin. del 7.
s 20. defin. del 7.
t Scol. alla 10. del 7.

A... C.....
B.... D.....

A..... C...
B..... D....

A..... C....
B..... D....

A..... C...
B..... D...

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se siano quanti numeri si vogliano da vna parte, ed altrettanti d'vguale moltitudine da vn altra parte, e siano proportionali à due à due; per l'egualità, il primo all'vltimo è come il primo all'vltimo.

Siano quanti numeri si vogliano A, B, C, da vna parte, & altrettanti, co-

me

me D,E,F, da vn altra parte, e ſia A à B, come D ad E, e B à C, come E ad F. Dico che per l'egualità, A à C ſarà come D ad F. Perche A à B, per ipoteſi, è come D ad E,

permutando, A à D [a] ſarà come B ad E. Similmente, eſſendo B à C come E ad F; ſarà, permutando, B ad E [b] come C ad F: ma B ad E è come A à D, ſarà A ad D [c] come C ad F; e permutando, A à C [d] ſarà come D ad F. Se i numeri propoſti ſaranno più di tre per parte, e ſia C à G come F ad H: perche A à C è come D ad F, e C à G è come F ad H, per quel che ſi è dimoſtrato, A à G ſarà come D ad H. Ed il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe i numeri propoſti ſaranno più di quattro per parte, il che era da dimoſtrarſi.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G ..... H .....

a 13. del 7.
b 13. del 7.
c Scol. alla 12. propoſ. del 7.
d 13. del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se l'vnità miſura vn numero, ed vn terzo numero miſura vgualmente vn altro numero; permutandoſi, l'vnità miſurerà il terzo numero, come il ſecondo miſura il quarto.

Miſuri l'vnità A il numero BC, come il numero D miſura il numero EF. Dico che permutandoſi, l'vnità A miſurerà il numero D, come il numero B C miſura il numero E F. Si diuida B C nelle vnità BG, GH, HC; e ſi diuida EF nelle parti vguali al numero D, che ſiano EI, IK, KF. Perche l'vnità A miſura BC, come il numero D miſura EF, la moltitudine delle vnità in BC ſarà vguale alla moltitudine delle parti in EF: e perche il numero D è vguale ad EI, l'vnità A miſurerà il numero D come l'vnità B G miſura il numero E I. Nell'iſteſſo modo l'vnità A miſura il numero D, come l'vnità G H miſura il numero IK; e come l'vnità HC miſura il numero KF; e perciò il numero BC miſura il numero EF, come l'vnità BG miſura l'vnità EI, cioè come l'vnità A miſura il numero D; il che era da dimoſtrarſi.

A . D ..
B. G. H. C E. . I. . K. . F

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri ſi multiplicano ſcambieuolmente, i prodotti ſono frà di loro vguali.

Siano due qualunque numeri A, & B, e, multiplicando il numero A per il numero B, il prodotto ſia il numero D; ſimilmente multiplicando il numero B per il numero A, il prodotto ſia il numero C. Dico che i prodotti D, & C, ſono frà di loro vguali. Si eſponga l'vnità E. Perche multiplicando il numero A

E.
A . . . B . . . .
D ..... C .....

per il numero B il prodotto è il numero D, ſarà D compoſto di tante volte A, [a] per quante vnità ſono in B; e perciò A miſura il numero D, come l'vnità E miſura il numero B; cioè, l'vnità E miſura il numero B, come il numero A miſura il numero D; e permutandoſi, l'vnità E miſura il numero A, [b] come il numero B miſura il numero D. In oltre, perche, multiplicando il numero B per il numero A, ſi produce il numero C, il prodotto C [c] ſarà compoſto di tante volte il numero B, per quante vnità ſono nel numero A; e perciò l'vnità E miſurerà tante volte il numero A, come il numero B miſura il numero C: ma ſi diſſe, che l'vnità E miſura il numero A, come il numero B miſura il numero D; il numero dunque B miſura vgualmente i numeri D, & C; e perciò i prodotti D, & C [d] ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

E.
A... B....
D..... C.....

a 15. defin. del 7.
b 15. del 7.
c 15. defin. del 7.
d 4. aſſioma del 7.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se vn numero, multiplicando due numeri, produce due altri numeri; i prodotti ſono frà di loro come i numeri multiplicati.

Sia il numero A, il quale, multiplicando il numero B, produca il numero D; e multiplicando il numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E, è come il numero multiplicato B al numero multiplicato C. Si prenda l'vnità F, ſarà il prodotto D compoſto di tante volte il numero B, [a] per quante volte l'vnità F miſura il numero A; ed il prodotto E ſarà compoſto di tante volte il numero C, [b] per quante volte l'vnità F miſura il numero A: per la qual coſa il numero B miſura il numero D, come l'vnità F miſura il numero A; ed il numero C miſura tante volte il numero E, per quante volte l'vnità F miſura il numero A; e perciò il numero B miſura il numero D, come il numero C miſura il numero E: dal che la proportione di B à D [c] ſarà come quella di C ad E; e permutando, il numero multiplicato B al numero multiplicato C, [d] ſarà come il prodotto D al prodotto E, che era da dimoſtrarſi.

F.
A...
B.. C....
D..... E.....

a 15. defin. del 7.
b 15. defin. del 7.
c 20. defin. del 7.
d 13. del 7.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se due numeri, multiplicando vn medeſimo numero, producono due altri numeri; i prodotti ſono frà di loro come i multiplicanti.

Siano i numeri A, & B; ed il numero A, multiplicando il numero C, produca il numero D; come ancora il numero B, multiplicando il mede-

ſimo

simo numero C, produca il numero E. Dico che il prodotto D al prodotto E sarà come il multiplicante A al multiplicante B. Perche il prodotto del numero A nel numero C [a] è vguale al prodotto del numero C nel numero A; ed il prodotto del numero A nel numero C, per ipotesi, è il numero D; multiplicando dunque C il numero A, produrrà il numero D: e per l'istessa ragione C multiplicando il numero B, produrrà il numero E; dal che i numeri A, & B, che prima erano multiplicanti, à questa seconda esposizione, vengono ad essere numeri multiplicati; e per l'antecedente propositione, il prodotto D al prodotto E sarà come il numero A al numero B, ch'era da dimostrarsi.

A.... B.....
C...
D..... E.....

[a] 16. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se quattro numeri sono proportionali, il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli estremi, è vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i medij: e se il prodotto fatto dalla multiplicatione degli estremi è vguale al prodotto de i medij; i quattro numeri sono proportionali.

Siano i quattro numeri proportionali A, B, C, D; e sia A à B come C à D. S'intenda multiplicato il primo A per il quarto D, ed il prodotto sia E. Similmente s'intenda multiplicato il secondo B per il terzo C, ed il prodotto sia F. Dico che i prodotti E, ed F, sono frà di loro vguali. E per dimostrarlo, si multiplichi il numero A per il numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D sono multiplicati dal numero A, ed i prodotti sono E, & G; sarà il prodotto E al prodotto G [a] come C à D: ma C à D, per ipotesi, è come A à B; sarà E à G [b] come A à B. In oltre perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà il prodotto F al prodotto G, [c] come A à B: ma fù dimostrato E à G essere come A à B; sarà E à G [d] come F al medesimo numero G: dal che E, ed F [e] ò sono vguali multiplici di G, ò vgualmente parte, ò le medesime parti &c. di G; e perciò sono frà di loro vguali, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A....
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

[a] 17. del 7.
[b] Scol. alla 12. del 7.
[c] 18. del 7.
[d] Scol. alla 12. del 7.
[e] 20. defin. del 7.

Di nuouo sia E il prodotto fatto dalla multiplicatione del primo A nel quarto D; ed F sia il prodotto del secondo B nel terzo C; e supposto il prodotto E vguale al prodotto F. Dico che A à B è come C à D. Si multiplichi di nuouo il numero A nel numero C, ed il prodotto sia G. Perche i numeri C, & D, multiplicati per il numero A, producono i numeri E, & G; sarà C à D [f] come E à G. Similmente perche i numeri A, & B, multiplicando il numero C, producono i numeri F, & G; sarà A à B [g] come

[f] 17. del 7.
[g] 18. del 7.

F à G. In oltre perche i prodotti E, ed F, ſono frà di loro vguali, preſo G come terza quantità, gli vguali numeri E, ed F ſaranno, ò vgualmente multiplici del numero G, ò vgualmente parte, ò le medeſime parti, ouero conterranno vgualmente G in qualche parte, ò parti di G; e per la 20. definitione di queſto, ſarà E à G come F à G: ma F à G, per quel che ſi è dimoſtrato, è come A à B; e la proportione di E à G è come C à D; ſarà A à B [h] come C à D, il che era da dimoſtrarſi.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

h Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se tre numeri ſono proportionali, quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, multiplicato in ſe medeſimo; e ſe quello, che ſi produce dagli eſtremi, è vguale à quello, che ſi produce dal medio, i tre propoſti numeri ſono proportionali.

Siano i tre numeri proportionali A, B, C; e ſia A à B come B à C. Dico prima che il prodotto fatto da gli eſtremi A, & C, è vguale al prodotto di B in ſe medeſimo; cioè vguale al quadrato di B. Sia eſpoſto il numero D vguale al numero B, ſarà D à C, come B al medeſimo numero C: ma B à C, per ipoteſi, è come A à B; ſarà A à B [a] come D à C; e per l'antecedente propoſitione, il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, & C, è vguale al prodotto de i medij B, & D: ma il prodotto di B in D è vguale [b] al prodotto di B in ſe medeſimo; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto di B in ſe medeſimo, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A . . . . . .
B . . . . . D . . . . . .
C . . . .

a Scol. alla 12. del 7.

b 18. defin. del 7.

Di nuouo ſia il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto del medio B in ſe medeſimo. Dico che A à B è come B à C. Si prenda di nuouo il numero D vguale al numero B; ſarà il prodotto di B in D [c] vguale al prodotto di B in ſe medeſimo: ma il prodotto di B in ſe medeſimo, per ipoteſi, è vguale al prodotto de gli eſtremi A, & C; ſarà il prodotto de gli eſtremi A, & C, vguale al prodotto de i medij B, & D: e per la ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, ſarà A à B come D à C: ma D à C è come B à C (ſtante che D è vguale à B) ſarà A à B [d] come B à C, ch'era da dimoſtrarſi.

c 18. defin. del 7.

d Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Di tutti i numeri, che hanno la medeſima proportione, i minimi miſurano vgualmente i maggiori; cioè il minore miſura il minore, ed il maggiore miſura il maggiore.

Siano

Siano i numeri AB, CD minimi nella proportione di due altri maggiori, come ſono i due E, ed F; cioè che AB à CD ſia come E ad F; e ſia AB maggiore di CD; ed ancora E ſia maggiore di F.

Dico che AB miſura il maggiore E, come CD miſura il minore F; cioè l'antecedente miſura l'antecedente, ed il conſeguente miſura vgualmente il conſeguente. Perche AB à CD, per ipoteſi, è come E ad F; permutando, AB ad E [a] ſarà come CD ad F: mà AB è minore di E, ed il numero CD è minore di F; ſarà AB [b] parte di E, come CD è parte di F; ſtante che i due AB, CD non poſſono eſſere parti de i due E, ed F; perche, ſe poſſono eſſer parti de i due E, ed F, ſia diuiſo AB nelle parti di E, che ſiano AG, GB; e ſia diuiſo ancora CD nelle parti di F, che ſiano CH, HD: e perche AB ad E è come CD ad F; tale parti ſarebbe AB di E, [c] quale parti è CD di F; e perciò la moltitudine delle parti in AB ſarà vguale alla moltitudine delle parti in CD; e ſarà AG tale parte di E, quale è CH di F; per la qual coſa AG ad E [d] ſarà come CH ad F; e permutando, AG à CH [e] ſarà come E ad F: mà, per ipoteſi, AB à CD è come E ad F, ſarà AG à CH [f] come AB, à CD: mà AB, & CD ſono maggiori di AG, & CH, non ſaranno dunque i due AB, CD i minimi nella proportione di AB à CD; mentre nella medeſima proportione ſarebbero i minori AC, CH, ch'è contro all'ipoteſi, eſſendoſi ſuppoſto i due AB, CD minimi nella proportione di AB, à CD. Non dunque AB è parti di E, come CD è parti F; mà AB è parte di E, come CD è parte di F; è perciò AB miſura il numero E, come CD miſura F, il che era da dimoſtrarſi.

A... G.. B
C.. H.. D
E.....
F.....

[a] 13. del 7.
[b] 26. defin. del 7.
[c] 20. defin. del 7.
[d] 20. defin. del 7.
[e] 13. del 7.
[f] Scol. alla 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se ſaranno tre numeri da vna parte, e tre altri da vn altra parte, i quali, preſi à due à due, ſiano nella proportione perturbata; per l'egualità, il primo all'vltimo ſarà come il primo all'vltimo.

Siano i tre numeri A, B, C, da vna parte, e tre altri come D, E, F da vn altra parte nella perturbata proportione; cioè A à B ſia come E ad F; e ſia B à C come D ad E. Dico che per l'egualità, A à C è come D ad F.

Perche A à B è come E ad F, il prodotto de gli eſtremi A, & F, [a] è vguale al prodotto de i medij B, ed E. Similmente perche B à C è come D ad E, il prodotto fatto da gli eſtremi B, ed E, [b] è vguale al prodotto de i medij C, & D; mà il prodotto de i due B, ed E, fù dimoſtrato vguale al prodotto de i due A, ed F; ſarà il prodotto de i due A, & F, vguale al prodotto de i due C, & D; cioè il prodotto de gli eſtremi A, ed F, vguale al prodotto de i medij C, & D; e perciò la proportione di A à C [c] ſarà come quella di D ad F, come fù propoſto dimoſtrare.

A.....
B... D....
C..... E.....
F..

[a] 19. del 7.
[b] 19. del 7.
[c] 19. del 7.

SCO-

SCOLIO.

Qui si possono aggiungere gli altri modi d'argumentare vsati da Euclide nel quinto Libro;

I.

Se quattro numeri sono proportionali, componendo, saranno ancora proportionali.

Sia il numero A al numero B, come il numero C al numero D. Dico che, componendo, A, B, insieme, al conseguente B, sarà come C, D, insieme, al conseguente D. Perche A à B è come C à D, permutando, A à C [a] *sarà come B à D, e perciò* [b] *A, B insieme, à C, D, insieme, sarà come B à D; e permutando, A, B, insieme, à B,* [c] *sarà come C, D, insieme, à D, ch'era da dimostrarsi.*

A..... B...
C.....D.....

a 13. del 7.
b 12. del 7.
c 13. del 7.

I I.

Se quattro numeri sono proportionali, diuidendo, saranno proportionali.

Habbia A, e B insieme, à B, l'istessa proportione, quale hà C, e D insieme, à D: Dico che, diuidendo A à B, sarà come C à D. Perche il numero A, B, al numero B è come il numero C, D al numero D; [a] *permutando, A, B, insieme, à C, D, insieme, sarà come la parte B alla parte D; e perciò l'auanzo A* [b] *all'auanzo C sarà come A, B, à C, D; ma A, B, à CD, è come B à D; sarà A à C* [c] *come B à D; e permutando A à B* [d] *sarà come C à D, come fù proposto dimostrare.*

A..... B...
C.....D.....

a 13. del 7.
b 11. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 13. del 7.

I I I.

Se quattro numeri sono proportionali, per la conuersione della proportione, saranno proportionali.

Habbia il numero AB al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero C D al numero D. Dico che, per la conuersione della proportione, hauerà AB ad A l'istessa proportione, quale hà C D à C. Perche AB à B hà l'istessa proportione, quale ha CD à D, diuidendo, A à B, per l'antecedente dimostratione, sarà come C à D; ed inuertendo, B ad A [c] *sarà come D à C; e componendo, AB ad A, per la prima delle antecedenti dimostrationi, sarà come CD à C, ch'era da dimostrarsi.*

A..... B....
C.....D.....

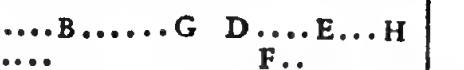
c Scol. alla 10. del 7.

I V.

Se di sei numeri, il primo al secondo è come il terzo al quarto; ed il quinto al secondo è come il sesto al quarto;

il

il numero compoſto del primo è quinto al ſecondo, ſarà come il numero compoſto del terzo, e ſeſto al quarto.



Sia il primo AB al ſecondo C, come il terzo DE al quarto F; ed il quinto BG al ſecondo C, ſia come il ſeſto EH al quarto F. Dico che AG, compoſto del primo è quinto, al ſecondo C, ſarà come DH, compoſto del terzo, e ſeſto, al quarto F. Perche BG à C è come EH ad F; inuertendo, C à BG [a] ſarà come F ad EH. In oltre, perche AB à C è come DE ad F; e ſi è dimoſtrato che C à BG è come F ad EH; per l'egualità, AB à BG [b] ſarà come DE ad EH; e componendo, AG à GB, per la prima delle antecedenti dimoſtrationi, ſarà come DH ad HE: ma per ipoteſi BG à C è come EH ad F; ſarà, per l'egualità, AG à C, [c] come DH ad F, ch'era da dimoſtrarſi.

a Scol. alla 10. del 7.
b 14. del 7.
c 14. del 7.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Quei numeri, che ſono primi frà di loro, ſono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medeſima proportione.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi. Dico che queſti ſono i minimi di tutti gli altri, che ſono nella proportione di A à B. Se i numeri primi A, & B non ſono i minimi nella proportione di A à B, due altri minori di A, & B, haueranno la medeſima proportione di A à B: ſiano quelli i notati C, & D. Perche C, & D ſono minori di A, & B, e la proportione di C à D è come A à B, per la 21. propoſitione di queſto, C miſurerà A come D miſura B; cioè tante volte C miſura A, per quante volte D miſura B. Sia E il numero delle volte, che C miſura A, ſarà E il numero delle volte, che D miſura B; dal che tante volte C miſura A, ed il numero D miſura B, per quante vnità ſono nel numero E; per la qual coſa l'vnità miſura tante volte il numero E, per quante volte C miſura A; e permutandoſi, l'vnità miſura il numero C, [a] come E miſura A. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che l'vnità miſura D, come E miſura B. Donde è manifeſto, che il numero E miſura il numero A, e miſura ancora il numero B; ſi che il numero E ſarà commune miſura de i numeri A, & B; e perciò i numeri A, & B non ſono numeri primi, [b] ma compoſti, ch'è contro all'ipoteſi, mentre i numeri A, & B gli habbiamo ſuppoſti frà di loro primi. Non dunque altri numeri minori di AB poſſono eſſere nella proportione di A à B, ed in conſeguenza i numeri A, & B ſono i minimi, come fù propoſto dimoſtrare.

a 15. del 7.
b 14. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Di tutti i numeri, che ſono nella medeſima proportione, i minimi ſono frà di loro primi.

Siano

Siano i numeri A, & B, i minimi di tutti quelli, che hanno la medeſima proportione di A à B. Dico che ſono frà di loro primi; cioè, che niſſun'altro numero gli miſura, fuor che l'vnità. Se non ſono frà di loro primi, qualche numero ſarà loro commune miſura; ſia quello, ſe è poſſibile, il numero C, il quale miſuri A tante volte, per quante vnità ſono nel numero D; e miſuri il numero B tante volte, per quante vnità ſono nel numero E. Preſo dunque il numero C tante volte, per quante vnità ſono in D, [a] produrrà il numero A; e preſo il medeſimo numero C tante volte, per quante vnità ſono in E, produrrà il numero B. Per la qual coſa, multiplicando il numero C per i numeri D, ed E, i prodotti ſaranno A, & B; e perciò il prodotto A al prodotto B [b] ſarà come il multiplicante D al multiplicante E: ma i numeri D, ed E ſono minori de i numeri A, & B, ſtante che ſono parti di A, & B; i numeri dunque A, & B, che ſono nella proportione di D ad E, non ſono i minimi, ch'è contro all'ipoteſi; mentre i numeri A, & B, gli habbiamo ſuppoſti minimi di tutti quelli, che ſono nella medeſima proportione. Non dunque il numero C è miſura commune de i numeri A, & B. Per la qual coſa i numeri A, & B ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare.

A ..... B .....
C ——
D —— E ——

a 9. aſſioma

b 18. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri ſono primi frà di loro, quel numero, che miſura vno di eſſi, ſarà numero primo riſpetto all'altro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi; ed vn altro numero, come C, miſuri il numero A. Dico che i numeri C, & B ſono frà di loro primi. Se i numeri C, & B non ſono frà di loro primi, qualche numero ſarà loro commune miſura; ſia quello, s'è poſſibile, il numero D. Perche il numero D miſura C, ed il numero C, per ipoteſi, miſura A; il numero D [a] dunque miſurerà il numero A; ma per la ſuppoſitione fatta, il numero D miſura il numero B; ſarà il numero D commune miſura de i numeri A, & B: per la qual coſa i numeri A, & B, non ſono frà di loro primi, [b] ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque il numero D è commune miſura de i due C, & B; ma i due C, & B ſono frà di loro primi, il che era da dimoſtrarſi.

A ..... B .....
C ... D ——

a 11. aſſiom. del 7.

b 14. deſin. del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se due numeri ſono primi à qualche numero, il prodotto, fatto dalla loro multiplicatione, ſarà ancora primo al medeſimo numero.

Sia ciaſcuno de'numeri A, & B, primo al numero C; e multiplicando

A per

A per B, ouero B per A, il prodotto ſia D. Dico che i numeri D, & C ſono frà di loro primi. Se i numeri D, & C non ſono frà di loro primi, qualche numero ſarà loro commune miſura: ſia quello, ſe è poſſibile, il numero E, il quale miſuri il numero D tante volte, per quante vnità ſono nel numero F; compoſto dunque tante volte il numero E, per quante vnità ſono nel numero F, tal compoſto ſarà vguale al numero D; e perciò, multiplicando il numero E per il numero F, [a] il prodotto ſarà il numero D. Ed all'incontro, multiplicando il numero F per il numero E, [b] il prodotto ſarà ſimilmente il numero D; ma il numero D è il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B; il prodotto dunque fatto dalla multiplicatione de i due E, & F, ſarà vguale al prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A, & B. Poſto E come prima quantità, A ſeconda, B terza, ed F quarta. Eſſendo il prodotto della prima E, e quarta F, vguale al prodotto della ſeconda A, e terza B; ſarà E ad A [c] come B ad F. In oltre, perche A, & C, per ipoteſi, ſono frà di loro primi; e per la fatta ſuppoſitione il numero E miſura il numero C; i due numeri E, & A, [d] ſaranno frà di loro primi; e perciò i due E, & A [e] nella loro proportione ſono i minimi: ma E ad A è come B ad F, in conſeguenza E miſurerà B [f] come A miſura F. Hor perche E miſura B, e per la fatta ſuppoſitione, miſura ancora C; i due C, & B [g] non ſono frà di loro primi, ch'è contro all'ipoteſi, mentre i due A, & B furono ſuppoſti primi al numero C. Non dunque il numero E è commune miſura frà i due D, & C; ma i due D, & C ſono frà di loro primi, ch'era da dimoſtrarſi.

A ..... B...
C .....
D .....
E —— F ——

a 9. aſſioma del 7.
b 16. del 7.
c 19. del 7.
d 27. del 7.
e 23. del 7.
f 21. del 7.
g 14. def. del 7.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se due numeri ſono frà di loro primi, il prodotto fatto da vno in ſe medeſimo, ſarà primo all'altro.

Siano i due numeri A, & B frà di loro primi, e dalla multiplicatione di A in ſe medeſimo ſe ne produca il numero C. Dico che i numeri C, & B ſono frà di loro primi. Si eſponga il numero D vguale al numero A; i numeri D, & B ſaranno frà di loro primi; e per l'antecedente propoſitione, il prodotto di D in A ſarà primo al numero B: ma il prodotto di D, A, è vguale al prodotto di A in ſe medeſimo, cioè vguale al prodotto C; ſarà il prodotto C primo al numero B. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il prodotto fatto dalla multiplicatione di B in ſe medeſimo è primo al numero A, come fù propoſto dimoſtrare.

A .... B.....
C .....
D ....

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVIII.

Se due numeri ſono primi à due altri numeri, l'vno all'

altro ; ancora i prodotti fatti dalle loro multiplicationi ſono frà di loro primi.

Siano i due numeri A, & B, i quali ſiano primi alli due C, & D ; cioè i due A,& B,ogn'vno da per ſe, ſia primo al numero C ; ed i medeſimi A , & B , ſeparatamente ſiano primi al numero D ; e ſia E il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due A., & B ; come ancora il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due C, & D ſia F . Dico che i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi . Perche i due A, & B, per ipoteſi, ſono primi al numero C ; il prodotto de i due A,& B , cioè il numero E, [a] ſarà primo al numero C . Similmente eſſendo i due A, B, primi al numero D , il prodotto de i due B, A , cioè il numero E , [b] ſarà primo al numero D ; donde ciaſcuno de i due C, D , ſarà primo al numero E . Hor perche i due C, D, ogn'vno da per ſe, è primo al numero E , il prodotto de i due C,& D, cioè il numero F, [c] ſarà primo al numero E . Per la qual coſa i due prodotti E, ed F ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare .

A . . . . . B . . .
E . . . . . .
C . . . D . .
F . . . . .

a 26. del 7.
b 26. del 7.
c 26. del 7.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se due numeri ſono primi frà di loro , e ciaſcuno di queſti ſi multiplichi in ſe medeſimo , ed ogn'vno multiplichi il ſuo prodotto; e di nuouo ogn'vno multiplichi il ſuo vltimo prodotto , e con queſt'ordine in infinito : i primi due prodotti ſono frà di loro primi ; i ſecondi due prodotti ſono primi frà di loro ; e con queſt'ordine i terzi ſono frà di loro primi ; e ſempre gli eſtremi , cioè vltimi prodotti , ſono primi frà di loro.

Siano i numeri A, & B frà di loro primi ; e ſia multiplicato il numero A in ſe medeſimo , ed il prodotto ſia C ; ſimilmente ſia multiplicato il numero B in sè medeſimo, ed il prodotto ſia D . Dico che i prodotti C, & D ſono frà di loro primi . Di più ſia multiplicato il prodotto C dal numero A , e ne venga il numero E ; e ſia multiplicato il prodotto D dal numero B, e ne venga il numero F . Dico parimente , che i prodotti E , ed F ſono frà di loro primi . E finalmente , multiplicandoſi i prodotti E , & F per li numeri A, & B ; cioè E ſi multiplichi per A,ed il numero F per B ; e gli auuenimenti ſiano G, ed H ; e queſti multiplicati per li medeſimi numeri A, & B, ne venghino i prodotti K, ed L . Dico che i prodotti G, ed H ſono frà di loro primi ; come ancora i prodotti K , ed L ſono primi frà di loro. Perche i due numeri A , B ſono frà di loro primi, il prodotto C,fatto dalla multiplicatione di A in ſe medeſimo [a] ſarà primo all'al-

A	3	2	B
C	9	4	D
E	27	8	F
G	81	16	H
K	243	32	L

a 27. del 7.

tro

tro numero B. E considerando i due numeri C, & B frà di loro primi, il prodotto fatto del numero B, in se medesimo, cioè il numero D, [b] sarà primo al numero C; dal che i due prodotti C, & D sono frà di loro primi, ch'era prima da dimostrarsi. [b] 27. del 7.

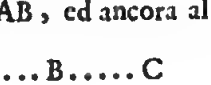
Di nuouo, perche B, ed A sono frà di loro primi, il prodotto di B in se medesimo, cioè il numero D, [c] sarà primo al numero A: fù dimostrato il prodotto C essere primo al numero B; saranno i due A, & C, primi al numero B, ed ancora al numero D; e perciò i due A, & C, sono primi à i due B, & D. Per la qual cosa il prodotto de i due A, & C, [d] cioè il numero E, sarà primo al prodotto de i due B, & D, cioè al numero F, e così i due E, ed F sono frà di loro primi. In oltre perche A, & C sono primi al numero B, il prodotto de i due A, & C, cioè il numero E, [e] sarà primo al numero B; similmente perche i due B, & D sono primi al numero A; sarà il prodotto de i due B, & D, cioè il numero F, [f] primo al numero A: ma i due A, et B, per ipotesi, sono frà di loro primi, & i due E, ed F sono stati dimostrati primi frà di loro; in conseguenza i due A, ed E sono primi alli due B, ed F; ed il prodotto fatto da i due A, ed E, cioè il numero G, [g] sarà primo al prodotto fatto da i due B, ed F, cioè al numero H; donde i numeri G, ed H sono frà di loro primi. Finalmente, essendo i due A, ed E primi al numero B; il prodotto fatto da essi, cioè il numero G, [h] sarà primo al numero B. E similmente, perche i due F, & B sono primi al numero A; il prodotto de i medesimi F, & B, [K] cioè H, sarà primo al numero A: mà i numeri A, & B, per ipotesi, sono frà di loro primi; ed i numeri G, H, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro primi; i numeri dunque A, & G sono primi à i numeri B, ed H: dal che il prodotto de i due A, & G, cioè il numero K, [l] sarà primo al prodotto de i due B, ed H, cioè al numero L. Il medesimo si proverà, se le multiplicationi ascendessero à maggior moltitudine, il che era da dimostrarsi.

c 27 del 7. d 28. del 7. e 26. del 7. f 26. del 7. g 28. del 7. h 26. del 7. K 26. del 7. l 28. del 7.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se due numeri sono frà di loro primi, giunti insieme, il loro aggregato sarà primo all'vno, ed all'altro; e se l'aggregato di due numeri, giunto insieme, sarà primo ad vno di essi, quei numeri sono frà di loro primi.

Siano prima i numeri AB, BC, frà di loro primi. Dico che, giunti insieme, il loro aggregato AC sarà primo al numero AB, ed ancora al numero BC. Se i numeri AC, AB non sono frà di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello il numero D; il numero D dunque misura AC, e misura la parte AB; e perciò misurerà ancora [a] l'auanzo BC; si che il numero D sarà misura commune de i due AB, BC; dal che i numeri AB, BC non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Non dun-



a 12. assioma del 7.

que il numero D è commune misura de i due AC, AB; mà i due AC, AB sono frà di loro primi. Nell'istesso modo si proverà, che i due AC, BC sono frà di loro primi, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo supposto che il numero AC sia primo al numero AB, ouero BC. Dico che i numeri AB, BC sono frà di loro primi. Se non sono fra di loro primi, qualche numero sarà loro commune misura; sia dunque il numero D la loro commune misura. Perche il numero D misura ambidue i numeri AB, BC; misurerà ancora [b] il tutto AC; dal che il numero D sarà commune misura de i due AC, AB; e perciò i numeri AC, AB non sono frà di loro primi, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero D è commune misura de i due AB, BC; mà i numeri AB, BC sono frà di loro primi, il che era da dimostrarsi.

A ..... B C
D ——

[b] 20. assiom. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, ne segue, che se vn numero composto di due numeri è primo ad vno di quelli, sarà ancora primo all'altro; poiche se i due AC, AB, sono frà di loro primi, per quel che si è dimostrato nella seconda parte, saranno i due AB, BC frà di loro primi; e per quel che si è dimostrato nella prima parte, i due AC, CB sono frà di loro primi.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Ogni numero primo sarà primo ad ogni numero, che non misura.

Sia il numero primo A, il quale non misuri il numero B. Dico che i numeri A, & B sono frà di loro primi. Se i numeri A, & B non sono frà di loro primi, qualche numero, oltre l'vnità, sarà loro commune misura; sia quello il numero C; il numero C dunque misurerà il numero B, e misurerà ancora il numero A; dal che il numero A non sarà primo; ch'è contro all'ipotesi: non dunque il numero C è commune misura delli due A & B, mà i numeri A, & B sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A ..... B .....
C ——

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

Se due numeri, multiplicandosi frà di loro, producono vn altro numero; ed vn numero primo misuri il prodotto;

quel

quel numero primo misurerà ancora vno di quei numeri multiplicati.

Siano i due numeri A, & B, i quali, multiplicandosi frà di loro, producano il numero C; e supposto che il numero primo D misuri il prodotto C. Dico che il numero primo D, se non misura ambidue i numeri A, & B, almeno ne misurerà vno solo. Supposto che D non misuri il numero A, i numeri A, & D, [a] saranno primi frà di loro. In oltre misurando D il numero C, lo misurerà secondo qualche moltitudine di vnità; lo misuri, per esempio, tante volte, per quante vnità sono nel numero E; sarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de i due numeri D, ed E, vguale al numero C: ma il prodotto fatto da i due A, & B, per ipotesi, è il numero C; sarà il prodotto fatto da i due D, ed E, vguale al prodotto fatto da i due A, & B; dal che il primo D al secondo A [b] sarà come il terzo B al quarto E: ma i due D, ed A, [c] per quel che si disse, sono primi frà di loro, in conseguenza [d] saranno i minimi nella loro proportione di D ad A; per la qual cosa misureranno vgualmente gli altri, che sono nella proportione di D ad A: [e] ma si è dimostrato, che D ad A è come B ad E, i minimi dunque D, ed A misureranno vgualmente i numeri B, ed E; cioè l'antecedente D misura l'antecedente B, ed il conseguente A misura il conseguente E. Per la qual cosa se D non misura A, almeno misurerà il numero B, come fù proposto dimostrare.

A .... B .....
C .....
D .... E .....

[a] 31. del 7.
[b] 19. del 7.
[c] 31. del 7.
[d] 23. del 7.
[e] 11. del 7.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Ogni numero composto è misurato da qualche numero primo.

Sia qualunque numero composto A. Dico che il numero A è misurato da qualche numero primo. Sia dunque misurato il numero A da qualche numero B; se B è numero primo, si sarà sodisfatto à quanto si è proposto. Se poi B è numero composto, questo sarà misurato da qualche altro numero C, il quale ò sarà numero primo, ouero numero composto. Se è numero primo, perche C misura B, ed il numero B misura A, il numero C [a] misurerà ancora il numero A; ed in tal caso il numero A sarà misurato dal numero primo C, ch'è il nostro proposto. Mà se C non è numero primo, necessariamente qualche altro numero lo misurerà; e perche il numero non si diminuisce in infinito, si peruerrà finalmente à qualche numero, che nissun altro numero lo misurerà; cioè che sarà misurato solamente dall'vnità; per la qual cosa quello sarà numero primo, il quale, perche misura [b] tutti gl'antecedenti, misurerà ancora il numero composto A, come fù proposto dimostrare.

A .....
B ..... C ..

[a] 11. assioma del 7.
[b] 11. assiom. del 7.

In altro modo. Perche A, per ipotesi, è numero composto, perciò sarà misurato da qualche numero, ouero da più numeri. Sia il minimo

di

di quelli, che lo misurano, il numero B. Dico che il minimo B è numero primo. Sc B non è numero primo, lo misuri, s'è possibile, qualche numero C. Perche C misura il numero B, ed il numero B misura il numero A; il numero C [c] misurerà ancora il numero A: mà il numero B è supposto il minimo di tutti quelli, che misurano il numero A, sarà dunque C maggiore di B, dal che il numero maggiore C misura il minore B, ch'è impossibile: non dunque il numero B è composto, mà è numero primo, come fù proposto dimostrare.

c 11. assioma del 7.

A.....
B... C—

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Ogni numero ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo.

Figura antecedente.

Sia proposto qualunque numero A. Dico che il numero A, ò è numero primo, ouero è misurato da qualche numero primo. Perche ogni numero ò è composto, ouero è numero primo; se il numero A è numero primo, il tutto sarà concluso; se poi è numero composto, per l'antecedente propositione, qualche numero primo lo misura; e perciò ogni numero ò è primo, ouero è misurato da qualche numero primo, come fù proposto.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXXV.

Dati quanti numeri si vogliano, ritrouare i minimi, che hanno la medesima proportione con i dati numeri.

Siano quanti numeri si vogliano A, B, C, i quali habbiano quali si siano proportioni; cioè, ò che la proportione di A à B sia come quella di B à C, ò le proportioni di A à B, e di B à C, non siano simili; e si vogliano ritrouare altretanti numeri, i quali siano i minimi nelle medesime proportioni di A à B, e di B à C. Perche i numeri A, B, C, ò sono frà di loro primi, ouero sono cõposti; se sono frà di loro primi; per la 24. propositione di questo, i medesimi A, B, C saranno i minimi nelle loro proportioni di A à B, e di B à C, ch'è il nostro proposto. Se poi non sono frà di loro primi, si troui [a] la loro massima commune misura, che sia il numero D, la quale misuri i numeri A, B, C secondo le vnità dei numeri E, F, G. Dico che i numeri E, F, G, sono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C. Perche il numero D misura i numeri A, B, C, per li numeri E, F, G, multiplicando D, ogn'vno de' numeri E, F, G, [b] produrrà i numeri A, B, C; e per la 18. propositione di questo, i numeri E, F, G haueranno le

A..... B.... C.....
D..
E... F.. G....
H— I— K—
L—

a 3. del 7.

b 9. assioma del 7.

mede-

medeſime proportioni, che hanno i numeri A, B, C. In oltre ſe i numeri E, F, G non ſono i minimi, altri numeri, nelle medeſime proportioni di E ad F, e di F à G, cioè di A a B, e di B à C, minori di E, F, G, ſaranno i minimi. Siano quelli, s'è poſſibile, i minimi H, I, K, i quali per la 21. propoſitione di queſto, miſureranno vgualmente i numeri A, B, C. Gli miſurino, per eſſempio, ſecondo qualche numero L, ſi che multiplicando L per li numeri H, I, K, produrrà [c] i numeri A, B, C; ed all'incontro il numero L miſurerà [d] i numeri A, B, C, per li numeri H, I, K. Si conſiderino quattro numeri, de quali il primo ſia E, il ſecondo H, il terzo L, ed il quarto D. Perche il primo E, multiplicando il quarto D, produce A; ed il ſecondo H, multiplicando il terzo L, produce il medeſimo numero A; ſarà il prodotto del primo E nel quarto D, vguale al prodotto del ſecondo H nel terzo L: e perciò ſarà il primo E al ſecondo H, [e] come il terzo L al quarto D. Mà il numero E, per la fatta ſuppoſitione, è maggiore di H; il numero dunque L ſarà maggiore di D. Hor perche L miſura i numeri A, B, C, eſſendo maggiore di D, non ſarà D la maſſima commune miſura de i numeri A, B, C, ch'è contro all'ipoteſi: non dunque altri numeri minori de gli eſpoſti E, F, G, ſono minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C; mà i medeſimi E, F, G ſono i minimi nelle proportioni di A à B, e di B à C, che era da farſi, e dimoſtrarſi.

c 9. aſſioma del 7.

d 8. aſſioma del 7.

e 19. del 7.

COROLLARIO.

Da quel, che s'è detto, è manifeſto, che quanti ſi voglia numeri ſono miſurati dalla loro maſſima commune miſura per numeri, i quali ſono i minimi nella proportione de i numeri miſurati; ſtante che ſi è dimoſtrato, che la maſſima commune miſura D miſura i numeri A, B, C, per i numeri E, F, G, i quali ſono minimi nella continuata proportione di A à B, e di B à C.

SCOLIO.

Perche ſpeſſe volte biſognerà trouare due numeri minimi in vna data proportione, perciò aggiungo quì il ſeguente problema, come fà il Commandino, ed il Clauio.

Dati quanti ſi voglia numeri continuamente proportionali, ritrouare due numeri minimi nella proportione de i dati numeri.

Sia-

Siano i dati numeri A,B,C,D,E, in continua proportione; cioè che A à B sia come B à C; & B à C come C à D; e C à D come D ad E; e si vogliano ritrouare due numeri minimi nella proportione di A à B. Se i numeri A, & B sono numeri primi, quelli saranno i minimi nella proportione di A à B;

A	B	C	D	E
16	24	36	54	81
H 8				
		2	3	
		F	G	

ma se non saranno numeri primi, si troui [a] *la massima commune misura de i due A, & B, che sia il numero H; misuri poi H il numero A per il numero F; ed il medesimo numero H misuri B per il numero G; per il Corollario antecedente, i numeri F, & G saranno i minimi nella proportione di A à B, e di B à C &c.*

[a] 2. del 7.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXXVI.

Dati due numeri, ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da quelli.

Siano dati qualunque numeri A, & B, e s'habbia da ritrouare il minimo numero, ch'è misurato da i proposti numeri A, & B. Supposto prima che i dati numeri A, & B siano frà di loro primi, ed il numero A multiplichi il numero B, ouero il numero B multiplichi il numero A, e produca il numero C. Dico che il numero C è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i numeri A, & B. Che i numeri A, & B misurino il numero C, è manifesto; poiche nascendo il numero C dalla multiplicatione di A in B, ò di B in A, sarà il numero C composto di tante volte A, per quante vnità sono nel numero B; e sarà ancora composto di tante volte B, per quante vnità sono nel numero A: e perciò il numero C [a] è misurato dal numero A, per il numero B, ed è misurato dal numero B per il numero A. Che poi C sia il minimo di tutti quelli, che sono misurati da A, & B, lo dimostraremo in questo modo. Se il numero C non è il minimo, qualche altro numero minore di C sarà misurato da i numeri A, & B; sia quello il numero D, il quale sia misurato dal numero A per il numero E, e sia misurato da B, per il numero F; si che A, multiplicando E, [b] produrrà il numero D; ed il numero B, multiplicando F, produrrà il medesimo numero D: per la qual cosa il prodotto di A in E sarà vguale al prodotto di B in F. Si considerino i quattro numeri, il primo de'quali sia A, il secondo B, il terzo F, ed il quarto E. Perche il prodotto del primo A nel quarto E è vguale al prodotto del secondo B nel terzo F, sarà il primo A al secondo B, come il terzo F al quarto E; e perche i due A, & B gli habbiamo supposti numeri primi, perciò [d] saranno i minimi nella loro proportione di A à B, ed in conseguenza i numeri A, & B e misureranno vgualmente tutti gli altri, che hanno la medesima proportione: ma A à B si disse essere come F ad E, i numeri dunque A, & B misurano vgualmente i numeri F, ed E; cioè

[a] 7. assiom. del 7.
[b] 9. assiom. del 7.
[c] 19. del 7.
[d] 23. del 7.
[e] 21. del 7.

l'ante-

l'antecedente A misura l'antecedente F, ed il conseguente B misura il conseguente E. In oltre perche A, multiplicando B, produce, per ipotesi, C, e multiplicando E produce, per costruttione, D, sarà la proportione di B [f] ad E come quella di C à D: ma B, per quel che si è dimostrato, misura E, dunque C misurerà il numero D, fù supposto D minore di C, il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri A, & B misurano altro numero minore di C; ma il minimo, che misurano, sarà C, che era da dimostrarsi nel primo luogo. f 17. del 7.

Di nuouo non siano i numeri A, & B frà di loro primi. Si trouino i due numeri C, & D [g] minimi nella proportione di A à B; i quattro numeri A,B,C,D sono proportionali, ed il prodotto de gli estremi A, & D, [h] sarà vguale al prodotto de i medij C, & B, sia quel prodotto il notato E. Dico che il numero E è il minimo di tutti gli altri, che sono misurati da i due A,& B. Perche A, multiplicando D, produce il numero E; ed il numero B, multiplicando C, produce l'istesso numero E; perciò [K] i numeri A, & B misurano il numero E. Che finalmente il numero E sia il minimo di quelli, che sono misurati da A, & B, si proua in questo modo. Se il numero E non è il minimo, qualche altro numero minore di E sara misurato da A, & B; sia quello, se è possibile, il numero F, il quale sia misurato da A per il numero G, e sia misurato da B per il numero H: il prodotto di A in G [l] sarà vguale ad F; ed il prodotto di B in H sarà vguale all'istesso numero F; e perciò il prodotto di A in G sarà vguale al prodotto di B in H. Si considerino quattro numeri, cioè A primo, B secondo, H terzo, e G quarto. Perche il prodotto del primo A nel quarto G è vguale al prodotto del secondo B nel terzo H, sarà il primo A al secondo B, [m] come il terzo H al quarto G. E perche i numeri C, & D sono minimi nella proportione di A à B; ouero di H à G; perciò i numeri C, & D [n] misureranno vgualmente i numeri G, ed H; cioè l'antecedente C misurerà l'antecedente H, ed il conseguente D misurerà il conseguente G. Si considerino i due D, & G come numeri multiplicati, ed A multiplicante. Perche A multiplicando D, produce E, ed il medesimo numero A, multiplicando G, produce F; sarà D à G [o] come E ad F; ma D misura G, per quel che si è dimostrato, il numero E misura il numero F; fù supposto F minore di E; il numero maggiore dunque misura il minore, ch'è impossibile. Non dunque F è il minimo de i numeri misurati da A, & B; ma il minimo sarà il numero E, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

A ..... B .....
C .. D ...
E .....
F ———
G ——— H ———

g 35. del 7.
h 19. del 7.
K 7. assioma del 7.
l 9. assioma del 7.
m 19. del 7.
n 21 del 7.
o 17. del 7.

COROLLARIO.

Quindi è, che se due numeri, come A, & B, multiplicano due numeri minimi, come C, & D, che sono nella medesima proportione; multiplicando il minore A per il

maggiore D, ed il maggiore B per il minore C, nell'vna, e nell'altra multiplicatione producono il numero E, ch'è il minimo misurato da i due A, & B.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se vn numero è misurato da due numeri, sarà ancora misurato dal numero minimo, ch'è misurato da quelli due.

Misutino i numeti A, & B qualunque numero CD, e di tutti i numeri, che possono essere misurati da i medesimi A, & B, il minimo sia il notato E. Dico che il numero E misura il numero CD. Se il numero E non misura il numero CD, detraendo dal numero CD tante volte il numero E, per quanto si può, quel, che resta, sarà minore del numero E; fatta dunque la detrattione del numero E quanto si può, e resti, s'è possibile il numero FD, minore del numero E, in modo che il numero E misuri il numero CF. Perche tanto il numero A, quanto il numero B, misura il numero E; ed il numero E misura il numero CF; ogn'vno dunque de i numeri A, & B, misurerà [a] il numero CF; ma ciascuno de' numeri A, & B, per ipotesi, misura tutto il numero CD; ogn'vno de i numeri A, & B, [b] misurerà ancora il rimanente FD; fù supposto il numero FD minore di E, dunque i numeri A, & B misurano vn numero minore di E; per la qual cosa il numero E non è il minimo di tutti quelli, che sono misurati da i numeri A, & B, il che è contro all'ipotesi, mentre il numero E fù supposto il minimo. Non dunque, detratto da CD quanto si può il numero E, resta quantità alcuna minore di E; per la qual cosa il numero minimo E misura il numero CD, come fù proposto dimostrare.

A.. B...
C.....F..... D
E.....

[a] 11. assioma del 7.

[b] 12. assiom.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXXVIII.

Dati tre numeri, ritrouare il minimo numero, che quelli misurano.

Siano dati tre numeti, come A, B, C, e si voglia ritrouare il minimo numero, che misurano i tre A, B, C. Si troui [a] il minimo numero misurato da due di quelli; e supposto che il numero D sia il minimo misurato da i due A, & B; se il numero D è misurato dal numero C, il numero D sarà il minimo misurato da i tre A, B, C; se il numero D non è

A... B.... C.....
D.....
E———

[a] 36. del 7.

il

il minimo, misurino i numeri A, B, C, qualche altro numero E, minore del numero D. Perche i due A, & B, misurano il numero E minore di D, non sarà il numero D il minimo misurato da i due A, & B, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto il numero D essere il minimo di quelli misurati da i numeri A, & B: non dunque il numero E è il minimo de' numeri, che sono misurati da i numeri A, B, C, mà il minimo sarà il numero D.

Di nuouo, supposto che il numero C non misuri il numero D, in tal caso si troui il numero E, [b] che sia il minimo misurato da i numeri C, & D. Dico che il numero E sarà il minimo di quelli, che i numeri A, B, C misurano. Perche i numeri A, & B, per costruttione, misurano il numero D, ed il numero D misura il numero E; i numeri dunque A, & B [c] misurano il numero E; mà il numero C, per costruttione, misura il numero E, perciò tutti tre i numeri A, B, C misurano il numero E. Finalmente se il numero E non è il minimo di tutti gli altri misurati da i numeri A, B, C, misurino i numeri A, B, C, se è possibile, qualche altro numero F, minore del numero E. Perche il numero D è il minimo di quelli misurati da i due A, & B, ed i numeri A, & B misurano il numero F, ancora il numero D, [d] ch'è minimo, misurerà il numero F. In oltre perche il numero E, per costruttione, è il minimo, ch'è misurato da i due C, & D; ed i numeri C, & D misurano il numero F; il numero E dunque, ch'è minimo, misurerà [e] il numero F: mà il numero F è supposto minore del numero E; il maggiore misurarebbe il minore, il che è impossibile: non dunque il numero F è il minimo di quelli misurati da i tre A, B, C; mà il minimo sarà il numero E, che era da farsi, e dimostrarsi.

b 36. del 7.

c 11. 2 siom. del 7.

d 37. del 7.

e 37. del 7.

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .

COROLLARIO.

Perche il numero E è il minimo di quelli misurati da i tre numeri A, B, C; e, supponendo, che il numero F sia misurato da i medesimi numeri A, B, C, fù prouato, che il minimo E misura il numero F; sarà manifesto, che se vn numero è misurato da tre numeri, il medesimo sarà ancora misurato dal minimo, ch'è misurato da quei tre numeri.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

Se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato haverà la parte nominata da quello, che misura.

Sia il numero A misurato dal numero B. Dico che il numero A hà la

parte denominata dal numero B. Sia misurato il numero A dal numero B tante volte, per quãte vnità sono nel numero C; l'vnità misurerà tante volte il numero C, per quãte volte il numero B misura il numero A; e per-

A.....
B.... C...

mutando, l'vnità misurerà il numero B, [a] come il numero C misura il numero A; e perciò tal parte sarà l'vnità del numero B, quale parte è il numero C del numero A: mà l'vnità è parte di B denominata dal numero B, come se l'vnità fosse terza, ò quarta, ò quinta parte, &c. di B; sarà ancora C parte denominata da A; cioè sarà C terza, ò quarta, ò quinta, ò altra parte di A, denominata dal numero B; cioè il numero C sarà tale parte di A, quale denomina B con le sue vnità. Si che se B conterrà quattro vnità, C si dirà essere la quarta parte di A; se B contiene cinque vnità, si dirà C essere la quinta parte di A; e con quest'ordine se B conteneſſe più, ò meno vnità. Per la qual cosa se vn numero misura vn altro numero, il numero misurato hà la parte denominata dal numero, che misura.

a 15 del 7.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XL.

Se vn numero hà qualunque parte, il numero denominato da quella parte, lo misura.

Sia B parte del numero A, dalla quale sia denominato il numero C. Dico che il numero C misura il numero A. Perche B è parte di A, perciò B misura il numero A; e per l'antecedente propositione haverà A la parte denominata da B: ma, per ipotesi, il numero C è la parte denominata da B, in conseguenza C sarà parte di A; per la qual cosa il numero C misura il numero A, che era da dimostrarsi.

A.....
B... C.....

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XLI.

Ritrouare vn minimo numero, che habbia le parti date.

Siano le parti proposte A,B,C, e si habbia à ritrouare il minimo numero, che habbia le parti A,B, & C.

Siano i numeri D,E,F quelli, che denominano le parti A, B, C; si troui il numero G, [a] che sia il minimo di quelli misurati da i numeri D,E, F. Dico che il numero G è il minimo, che contiene le parti A,B,C. Perche i numeri D,E, F misurano il numero G, haverà G [b] le parti denominate da essi numeri D,E,F; ma le parti denominate da essi numeri D, E, F, sono le date A,B,C; il numero dunque G haverà le

D..
E...
F....
G.....
H ———

A metà
B terza parte
C quarta parte

a 38. del 7.

b 39. del 7.

parti

parti date A,B,C. In oltre dico che il numero G è il minimo di quelli, che contengono le parti A, B, C: perche se non è il minimo, qualche altro numero minore di G sarà il minimo, che conterrà le parti A, B, C; sia quello il numero H. Perche il numero H hà le parti A,B,C, esso numero H c sarà misurato da i numeri D, E, F, che sono denominati dalle parti A,B,C; ma i numeri D,E,F misurano il numero G, essendo H minore di G, non sarà G il minimo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque alcun numero minore di G hà le parti date; ma il numero G sarà il minimo, che hà le parti A,B,C, ch'era da farsi, e dimostrarsi. c 4. del 7.

Fine del Settimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO OTTAVO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, gli estremi de'quali siano primi frà loro; quelli saranno i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione.

SIANO quanti numeri si vogliano A, B, C, D, continui proportionali, li di cui estremi A, & D siano primi frà loro. Dico che i numeri A,B,C, D sono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medesima proportione. Se i numeri A,B,C, D non sono i minimi, altri numeri nella medesima proportione saranno minimi; siano quelli, s'è possibile, i notati E,F,G,H. Perche i numeri E,F,G,H hanno la medesima proportione de'numeri A, B, C,D, sarà per l'egualità, la proportione di A à D [a] come quella di E ad H; ma i due A, & D [b] sono minimi nella proportione di A à D (stante che, per ipotesi sono numeri primi) i numeri due A, & D [c] misureranno vgualmente i numeri E, ed H; cioè l'antecedente A misura l'antecedente E, ed il conseguente D misura il conseguente H: ma i due E, ed H sono supposti minimi nella proportione di E ad H, ouero di A à D; i maggiori dunque A, & D misurano i minori E, ed H, ch'è impossibile. Non dunque i numeri E,F,G, H sono i minimi nella proportione de i numeri A, B, C, D; ma i minimi sono i proposti A,B,C,D, ch'era da dimostrarsi.

a 14. del 7.
b 23. del 7.
c 21. del 7.

A ..... E —
B ..... F ——
C ..... G ———
D ..... H ————

SCO-

SCOLIO.

L'antecedente propoſitione ſi può fare più vniuerſale nel ſeguente modo.

Se ſiano quanti numeri ſi vogliano ò continui, ò non continui proportionali, de'quali gli eſtremi ſiano numeri frà loro primi; quelli ſono i minimi di tutti gli altri, che, eſpoſti col medeſimo ordine, hanno le medeſime proportioni.

Siano quanti numeri ſi vogliano A, B, C, D, i di cui eſtremi A, & D ſiano frà loro primi. Dico che i numeri A,B,C,D ſono i minimi di tutti gli altri, che eſpoſti col medeſimo ordine, hanno le medeſime proportioni de i numeri A, B, C, D. Se i numeri A, B,C,D non ſono i minimi, altri numeri nelle medeſime proportioni ſaranno i minimi; ſiano quelli i notati E,F,G,H. Perche A à B è come E ad F, e la proportione di B à C è come quella di F à G; ed ancora C à D è come G ad H; ſarà per l'egualità A à D [a] come E ad H; ma i due A, & D ſono nella loro proportione minimi, ſtante che ſono primi; perciò miſureranno [b] vgualmente i numeri E, ed H; ma i numeri E, ed H ſono [c] ſuppoſti i minimi, i numeri dunque A, & D maggiori miſureranno i minori E, ed H, ch'è impoſſibile. Non dunque i numeri E,F,G,H ſono i minimi nelle proportioni di A,B,C,D; ma i minimi ſaranno eſſi numeri A,B,C,D, ch'era da dimoſtrarſi.

A.....
B.....
C....
D.....

E——
F———
G——
H——

[a] 14. del 7.
[b] 23. del 7.
[c] 21. del 7.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE II.

Data qualunque proportione, ritrouare quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, che ſiano i minimi nella data proportione.

Sia data la proportione ne i minimi numeri, come A à B, e ſi habbiano à ritrouare quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, che ſiano i minimi nella proportione di A à B. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia C; ſimilmente ſi multiplichi il numero B in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia E; poi ſi multiplichi il numero A per il numero B, ed il prodotto ſia D. Dico prima che i tre C, D, E ſono i minimi nella proportione di A à B. Si conſiderino i numeri A, & B come numeri multiplicati, ed A ſia il multiplicante; perche il prodotto del multiplicante A nel numero

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

mul-

multiplicato A è il numero C; ed il prodotto del multiplicante A nel
a 17. del 7. multiplicato B è il numero D; sarà il prodotto C [a] al prodotto D come il multiplicato A al multiplicato B. Similmente presi i numeri B, ed A come numeri multiplicati, ed il multiplicante sia B. Perche i prodotti fatti dal multiplicante B ne i numeri multiplicati B, ed A, sono, per co-
b 17. del 7. struttione, E, & D, sarà il prodotto D al prodotto E [b] come il numero multiplicato A al numero multiplicato B: mà fù dimostrato A à B esse-
c Scol. alla 12. del 7. re come C à D; sarà C à D [c] come D à E; e perciò i tre C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B. In oltre perche i nu-
d 24. del 7. meri A, & B, per ipotesi, sono nella loro proportione minimi, perciò [d] sono frà di loro primi; e perche dalla multiplicatione de i numeri primi A, & B in se medesimi, ne vengono i prodotti C, ed E; saranno i pro-
e 29. del 7. dotti C, ed E [e] frà loro primi; e per la prima propositione di questo, i tre numeri proportionali C, D, E sono i minimi nella loro proportione di A à B.

Di nuouo si multiplichi il numero A in ciascuno de i tre prodotti C, D, E, e ne risultino i prodotti F, G, H; e si multiplichi il numero B nell'vltimo E, ed il prodotto sia K. Dico che i quattro numeri F, G, H, K sono i minimi nella continua proportione di A à B. Perche il numero A, multiplicando i tre numeri C, D, E, produce i numeri F, G, H, per la 17. propositione del settimo, i prodotti F, G, H hanno l'istessa proportione, che i numeri multiplicati C, D, E: mà i numeri C, D, E sono continui proportionali nella proportione di A à B; i numeri dunque F, G, H sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di nuouo, perche i i numeri A, & B, multiplicando il medesimo numero E, producono i due H, & K, per la 18. propositione del 7, il prodotto H al prodotto K sarà come il multiplicante A al multiplicante B, e perciò i numeri F, G, H, K, sono continui proportionali nella proportione di A à B. Di più, essendo i numeri A, & B minimi nella loro proportione, per la 24. propos. del 7, saranno frà di loro primi. E perche dalle multiplicationi di A, & B in se medesimi, ne sono prodotti i numeri C, ed E; e dalle multiplicationi di A in C, e di B in E, ne sono risultati i numeri F, & K (che sono estremi delle continue proportionali F, G, H, K) per la 29. propos. del 7, gli estremi F, & K sono primi frà loro; e per la 1. propositione di questo i numeri F, G, H, K, sono i minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di A à B.

		A 2	B 3		
	C 4		D 6		E 9
F 8		G 12		H 18		K 27
L 16	M 24		N 36		P 54		Q 81

Nell'istesso modo, multiplicando i quattro numeri F, G, H, K per il numero A, e ne vengano i prodotti L, M, N, P, saranno i prodotti L, M,
a 17. del 7. N, P [a] nella proportione de i numeri multiplicati F, G, H, K; cioè nella proportione di A à B. Poi si multiplichi il numero B nel numero K, ed il prodotto sia Q; perche i numeri A, & B, multiplicando il medesimo
b 18. del 7. numero K, producono i numeri P, Q, sarà il prodotto P al prodotto Q [b] come il multiplicante A al multiplicante B; dal che i numeri L, M, N, P, Q

sono

ſono continui proportionali nella proportione di A à B. Finalmente perche i minimi numeri A, & B [c] ſono frà loro primi, e queſti multiplicati in ſe medeſimi producono i numeri C, ed E; e multiplicando i medeſimi A, & B, cioè A in C, & B in E, producono i numeri F, & K; e ſimilmente multiplicando A in F, & B in K, producono i numeri L, & Q (che ſono eſtremi de i numeri continui proportionali L, M, N, P, Q) gli eſtremi L, & Q [d] ſaranno frà di loro primi, ed in conſeguenza i numeri L, M, N, P, Q, [e] ſaranno i minimi nella proportione di A à B. Non altrimente ſi farà ſe ſi voleſſero trouare altri numeri continui proportionali, che ſiano minimi nella proportione di A à B: poiche multiplicando i cinque L, M, N, P, Q, per il numero A, e poi multiplicato l'vltimo Q per il numero B, i ſei numeri, che ne verranno, haueranno le medeſime conditioni ſudette; il che ſi dimoſtrerà nel medeſimo modo: e con queſt'ordine procedendo ſi poſſono ritrouare quanti numeri ſi vogliono minimi nella continua proportione di A à B; ch'era da farſi e dimoſtrarſi.

[c] 24. del 7.
[d] 29. del 7.
[e] 1. del 8.

SCOLIO.

Tutto quello, che nell'antecedente propoſitione ſi è fatto con le multiplicationi del numero A, ſi può fare col numero B; e quello, che ſi è fatto col numero B, ſi farà col numero A; cioè multiplicando il numero B ne i tre E, D, C, ſe ne producono i numeri K, H, G; e multiplicando il numero A per l'vltimo C, ſe ne produce il numero F; ſimilmente, multiplicando il numero B ne i numeri K, H, G, F, ſe ne producono i numeri Q, P, N, M, e multiplicando il numero A per l'vltimo numero F, ſi ne produce il numero L.

COROLLARIO I.

Perche dalla multiplicatione di A in ſe medeſimo, e di B in ſe medeſimo, ſe ne producono i numeri quadrati C, ed E; ed i numeri continui proportionali C, D, E, ſono i minimi nella proportione di A à B, ſarà manifeſto, che quando tre numeri continui proportionali ſono i minimi nella loro proportione, i loro eſtremi ſono numeri quadrati; ſimilmente, perche multiplicando il numero A per il ſuo quadrato C, ed il numero B per il ſuo quadrato E, ſe ne producono i numeri cubi F, & K, che ſono eſtremi de i quattro numeri F, G, H, K, minimi nella continua proportione di A à B; chiaramente appariſce, che ſe quattro numeri continui proportionali ſono minimi nella loro

proportione, i loro eſtremi ſono numeri cubi. E con queſt' ordine, ſe i minimi numeri continui proportionali ſono cinque, i loro eſtremi ſono quadrati; ſe ſaranno ſei, i loro eſtremi ſaranno numeri ſolidi, che cadono ſotto altre denominationi, come à pieno ſi parlerà nel noſtro trattato dell'Algebra. *quadrati

COROLLARIO II.

Perche i numeri intermedij de gli antedetti numeri continui proportionali naſcono dalle multiplicationi de' minimi numeri A, & B; cioè D naſce dalla multiplicatione di A in B, il numero G dalla multiplicatione di D in A; cioè dal prodotto di A in B, multiplicato per A; ed il numero H naſce dalla multiplicatione di E in A, cioè dal quadrato di B, multiplicato per A; e nell'iſteſſo modo gli altri medij naſcono dalle multiplicationi di A ne i numeri F, G, H, K; perciò tutti i numeri intermedij D,G,H,M,N,P ſaranno miſurati da i minimi numeri A,& B. Dond'è manifeſto, che due minimi numeri in vna data proportione miſureranno tutti i numeri medij di quanti ſi voglia numeri continui proportionali, che ſaranno minimi nella medeſima data proportione.

A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27
L 16 M 24 N 36 P 54 Q 81

THEOREMA II. PROPOSITIONE III.

Se quanti numeri ſi vogliano continui proportionali ſono i minimi di tutti quelli, che hanno la medeſima proportione con eſſi, i loro eſtremi ſaranno frà di loro primi.

Siano i numeri A,B,C,D continui proportionali, i quali ſiano minimi nella loro proportione di A à B, ouero B à C &c. Dico che gli eſtremi A,

mi A, & D, ſono frà di loro primi.

Si trouino due numeri [a] come E, ed F, che ſiano i minimi nella proportione di A à B, ouero di B à C, ò pure di C à D; e ſecondo il metodo tenuto nell'antecedente propoſitione, ſi trouino à tre numeri G,H,K continui proportionali, che ſiano minimi nella proportione di E ad F; e di nuouo ſe ne trouino quattro altri, ò cinque altri, e quanti biſognano, ſino à tanto, che ſi peruiene ad vna moltitudine di termini, vguale alla moltitudine de'termini dati A, B, C, D; e ſuppoſto che ſi ſia peruenuto à quella moltitudine, che ſi cerca, e ſiano quelli i notati L,M,N,P, i quali ſiano continui proportionali, e ſiano minimi nella proportione di E ad F. Perche la moltitudine de' termini L,M,N,P è vguale alla moltitudine de'termini A, B, C,D; e gli vni, e gli altri ſono minimi nella proportione di E ad F; non potendoſi dare il minore del minimo, ciaſcuno de'termini L,M,N,P ſarà vguale à quello, che gli corriſponde ne i dati A,B,C,D; cioè L ſarà vguale ad A, il numero M vguale à B, il notato N vguale à C, ed il numero P vguale al numero D. E perche dalla multiplicatione de'numeri E, ed F in ſe medeſimi, ſecondo quel che ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, ſe ne producono i numeri G, & K; e dalla multiplicatione di E in G, e di F in K, ſe ne producono i numeri L, & P; per la 29. propoſ. del 7, i numeri L, & P ſono frà di loro primi: ma i numeri L, & P ſono vguali à i due A, & D; i due eſtremi dunque A, & D ſono frà di loro primi, ch'era da dimoſtrarſi.

[a] Scol. alla 35. del 7.

A 8	B 12	C 18	D 27	
	E 2	F 3		
G 4	H 6	K 9		
L 8	M 12	N 18	P 27	

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date quante proportioni ſi vogliano ne i minimi numeri; ritrouare i numeri minimi, che ſucceſſiuamente ſiano nelle proportioni date.

Siano date prima due proportioni ne i minimi numeri, come A à B, e come C à D; e ſi vogliano ritrouare tre minimi numeri, che ſucceſſiuamente ſiano nelle proportioni date; cioè che il primo al ſecondo ſia come A à B; e che il ſecondo al terzo ſia come C à D. Si troui il minimo numero E, [a] il quale ſia miſurato dal ſecondo B, e dal terzo C. Si eſpongano poi i numeri F, & G in modo, che F ſia multiplice di A, come E è multiplice di B; e che G ſia multiplice di D, come E è multiplice di C; cioè che il numero A miſuri il numero F, come il numero B miſura il numero E; e che il numero D miſuri il numero G, come C miſura il numero E. Dico che i tre numeri F,E,G ſono i minimi nelle proportioni di F ad E, e di E à G, cioè nelle proportioni di A à B, e di C à D. Perche i numeri A, & B,

A 6	B 5	C 4	D 3
F 24	E 20	G 15	
I ——	K ——	L ——	

[a] 36. del 7.

per costruttione, misurano vgualmente i numeri F, ed E, sarà A parte di F, come B è parte di E, è per la 20. definitione di questo, A ad F è come
b 13. del 7. B ad E; e permutando, A à B b è come F ad E. Similmente perche i numeri C, & D misurano vgual-

	A 6	B 5	C 4	D 3.
c 20. defin. del 7.	F 24	E 20	G 15	
d 13. del 7.		K		L

mente i numeri E, & G, sarà C A ad E c come D à G; e permutando, C à D d sarà come E à G; per la qual cosa i numeri F, E, G sono successiuamente nelle proportioni di A à B, e di C à D. In oltre se i numeri F, E, G non sono i minimi, altri numeri nelle medesime proportioni saranno i minimi; siano questi i notati I, K, L, minori de i numeri F, E, G, in modo, che I à K sia come A à B, e K ad L sia come C à D. Perche A à B è come I à K, ed i numeri A, & B sono minimi; i numeri dunque A, & B
e 21 del 7. e misurano vgualmente i numeri I, & K, cioè l'antecedente A misura l'antecedente I, ed il conseguente B misura il conseguente K. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri K, ed L; cioè C misura K, ed il numero D misura L; per la qual cosa tanto il numero B, quanto il numero C misura il numero K. Hor perche i minimi numeri B, & C misurano il numero K, ed i medesimi B, & C misurano il minimo numero E; perciò il numero E
f 37. del 7. f misura il numero K: ma fù supposto K minore di E; il maggiore dunque misurerà il minore, ch'è impossibile. Non dunque i numeri I, K, L sono minimi nella data proportione; ma i minimi sono i notati F, E, G, ch'era da farsi nel primo luogo.

Di nuouo siano date tre proportioni ne i minimi numeri, e la prima, sia come A à B, la seconda come C à D, e la terza come E ad F; e si vogliano ritrouare quattro numeri minimi, che il primo al secondo sia come A à B; che il secondo al terzo sia come C à D; e che il terzo al quarto sia come E ad F. Si troui, come prima, g il minimo numero G, il quale sia misurato dal secondo B, e dal terzo C; si espongano poi i numeri H, & K in modo, che A misuri H, come B misura G; e che D misuri K, come C misura G. O il numero E misura K, onero non lo misura; supposto prima che lo misuri; si esponga il numero L in modo, che F misuri L, come E misura K. Dico che i quattro numeri H, G, K, L sono quelli, che si cercano; cioè che H à G è come A à B; che G à K è come C à D; e che K ad L è come E ad F; e che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche i numeri A, & B misurano vgualmente i numeri H, & G, sarà A ad H
h 20. defin. del 7. h come B à G; e permutando, A à B
K 13. del 7. K è come H à G. Similmente, perche i numeri C, & D misurano vgualmente i numeri G, & K, ed i numeri E, ed F misurano vgualmente i numeri K, ed L, per l'istessa ragione C à D sarà come G à K; e sarà E ad F come K ad L; per la qual cosa i numeri H, G, K, L sono successiuamente nelle proportioni di A à B, di C à D, e di E ad F. Dico oltre à ciò, che i numeri H, G, K, L sono i minimi nelle date proportioni. Perche, se

	A 6.	B 5.	C 4	D 3. E 5 F 7.
g 36. del 7.	H 24.	G 20	K 15.	L 21
	M	N	O	P

non

non ſono i minimi, altri numeri nelle date proportioni ſaranno i minimi; ſiano quelli i notati M, N, O, P, minori de i corriſpondenti numeri H, G, K, L, in modo, che M ad N ſia come A à B, N ad O come C à D, ed O à P come E ad F; e perche i due A, & B ſono, per ipoteſi, minimi, perciò [l] miſureranno vgualmente i numeri M, ed N; cioè l'antecedente A miſura M, ed il conſeguente B miſura N. Similmente eſſendo C, & D minimi nella loro proportione, perciò [m] miſureranno vgualmente i numeri N, ed O; cioè l'antecedente C miſura l'antecedente N, ed il conſeguente D miſura il conſeguente O; dal che i due B, & C miſurano il medeſimo numero N; mà i due B, & C miſurano il minimo G, in conſeguenza il minimo G [n] miſura il numero N; fù ſuppoſto N minore di G, il maggiore miſurerà il minore, ch'è impoſsibile. Non dunque i numeri M, N, O, P ſono i minimi nella data proportione; mà i minimi ſaranno i quattro H, G, K, L, come fù propoſto fare.

l 21. del 7.

m 21. del 7.

n 37. del 7.

Se poi il numero E non miſura il numero K. Si troui [o] il minimo numero L, miſurato da i due E, & K, e ſi eſpongano i numeri M, N, P in modo, che il numero G miſuri il numero M, come H miſura il numero L; che H miſuri N, come G miſura M; e che F miſuri P, come E miſura L. Perche i numeri H, G, K miſurano vgualmente i numeri N, M, L, ſarà H à G [p] come N ad M; e ſarà G à K, come M ad L; mà H à G, & G à K ſono come A à B, e come C à D; ſarà N ad M [q] come A à B; ed M ad L come C à D. Similmente perche i due E, ed F miſurano vgualmente i numeri L, & P, ſarà E ad F come L à P. Per la qual coſa i quattro numeri N, M, L, P ſono ſucceſſiuamente nelle date proportioni. Dico che ſono i minimi nelle medeſime date proportioni. Perche ſe non ſono i minimi, altri numeri nelle medeſime proportioni ſaranno i minimi; ſiano quelli i notati Q, R, T, V, minori de i corriſpondenti numeri N, M, L, P; e ſarà A à B come Q ad R; ed ancora C à D come R à T; e ſarà E ad F come T ad V. E perche C, & D ſono minimi, perciò [r] miſureranno vgualmente i due R, & T; cioè l'antecedente C miſura l'antecedente R, ed il conſeguente D miſura il conſeguente T. Similmente, eſſendo i numeri E, & F minimi, il numero E [s] miſurerà T, ed il numero F miſura V; dal che i due D, ed E miſurano il medeſimo numero T. In oltre perche i due D, ed E, per coſtruttione, miſurano il minimo numero L, ed i medeſimi D, ed E miſurano il numero T; perciò [u] il numero L miſura il numero T: fù ſuppoſto T minore di L, il maggiore miſurerà il minore, ch'è impoſsibile. Non dunque i numeri Q, R, T, V ſono i minimi nelle date proportioni, mà i minimi ſono i quattro N, M, L, P, ch'era da farſi.

A 6	B 3.	C 4.	D 2.	E 1. F 7.
H 24	G 20.	K 15.		
N 48	M 40	L 30.	P 105.	
Q	R	T	V	

o 36. del 7.

p 20. defin. del 7.

q Scol. a'la 2. del 7.

r 21. del 7.

s 21. del 7.

u 37. del 7.

Se ſaranno date quattro proportioni, ſi troüino prima i minimi numeri proportionali nelle tre date proportioni, come ſopra ſi è fatto, e con la quarta proportione ſi faccia l'iſteſſo, che antecedentemente ſi fece con la terza proportione data, e ne verranno i cinque minimi numeri proportionali, che ſi cercano. Per eſempio, oltre le date tre proportioni,

ni, ſia data la quarta proportione come X ad Y. Si trouino prima i quattro minimi numeri N, M, L, P, che ſiano ſucceſsiuamente nelle medeſime prime tre proportioni di A à B, di C à D, e di E ad F: poi, ſe X misura P, ſi esponga il numero Q in modo, che Y misuri il numero Q, come X misura P; sarà X ad Y come P à Q; ed i cinque numeri N, M, L, P, Q saranno ſucceſsiuamente i minimi proportionali, ſecondo le date proportioni. Se poi il numero X non misura il numero P, ſi troui il minimo numero Q, x che ſia misurato da i due P, ed X, e ſi esponga i numeri R, T, V, Z in modo, che il numero L misuri il numero R, come P misura Q; che M misuri T, come L misura R; che N misuri V, come M misura T; e che Y misuri Z, come X misura Q; ed i numeri V, T, R, Q, Z saranno i minimi nelle proportioni date: il che ſi dimoſtra col procedere, come ſopra s'è fatto. Ed il medeſimo ordine ſi terrà ſe le proportioni date ſarāno più di quattro, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

A 6 B 5 C 4 D 3 E 2 F 7 X 3 Y 2
N 48 M 40 L 30 P 105 Q 70

A 6 B 5 C 4 D 3 E 2 F 7 X 9 Y 2
N 48 M 40 L 30 P 105 Q 315 Z 70
R V 144 T 120 R 90

x 36.del 7.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

I numeri piani hanno la proportione compoſta da i loro lati.

Siano i due numeri piani A, B, e ſiano i lati del numero A i notati C, D, ed i lati del numero B ſiano E, F. Dico che la proportione del numero piano A al numero piano B è compoſta di due proportioni, cioè della proportione del lato C al lato E, e della proportione del lato D al lato F. Si multiplichino i numeri D, E, frà di loro, ed il prodotto ſia il numero G. Perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i numeri A & G, ſarà il prodotto A al prodotto G, a come il numero multiplicato C al numero multiplicato E. Similmente perche E, multiplicando i numeri D, & F, produce i due G, & B, ſarà il prodotto G al prodotto B b come il numero multiplicato D al numero multiplicato F, per la qual coſa i tre A, G, B ſono ſucceſsiuamente proportionali nelle proportioni di C ad E, e di D ad F. In oltre, preſi i numeri A, & B, come eſtremi, ed il numero G ſia intermedio; la proportione di A à B c ſarà compoſta delle proportioni di A à G, e di G à B: mà la proportione di A à G è come C ad E, e la proportione di G à B è come D ad F; la proportione dunque del numero piano A al numero piano B ſarà compoſta delle proportioni di C ad E, e di D ad F. Per la qual coſa i numeri piani hanno la proportione compoſta da i loro lati, il che era da dimoſtrarſi.

A 24 B 48
G 18
C 4. D 6. E 2. F 16.

a 17.del 7.
b 19. del 7.
c Lem.7.dopo la 18.propoſ.del 6.

Nell'

Nell'istesso modo si proverà, che il numero piano A al numero piano B hà la proportione composta delle proportioni di C ad F, e di D ad E: Poiche multiplicando il numero D per il numero F, ed il prodotto sia G; per le ragioni antedette, sarà A à G come C ad F, e sarà G à B come D ad E; ma la proportione di A à B è composta delle proportioni di A à G, è di G à B; sarà la proportione di A à B composta delle proportioni di C ad F, e di D ad E, ch'era da dimostrarsi.

A 24 G 96 B 48
C 4. D 6. F 16. E 3.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

Di quanti si voglia numeri continui proportionali, se il primo non misura il secondo, niun'altro di quelli misurerà alcuno de gli altri.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A non misuri il secondo B. Dico che niun altro di loro misurerà alcuno de gli altri. Perche i proposti numeri sono continui proportionali, sarà A à B come B à C, ouero C à D, & D ad E; si che se A misurasse B, per la 20. definitione, B misurarebbe vgualmente C, ed il numero C misurarebbe vgualmente D; come ancora D misurarebbe vgualmente E: ma, per ipotesi, A non misura B, ne meno B misurerà il numero C, ne C misurerà D, &c. ↻ perciò nissuno misura il suo prossimo seguente.

A 16 B 24 C 36 D 54 E 81
F 4 G 6 H 9

In oltre si prendano [a] tre numeri continui proportionali, che siano i minimi nella proportione di A à B, come F, G, H in modo, che F à G sia come A à B, & G ad H sia come F à G, cioè come B à C, e per l'egualità, sarà [b] F ad H, come A à C. In oltre perche A à B è come F à G, se A misura B, il numero F [c] misurerà vgualmente G; ma A per ipotesi, non misura B, ne meno F misurerà G; per la qual cosa F non sarà l'vnità; perche se fosse l'vnità misurarebbe il numero G, stante che l'vnità misura tutti i numeri: ma si è dimostrato, che F non misura G, perciò F non è l'vnità. E perche i numeri F, G, H sono i minimi nella proportione di F à G, cioè di A à B, gli estremi F, ed H [d] sono numeri primi; dal che F non misura H; ma F ad H è come A à C, ed il numero F, non misura H, ne meno A misurerà C. Nell'istesso modo si dimostrerà, che B non misurerà il numero D, ne meno C misurerà il numero E. E se ↻ in luogo de i tre F, G, H, si prenderanno quattro numeri continui proportionali, che siano minimi nella proportione di A à B, proseguendo col medesimo metodo di prima, si proverà, che il primo A non misura il quarto D, ne B misura E, come anco C non misurerà quello, che ↻ segue dopo il numero E. E se i numeri F, G, H saranno cinque, si proverà, che A non misura il quinto termine E, ne meno nissun altro misurerà il suo quinto termine; e con quest'ordine procedendo, sarà prouato, che se A non misura B, niuno de'numeri A, B, C, D &c. misurerà gli altri, il che era da dimostrarsi.

[a] 2 a. del 8.
[b] 20. del 7.
[c] 20. defin. del 7.
[d] 3. del 8.

THEO-

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Di quanti si voglia numeri continui proportionali, se il primo misura l'vltimo, misurerà ancora il secondo.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, D, E, ed il primo A misuri l'vltimo E. Dico che A misurerà il secondo B. Se il primo A non misura il secondo B, per l'antecedente propositione, ne meno misurerà alcun'altro de'numeri B,C,D,E, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto, che A misura l'estremo E. Per la qual cosa il primo A misurerà il secondo B, ch'era da dimostrarsi.

A 3	B 6	C 12	D 24	E 48

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Quanti numeri continui proportionali cadono frà due proposti numeri, altretanti ne caderanno frà gli altri numeri, che sono nella medesima proportione.

Frà due qualunque numeri A, & B cadano i medij continui proportionali C, & D; e siano altri numeri, cioè E, F, che habbiano la medesima proportione, quale hà il numero A al numero B. Dico che frà i numeri E, F cadono tanti medij proportionali, per quanti ne cadono frà i numeri A, & B. Si trouino tanti minimi numeri continui proportionali, nella proportione di A à C, per quanti sono i termini A,C,D,B, che siano i notati G,H,K,L, e per l'egualità, [b] sarà G ad L come A à B, e come E ad F: e perche i numeri G,H,K,L continui proportionali, sono per costruttione minimi, gli estremi G, ed L sono [c] frà di loro primi; e per la 23. del settimo, i numeri G, ed L sono minimi nella loro proportione, cioè nella proportione di G ad L: ma G ad L è come E ad F, perciò i numeri G, ed L [d] misureranno vgualmente i numeri E, ed F; cioè l'antecedente G misura l'antecedente E, ed il conseguente L misura il conseguente F.

A 40	C 20	D 10	B 5
G 8	H 4	K 2	L 1
E 8	M 4	N 2	F 1

E perche G, H, K, L, sono continui proportionali, quante volte i due G, L misurano i due E, F, altretante volte i numeri H, K misureranno altri numeri, come per essempio M, N. Per la qual cosa i numeri G,H,K,L misureranno vgualmente i corrispondenti E, M, N, F; e per la 20. definit. del 7, sarà G ad E come H ad M, e come K ad N, ed L ad F; e permutandosi, i numeri G, H, K, L, [e] hanno successiuamente le medesime proportioni de'numeri E, M, N, F; ma i numeri G, H, K, L, per costruttione, sono continui proportionali; perciò i numeri E,M,N,F saranno ancora

a 2. del 8.
b 22. del 7.
c 3. del 8.
d 21. del 7.
e 13. del 7.

conti-

continui proportionali ; e tanti ſaranno i termini E, M, N, F, per quanti ſono i termini G, H, K, L; cioè per quanti ſono i termini A, C, D, B. E perciò quanti termini medij ſono frà i due A, B, altrettanti ne ſaranno frà i due E, F, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

Quanti medij continui proportionali cadono frà due numeri frà loro primi, altrettanti ne cadono frà vno di eſſi, e l'vnità.

Siano i due numeri frà loro primi A, B, frà quali cadano i medij continui proportionali C, D. Dico che altrettanti medij continui proportionali caderanno frà l'vnità, ed il numero A, e frà l'vnità, ed il numero B. Si trouino due numeri minimi [a] nella proportione di A à B, che ſiano E, ed F; e nella medeſima proportione ſi trouino tre altri minimi numeri cõtinui proportionali come G, H, K; e ſimilmente ſe ne trouino quattro altri, come L, M, N, P, e con queſt'ordine fin che ſi peruenga à tanta moltitudine di termini, per quanta è la moltitudine de' termini A, C, D, B. Perche gli eſtremi A, B, per ipoteſi, ſono primi frà loro, i numeri A, C, D, B ſaranno i minimi nella proportione di E ad F: ma perche altrettanti termini L, M, N, P, per coſtruttione, ſono ancora minimi nella proportione di E ad F, non porendoſi dare il minore del minimo, i numeri L, M, N, P, ſaranno vguali à i corriſpondenti numeri A, C, D, B; cioè L vguale ad A, il numero M vguale à C, il numero N vguale à D, ed il numero P vguale à B. In oltre perche nel trouare i numeri minimi G, H, K, ouero L, M, N, P, per la 20. propoſitione di queſto, ſi è prodotto G dalla multiplicatione di E in ſe medeſimo, e ſi è prodotto L dalla multiplicatione di E nel numero G; il numero G [b] ſarà miſurato da E per il medeſimo numero E, ed il prodorto L ſarà miſurato da G per l'iſteſſo numero E; ma il numero E è miſurato dall'vnità [c] per il medeſimo numero E, in conſeguenza i numeri L, G, E, e l'vnità, ſi miſureranno vgualmente; cioè l'vnità miſura E, come E miſura G, ed il numero G miſura L; per la qual coſa la medeſima parte ſarà l'vnità di E, qual'è il numero E di G, ed il numero G di L. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la medeſima parte è l'vnità di F, quale è F di K, ed il numero K di P, e perciò l'vnità, ed i numeri E, G, L, come ancora l'vnità, ed i numeri F, K, P [d] ſono continui proportionali. E perche, come appariſce nella 2. propoſ. di queſto, i termini L, M, N, P ſono ſempre vno più de' termini L, G, E, ouero P, K, F, aggiunta à i termini L, G, E l'vnità per primo termine, ſaranno tanti i termini continui proportionali L, G, E, con l'vnità, per quanti ſono i termini L, M, N, P; ma i termini L, M, N, P, ſono tanti, per quanti ſono i termini A, C, D, B, tanti dunque ſaranno i termini con-

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità 1
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

[a] 2. del 8.

[b] 7. aſſioma del 7.

[c] 5. aſſioma del 7.

[d] 20. defin. del 7.

tinui propottionali L, G, E, coll'vnità, per quanti ſono i termini A, C, D, B. Per la qual coſa tanti medij continui proportionali cadono frà i due A, & B, per quanti ne cadono frà l'vnità, ed il numero A, ch'è vguale ad L. Nell' iſteſſo modo ſi proverà, che tanti ſono i numeri medij, che cadono frà i due A, & B, per quanti ſono quelli, che cadono frà l'vnità, ed il numero B, che fù dimoſtrato vguale à P, come fù propoſto dimoſtrare.

A 8 C 12 D 18 B 27
vnità
1
E 2 F 3
G 4 H 6 K 9
L 8 M 12 N 18 P 27

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Quanti medij continui proportionali cadono frà l'vnità, e ciaſcuno di due numeri, altrettanti ne caderanno frà i medeſimi due numeri.

Frà i due numeri A, & B, e l'vnità Z cadano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, cioè frà l'vnità Z, ed il numero A cadano i medij C, D, E; e frà l'vnità Z, ed il numero B, ne cadano altrettanti, come F, G, H. Dico che quanti medij cadono frà l'vnità Z, ed il numero A; ouero frà l'vnità Z, ed il numero B, altrettanti medij continui proportionali cadono frà i numeri A, & B. Si multiplichino i due C, F ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia K; poi ſi multiplichi C per li due K, & G, ed i prodotti ſiano L, ed M; ed il medeſimo numero C multiplichi i tre L, M, H, ed i prodotti ſiano N, P, Q, i quali, eſſendo tanti, per quanti ſono i medij, che cadono frà l'vnità, ed il numero A, ouero frà l'vnità, ed il numero B, ſi pongano frà i numeri A, & B. Dico che i numeri A, N, P, Q, B ſono continui proportionali. Perche, per ipoteſi, l'vnità Z à C è come C à D, & D ad E, & E ad A; tante volte l'vnità miſura C, [a] per quante volte C miſura D, ed il numero D miſura E, come ancora E miſura A; ma l'vnità Z miſura C per il numero C; perciò [b] C miſura D, il numero D miſura E, ed E miſura A per il medeſimo numero C. Per la qual coſa [c] C, multiplicando ſe medeſimo, produce D; ed il medeſimo C, multiplicando D, produce E; e multiplicando E, produce A. Nel medeſimo modo ſi dimoſtrerà, che F, multiplicando ſe medeſimo, produce G, e multiplicando G, produce H, ed ancora, multiplicando H, produce B. In oltre perche C, multiplicando C, & F, produſſe D, e K; ſarà D à K [d] come C ad F. Similmente, perche F, multiplicando C, ed F, produſſe K, & G; la proportione di K à G [e] ſarà come quella di C ad F, cioè come quella di D à K; e perciò i tre D, K, G ſono

A 81 N 162 P 324 Q 648 B 1296
E 27 L 54 M 108 H 216
D 9 K 18 G 36
C 3 F 6
1
Z

a 20. defin. del 7.
b 5. a ſiom. del 7.
c 9. aſſioma del 7.
d 17. del 7.
e 17. del 7.

con-

continui proportionali nella proportione di C ad F. Di nuouo perche C multiplicando i tre D,K,G, produſſe i numeri E,L,M, i numeri E,L,M f ſaranno nella medeſima continua proportione de i numeri multiplicati D,K,G; cioè la medeſima proportione di C ad F. E perche i due C,ed F, multiplicando il medeſimo numero F, produſſero i numeri M, ed H; ſarà la proportione di M ad H g come quella de i multiplicanti, cioè come quella di C ad F; dalche i numeri E, L, M, H ſono continui proportionali nella proportione di C ad F. Finalmente perche C, multiplicando i quattro E, L, M, H, produſſe i numeri A, N, P, Q; ſaranno i numeri A, N, P, Q h nella continua proportione de i numeri E,L,M,H; cioè nella proportione di C ad E. E ſimilmente i numeri C,F, multiplicando il medeſimo numero H, hanno prodotti i numeri Q, & B; la proportione di Q à B K ſarà come quella di C ad F; cioè come quella, che ſucceſſiuamente hanno i numeri A,N,P,Q. Per la qual coſa i numeri A,N,P,Q,B ſono continui proportionali; e perciò frà i due numeri A, & B, cadono tanti medij continui proportionali, per quanti ne cadono frà l'vnità Z, ed i numeri A,& B, ch'era da dimoſtrarſi.

f 17. del 7.

g 18. del 7.

h 17. del 7.

K 18 del 7.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XI.

Frà due numeri quadrati cade vn numero medio proportionale: ed il numero quadrato al numero quadrato, hà duplicata proportione, che il lato al lato.

Siano i due numeri quadrati A, & B, i di cui lati, ò radici, ſiano i numeri C,& D. Dico che frà i numeri quadrati A, & B, cade vn numero medio proportionale; e che il numero quadrato A al numero quadrato B, hà duplicata proportione, che il lato C al lato D. S'intendano multiplicati i numeri C,D, ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia E. Perche C è lato di A, multiplicato C in ſe medeſimo produce A, e per ſimile ragione, multiplicato D in sè medeſimo, il prodotto ſarà B. In oltre perche i numeri C, & D, multiplicati per il medeſimo numero C, producono i numeri A, & E; ſarà la proportione di A ad E a come quella di C à D. Similmente perche i numeri C, & D, multiplicati per il medeſimo numero D, producono i numeri E, & B; ſarà E à B b come C à D; cioè c come A ad E: per la qual coſa i tre A,E,B ſono continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò frà i due numeri quadrati A, & B, cade vn ſolo numero E medio proportionale. Finalmente perche i tre numeri A,E,B ſono continui proportionali; la proportione del primo A al terzo B d è duplicata di quella, che hà il primo A al ſecondo E; ma per quel, che ſi è dimoſtrato, la proportione di A ad E è come quella di C à D, hauerà il numero quadrato A al numero quadrato B, duplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù propoſto dimoſtrare.

A 9 E 21 B 49
C 3 D 7

a 17. del 7.

b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.

d lemma 7. dopo la 18. del 6.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che se due numeri si multiplicano in se medesimi, e si multiplicano frà di loro, i prodotti sono in continua proportione de i numeri multiplicati.

THEOREMA X. PROPOSITIONE XII.

Frà due numeri cubi cadono due medij continui proportionali; ed il cubo al cubo hà triplicata proportione, che il lato al lato.

Siano i due numeri cubi A, & B, i di cui lati, ò radici, siano i numeri C, & D. Dico che frà i numeri cubi A, & B, cadono due medij continui proportionali; e che il numero cubo A al numero cubo B hà triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D. Si multiplichi C in se medesimo, ed il prodotto sia E; e multiplicando D in se medesimo, si produca F; poi si multiplichino i due C, & D scambieuolmente, ed il prodotto sia G; e finalmente i due numeri C, & D multiplichino il medesimo numero G, ed i prodotti siano H, & K. Perche il numero C, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri E, & G; sarà E à G [a] come C à D. Similmente perche il numero D, multiplicando i due C, & D, produsse i numeri G, ed F; sarà G ad F [b] come C à D, cioè [c] come E à G; dal che i tre E, G, F sono continui proportionali nella proportione di C à D. In oltre, per la definitione del cubo, C multiplicando E, produce A; mà il numero C, multiplicando G, produsse H; sarà A ad H [d] come E à G; cioè [e] come C à D. Similmente, per la definitione del cubo, D, multiplicando F, produce B: mà, per costruttione, D, multiplicando G, produsse K; sarà K à B [f] come G ad F, cioè come C à D, ouero come A ad H. Di più, perche i due C, & D multiplicando il medesimo numero G, produssero i numeri H, & K; sarà H à K [g] come C à D: per la qual cosa i numeri A, H, K, B sono continui proportionali, de' quali i medij sono H, & K, che, per la costruttione fatta, sono due solamente, e perciò frà i due numeri cubi A, & B, cadono due soli medij continui proportionali. Finalmente perche i quattro numeri A, H, K, B sono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà al secondo H: mà la proportione di A ad H è come quella di C à D, haurà il numero cubo A al numero cubo B, triplicata proportione di quella, che hà il lato C al lato D, come fù proposto dimostrare.

A 27 H 36 K 48 B 64
E 9 G 12 F 16
C 3 D 4

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 17. del 7.
e Scol. alla 12. del 7.
f 17. del 7.
g 18. del 7.
h Lemma 7 dopo la 18. del 6.

CO-

COROLLARIO.

Nell'antecedente propoſitione appare, che multiplicati i lati di due numeri cubi, come C, D in ſe medeſimi, e multiplicati frà di loro in modo, che produchino le continue proportionali E, G, F; poi li due C, D, multiplicandoli nel medeſimo numero G, i prodotti H, K, con i cubi A, & B, cioè A, H, K, B, ſono continui proportionali nella proportione di C à D.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Se, di quanti ſi voglia numeri continui proportionali, ogn'vno è multiplicato in ſe medeſimo, i prodotti ſaranno ſimilmente continui proportionali; e ſe i numeri poſti nel principio ſi multiplicaranno ne i loro prodotti, i numeri, che ne riſultano, ſaranno continui proportionali; e ſempre, multiplicando i numeri, poſti nel principio, per gli vltimi prodotti, quelli, che ne riſultano, ſono continui proportionali.

Siano i numeri continui proportionali A, B, C, ciaſcuno de' quali ſi multiplichi in ſe medeſimo, ed i prodotti ſiano i numeri D, E, F.

A 2 B 4 C 8
D 4 N 8 E 16 O 32 F 64
G 8 P 16 Q 32 H 64 R 128 S 256 I 512
K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo ſi multiplichino queſti per li primi A, B, C, cioè A multiplichi D, il numero B multiplichi E, ed il numero C multiplichi F; ed i prodotti ſiano G, H, I. Similmente ſi multiplichino queſti vltimi prodotti, col medeſimo ordine, per li numeri A, B, C, e ne vengano i numeri K, L, M, e con queſt'ordine ſi proceda quanto ſi vuole. Dico che i numeri D, E, F ſono continui proportionali: e ſimilmente i numeri G, H, I, come ancora i numeri K, L, M, ſono continui proportionali. Si multiplichino i due A, & B ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia N; e multiplicando i due B, C ſcambieuolmente, ſe ne produca il numero O. Di nuouo multiplichi A i due N, E, ed i prodotti ſiano P, Q. Di più, multiplichi B i numeri O, F, e ſi produchino i numeri R, S. Similmente A multiplichi i tre P, Q, H, e faccia i prodotti T, V, X: ed il numero B multiplichi i tre R, S, I, e faccia i prodotti Y, Z, &. Perche A, multiplicando ſe me-

deſimo,

desimo, è multiplicando ancora B, produsse i numeri D, ed N; sarà D ad N, [a] come A à B. Similmente B, multiplicando A, e multiplicando se medesimo, produsse i due N, ed E; sarà N ad E, [b] come A à B, cioè [c] come D ad N; e perciò i tre D, N, E sono continui proportionali; nella proportione di A à B. Di nuouo, perche B, multiplicando se medesimo, e multiplicando C, produsse E, ed O; sarà B à C, [d] come E ad O. Similmente C, multiplicando B, e multiplicando se medesimo, produsse O, ed F; sarà O ad F [e] come B à C; si che i tre, E, O, F sono continui proportionali nella proportione di B à C; cioè di A à B: mà li tre D, N, E sono continui proportionali nella medesima proportione di A à B; sarà D ad N, come E ad O; & N ad E, come O ad F; e per l'egualità, D ad E [f] sarà come E ad F: per la qual cosa i tre primi prodotti D, E, F sono continui proportionali.

a 17. del 7.
b 17. del 7.
c Scol. alla 12. del 7.
d 17. del 7.
e 17. del 7.
f 14. del 7.

A 2 B 4 C 8
D 4 N 8 E 16 O 32 F 64
G 8 P 16 Q 32 H 64 R 128 S 256 I 512
K 16, T 32, V 64, X 128, L 256, Y 512, Z 1024, & 2048, M 4096,

Di nuouo, perche A, multiplicando i tre D, N, E, produsse i tre G, P, Q, saranno i prodotti G, P, Q, [g] nella medesima proportione de i tre D, N, E; cioè nella proportione di A à B. Parimente, perche A, & B, multiplicando il medesimo numero E, produssero i due Q, ed H; sarà Q ad H [h] come A à B; dal che i quattro G, P, Q, H sono continui proportionali nella proportione di A à B. Oltre à ciò, perche B, multiplicando i tre E, O, F, produsse i tre H, R, S; saranno i tre H, R, S, [k] proportionali, nella proportione de i tre E, O, F; cioè nella proportione di B à C ouero di A à B. E similmente, perche, multiplicando i due B, C, per il medesimo numero F, produsse i due S, ed I; sarà S ad I [l] come B à C, cioè come A à B; per la qual cosa i quattro numeri H, R, S, I sono continui proportionali nella proportione di A à B; mà i quattro G, P, Q, H sono similmente continui proportionali nella medesima proportione di A à B; saranno i quattro G, P, Q, H nella medesima continua proportione de i quattro H, R, S, I; e per l'egualità, sarà G ad H [m] come H ad I, e perciò i secondi prodotti G, H, I sono continui proportionali. Nell' istesso modo si dimostrerà che i tre vltimi prodotti K, L, M sono continui proportionali, che era da dimostrarsi.

g 17. del 7.
h 18. del 7.
k 17. del 7.
l 18. del 7.
m 14. del 7.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vn numero quadrato misura vn altro numero quadrato, il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; e se il lato d'vn numero quadrato misura il lato d'vn altro numero quadrato, il quadrato dell'vno, misurerà il quadrato dell'altro.

Siano

Siano i numeri quadrati A, & B, i di cui lati siano C, & D; e prima il numero quadrato A misuri il numero quadrato B. Dico che il lato C misurerà il lato D. Si multiplichino i numeri C & D scambieuolmente, ed il prodotto sia E, per il Corollario all'vndecima propositione di questo, i tre numeri A, E, B sono continui proportionali, nella proportione di C à D; mà il primo A, per ipotesi, misura il terzo B; per la settima di questo, il primo A misurerà ancora il secondo numero E: e perche A ad E è come C à D, ed il numero A misura E, il numero C [a] misurerà ancora il numero D, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 4 E 16 B 64
C 2 D 8

a 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico, che il quadrato A misurerà il quadrato B. S'intenda fatta l'istessa costruttione, saranno i tre numeri A, E, B continui proportionali, nella proportione di C à D; e perciò A ad E è come C à D; ma il numero C misura, per ipotesi, il numero D; il numero A ancora [b] misurerà il numero E. Finalmente perche A ad E è come E à B, ed il numero A misura E, ancora il numero E [c] misurerà B; per la qual cosa il numero quadrato A [d] misurerà il numero quadrato B, come fù proposto dimostrare.

b 20. defin. del 7.

c 20. de fin. del 7.

d 11. assioma del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se vn numero cubo misura vn altro numero cubo, il lato di vno misura il lato dell'altro; e se il lato misura il lato, ancora il cubo misurerà il cubo.

Siano i numeri cubi A, & B, i di cui lati siano C, & D. Dico che, se il cubo A misura il cubo B, ancora il lato C misurerà il lato D; e se il lato C misura il lato D, ancora il cubo A misurerà il cubo B. Si multiplichino in se medesimi i numeri C, & D, ed i prodotti siano E, ed F; poi si multiplichino i numeri C, D scambieuolmente, ed il prodotto sia G, per il Corollario all'11. propositione, i tre numeri E, G, F saranno continui proportionali, nella proportione di C à D. Di nuouo, i numeri C, & D multiplichino il numero G, ed i prodotti siano H, & K; sarà H à K [a] come C à D; ed i quattro numeri A, H, K, B, per il Corollario alla 12. propositione di questo, sono continui proportionali, nella proportione di C à D. E perche il primo termine A misura l'vltimo B, perciò il medesimo numero A [b] misurerà il secondo H, ma la proportione di A ad H è come C à D, misurando A il numero H, e ancora C misurerà il numero D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 8 H 24 K 72 B 216
E 4 G 12 F 36
C 2 D 6

a 18 del 7.

b 7. del 8.

c 20. defin. del 7.

Di nuouo, supposto che il lato C misuri il lato D. Dico che il cubo A misurerà il cubo B. Si concepisca fatta la medesima costruttione, e per il Corollario alla 12. propositione di questo, i numeri A, H, K, B sono con-

continui proportionali nella proportione di C à D; dal che A ad H sarà come C à D: mà C misura D, per ipotesi, perciò A misurerà [d] H. In oltre perche i numeri A, H, K, B, sono continui proportionali, ed A misura H, ancora H [e] misurerà vgualmente K, ed il numero K misurerà B. Hor perche A misura H, ed H misura K, il numero A [f] misurerà K; mà K misura B, dunque A misurerà B, ch'era da dimostrarsi.

A 8 H 24 K 72 B 216
E 4 G 12 F 36
C 2 D 6

d 20. defin. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 11. assioma del 7.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se il numero quadrato non misura il numero quadrato, ne meno il lato misura il lato; e se il lato d'vn quadrato non misura il lato d'vn altro quadrato, ne meno quel quadrato misura l'altro quadrato.

Siano i numeri quadrati A, B, i di cui lati siano C, D. Dico prima, che se il quadrato A non misura il quadrato B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Misuri C, s'è possibile, il lato D, per l'antecedente propositione, il quadrato A misurerà il quadrato B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura D, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A 16 B 81
C 4 D 9

Di nuouo Dico che, se il lato C non misura il lato D, ne meno il quadrato A misurerà il quadrato B. Perche, se il quadrato A misurasse il quadrato B, per l'antecedente propositione, il lato C misurarebbe il lato D, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il quadrato A misura il quadrato B, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se il numero cubo non misura vn altro numero cubo, ne meno il lato dell'vno misurerà il lato dell'altro; e se il lato d'vn numero cubo non misura il lato d'vn altro numero cubo, ne meno il cubo dell'vno, misurerà il cubo dell'altro.

Siano i numeri cubi A, B, i di cui lati siano i numeri C, D. Dico prima, che se il cubo A non misura il cubo B, ne meno il lato C misurerà il lato D. Perche se il lato C misurasse il lato D, il cubo A [g] misurarebbe il cubo B, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C misura il lato D.

A 8 B 27
C 2 D 3

g 15. del 8.

Suppostо che il lato C non misuri il lato D. Dico che il cubo A non misura il cubo B. Misuri il cubo A, s'è possibile, il cubo B, per la 15.

propo-

propoſitione di queſto, il lato C miſurerà il lato D, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque il cubo A miſura il cubo B, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Frà due numeri piani ſimili cade vn medio proportionale; ed il numero piano al ſimile numero piano, hà duplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri piani ſimili A,B,ed i lati del piano A ſiano C,& D; come ancora i lati del piano B ſiano E,F,in modo,che multiplicandoſi i due C,D ſcambieuolmente, produchino il piano A; e multiplicandoſi i due E,F, produchino il piano B. Perche i piani A, & B ſono ſimili, perciò i loro lati [a] ſarannno proportionali, e ſarà C à D come E ad F. Dico prima, che frà i due A,& B cade vn medio proportionale. Si multiplichino i due D,E ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia G. Perche C à D è come E ad F, permutando, [b] C ad E ſarà come D ad F. Hor perche D, multiplicando i due C, ed E, produce i due A, & G; ſarà A à G, [c] come C ad E, cioè [d] come D ad F: e perche E, multiplicando i due D, ed F, produce i due G,& B; ſarà G à B [e] come D ad F; cioè come A à G: dal che i tre A,G,B ſono continui proportionali; e perciò frà i numeri piani A,& B cade vn ſolo medio proportionale, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A 12 G 18 B 27
C 6 D 2 E 9 F 3

[a] 21.defin. del 7.
[b] 13. del 7.
[c] 17. del 7.
[d] Scol. alla 12. del 7.
[e] 17.del 7.

Di nuouo Dico, che il numero piano A al ſimile numero piano B, hà duplicata proportione, di quella che hà il lato homologo C al lato homologo E; ouero di quella, che hà il lato homologo D al lato homologo F; cioè che hà l'antecedente all'antecedente, ò il conſeguente al conſeguente. Perche i tre numeri A,G,B ſono continui proportionali, il primo A al terzo B [f] hà duplicata proportione di quella, che hà il primo A al ſecondo G: ma A à G, per quel che ſi è dimoſtrato, è come C ad E, ouero come D ad F; hauerà il numero piano A al numero piano B duplicata proportione, di quella che hà C ad E, ouero D ad F, come fù propoſto dimoſtrare.

[f] Lemma 7. doppo la 18. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Frà due numeri ſolidi ſimili cadono due medij continui proportionali; ed il numero ſolido al numero ſolido ſimile hà triplicata proportione, che il lato homologo dell'vno al lato homologo dell'altro.

Siano i numeri ſolidi ſimili A, & B; i lati del ſolido A ſiano i notati C, D, E, ed i lati del ſolido B ſiano i notati F, G, H; e perche i ſolidi A, & B ſono ſimili, perciò haueranno i lati proportionali; cioè C à D, come F à G, & D ad E come G ad H. Dico prima, che frà i due A, & B cadono due medij proportionali. Si multiplichino i due C, D ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia K. Parimente ſi multiplichino i due F, G ſcambieuolmente, ed il prodotto ſia L; e multiplicandoſi i due D, F ſcambieuolmente producano il numero P. In oltre multiplicando i due E, H, per il medeſimo numero P, produchino i numeri M, N. Perche i tre C, D, E ſono proportionali à i tre F, G, H, permutandoſi, [a] ſaranno ancora proporrionali; cioè C ad F ſarà come D à G, e come E ad H. Di più, perche D, multiplicando i due C, ed F, produſſe i due K, & P, [b] ſarà K à P come C ad F. Similmente perche F, multiplicando i due D, & G, produſſe i due P, ed L; ſarà P ad L [c] come D à G; per la qual coſa i tre K, P, L ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H. E perche il ſolido A è prodotto dalla multiplicatione de i tre lati C, D, E, ed il numero K naſce dalla multiplicatione de due C, D, multiplicando il numero K per l'altro lato E, produrrà il numero A. Oltre à ciò perche il ſolido B vien fatto [d] dalla multiplicatione de i tre lati F, G, H, ed il numero L è fatto dalla multiplicatione de i due F, G multiplicando H il numero L, produrrà il numero B. E perche E, multiplicando i due K, P, produſſe i due A, M; ſarà il numero A al numero M, [e] come K à P; cioè come C ad F, ouero come D à G, ò pure come E ad H. Similmente H, multiplicando P, ed L, produſſe i due N, B; ſarà N à B [f] come P ad L, cioè come C ad F, ouero D à G, ò pure E ad H. Finalmente perche i due E, H, multiplicando P, produſſero M, ed N, la proportione di M ad N [g] ſarà come quella di P ad L; cioè come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H: per la qual coſa i quattro A, M, N, B, ſono continui proportionali nella proportione di C ad F, ouero di D à G, ò pure di E ad H; e perciò frà i numeri ſolidi ſimili A, & B, cadono due numeri medij proportionali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 13. del 7.

A 30 M 60 N 120 B 240
K 6 P 12 L 24
C 2 D 3 E 5 F 4 G 6 H 10

b 17 del 7.

c 17. del 7.

d 17. diffin. del 7.

e 17. del 7.

f 17. del 7.

g 18. del 7.

Di nouo. Dico che il ſolido A al ſolido ſimile B, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo C al lato homologo F, ouero D à G, ouero E ad H. Perche i quattro numeri A, M, N, B ſono continui proportionali, il primo A al quarto B, [h] hà triplicata proportione di quella, che hà il primo A al ſecondo M: ma il primo A al ſecondo M è come C ad F, ouero D à G, ouero E ad H; il ſolido dunque A al ſimile ſolido B, hauerà triplicata proportione di quella, che hà C ad F, ouero D à G, ouero E ad H, ch'era da dimoſtrarſi.

h Lemma 7. dopo la 18. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se frà due numeri piani cade vn medio proportionale, quei numeri ſono piani ſimili.

Frà i due numeri A, & B, cada il numero C, medio proportionale. Dico che i numeri A, & B ſono piani ſimili. Si prendano i due numeri D, ed E in modo, che ſiano [a] i minimi nella proportione di A à C, ouero C à B, perche i due D, E ſono minimi nella proportione di A à C, perciò i numeri D, ed E [b] miſurano vgualmente i due A, & C, per qualche numero F. Similmente perche A à C, per ipoteſi, è come C à B, ſarà D ad E [c] come C à B: mà i numeri D, E, per coſtruttione, ſono i minimi nella proportione di C à B, perciò miſurano i numeri C, & B [d] vgualmente per qualche numero G. Hor perche D miſura il numero A per il numero F, multiplicando F nel numero D, [e] il prodotto ſarà A, ed il medeſimo numero F, multiplicando il numero E, produrrà C. Di più, perche i numeri D, E miſurano vgualmente i numeri C, B, per il numero G, multiplicando G per D, [f] produrrà il numero C; e multiplicando G per E, produrrà il numero B. Oltre à ciò; perche i due F, & G, multiplicando il medeſimo numero E, produſſero i numeri C, & B, ſarà C à B, [g] come F à G; mà C à B è come D ad E, ſarà D ad E [h] come F à G; e permutando, D ad F [k] ſarà come E à G. In oltre, perche F, multiplicando D, produſſe il numero A, ſarà A [l] numero piano, i di cui lati ſono D, ed F. Similmente, multiplicando G per E, ſi produſſe il numero B, e perciò B [m] ſarà numero piano, i di cui lati ſono E, & G: mà queſti quattro lati furono dimoſtrati proportionali, cioè D ad F come E à G; i numeri dunque A, & B [n] ſono piani ſimili, come fù propoſto dimoſtrare.

A 18	C 24	B 32		
D 3	E 4	F 6	G 8	

a Scol. alla 35. del 7.
b 21. del 7.
c Scol. alla 22. del 7.
d 21. del 7.
e 9. aſſioma del 7.
f 9. aſſioma del 7.
g 18. del 7.
h Scol. alla 22. del 7.
k 13. del 7.
l 16. defin. del 7.
m 16. defin. del 7.
n 1. defin. del 7.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se frà due numeri cadono due medij continui proportionali, quei numeri ſaranno ſolidi ſimili.

Frà i due numeri A, & B cadano due medij continui proportionali C, & D. Dico che i numeri A & B ſono ſolidi ſimili. Si prendano i tre E, F, G [a] minimi nella proportione de' i numeri A, C, D, B ſaranno i tre E, F, G continui proportionali; e perche frà i due E, & G cade vn medio proportionale F, ſaranno i due E, & G [b] piani ſimili. Hor ſiano li due H & K i lati del piano E, ed i due P, ed L i lati del piano G; ſarà H à K [c] come P ad L, e permutandoſi, H à P [d] ſarà come K ad L: e perche i tre E, F, G ſono i minimi nella proportione de i

A 24	C 72	D 216	B 648	
E 1	F 3	G 9		
H 1	K 1	M 24	P 3	L 3 N 72

a 35. del 7.
b 20. del 8.
c 21. defin. del 7.
d 23. del 7.

numeri A, C, D, perciò i numeri E, F, G misureranno vgualmente i numeri A, C, D, per qualche numero M. Similmente perche i numeri E, F, G sono i minimi nella proportione de i tre C, D, B, perciò e misurano vgualmente i numeri C, D, B, per qualche numero N in modo, che M, multiplicando i numeri E, F, G produrrà i numeri A, C, D; ed il numero N, multiplicando i medesimi E, F, G produca i numeri C, D, B. E perche dalla multiplicatione de i due lati H, K è fatto il numero E; e dalla multiplicatione de i due P, L, è fatto il numero G; ed il numero A è fatto dalla multiplicatione di M in E, in conseguenza il numero A sarà fatto dalla multiplicatione de i tre H, K, M. Nell'istesso modo si prouerà, che il numero B è fatto dalla multiplicatione de i tre numeri P, L, N; per la qual cosa i numeri A, & B sono f numeri solidi, i di cui lati sono H, K, M, & P, L, N. In oltre perche M, N multiplicando il medesimo numero F, per quel che si è dimostrato producono i numeri C, D sarà g G à D, come M ad N. Similmente perche N, multiplicando i due E, F produsse i due C, & D; sarà E ad F, h come C à D; mà C à D è come M ad N; sarà E ad F, come M ad N. Di più essendo i numeri E, & G piani simili, haueranno i duplicata proportione de' loro lati homologhi, cioè haurà E à G duplicata proportione di quella, che hà il lato homologo H al lato homologo P; ouero di quella, che hà K ad L; mà E à G k hà duplicata proportione che il medesimo numero E ad F (stante che E, F, G sono continui proportionali) perciò E ad F sarà come H à P, ouero come K ad L; mà E ad F, per quel che si è dimostrato, è come M ad N; sarà H à P, o come K ad L; e K ad L come M ad N: dal che i tre lati H, K, M sono proportionali à i tre lati P, L, N, per la qual cosa il solido A, prodotto da i tre lati H, K, M p sarà simile al solido B, prodotto da i tre lati P, L, N, come fù proposto dimostrare.

A 24	C 72	D 216	B 648
E 2	F 3	G 9	
H 1	K 1	M 24	P 3	L 3	N 72
A 8	C 12	D 18	B 27
E 4	F 6	G 9	
H 2	K 2	M 3	P 3	L 3	N 3

e 21. del 7.
f 21. del 7.
g 17. defin. del 7.
h 18. del 7.
K 17. del 7. l Scol. alla 12. del 7.
m 18. del 8.
n Lemma 7. dopo la 18. del 6.
o Scol. alla 12. del 7.
p 21. defin. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se tre numeri sono continui proportionali, ed il primo sia numero quadrato, ancora il terzo sarà numero quadrato.

Siano i tre numeri A, B, C continui proportionali, ed il primo A sia numero quadrato. Dico che il terzo C sarà ancora numero quadrato. Perche frà gli estremi A; & C cade il numero medio proportionale B, i due A, & C, a saranno piani simili; ma il piano A è suppo-

A 9	B 54	C 324

a 20. del 8.

sto

ſto quadrato, in conſeguenza il ſimile piano C ſarà quadrato, che era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se quattro numeri ſono continui proportionali, ed il primo ſia numero cubo, ancora il quarto ſarà numero cubo.

Siano i quattro numeri A, B, C, D continui proportionali, ed il primo A ſia numero cubo. Dico che il quarto D ſarà ancora numero cubo. Perche frà gli eſtremi A, & D cadono due medij continui proportionali; perciò i due A, & D [a] ſono ſolidi ſimili: ma il numero A è ſuppoſto numero cubo: ſarà il numero D, che gli è ſimile, ancora numero cubo, ch'era da dimoſtrarſi.

A 27 B 45 C 75 D 125

a 22. del 8.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se due numeri hanno frà di loro l'iſteſſa proportione, che hà vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato; ſe il primo è numero quadrato, ancora il ſecondo ſarà numero quadrato.

Siano i due numeri A, & B da vna parte, e due numeri quadrati C, & D da vn altra parte; ed habbia il numero A al numero B l'iſteſſa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D; e ſia A numero quadrato. Dico che B ſarà ancora numero quadrato. Cada frà i due numeri quadrati C, & D [a] vn medio proportionale, che ſia E. Similmente cada frà i due numeri A, & B [b] vn medio proportionale, che ſia F. Perche i tre A, F, B ſono continui proportionali, ed il primo A è numero quadrato, ſarà ancora il terzo B [c] numero quadrato, il che era da dimoſtrarſi.

A 36 F 48 B 64
C 9 E 12 D 16

a 11. del 8.
b 8. del 8.
c 22. del 8.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se due numeri hanno frà di loro l'iſteſſa proportione, che hà vn numero cubo ad vn altro numero cubo, ed il primo di quelli è numero cubo, ancora il ſecondo ſarà numero cubo.

Hab-

Habbia il numero A al numero B, quella proportione, che hà il numero cubo C al numero cubo D, ed il numero A sia cubo. Dico che il numero B sarà ancora lui cubo. Frà i due numeri cubi C, & D [a] cadano due medij continui proportionali, come E, ed F, e frà i due numeri A, & B [b] cadano due medij continui proportionali, come G, ed H. Perche i quattro A, G, H, B sono continui proportionali, de'quali il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto B [c] numero cubo, come fù proposto dimostrare.

A 8 G 12 H 18 B 27
C 64 E 96 F 144 D 216

a 12. del 8.
b 8. del 8.
c 3. del 8.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

I simili numeri piani sono frà di loro, come i numeri quadrati.

Siano i simili numeri piani A, & B. Dico che il numero piano A al simile numero piano B, è come qualche numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche i numeri A, & B sono piani simili, [a] caderà frà di loro vn medio proportionale; sia quello il numero C. Si prendano tre numeri, come D, E, F, [b] che siano minimi nella continua proportione di A, C, B, per il primo Corollario alla 2. propositione di questo, gli estremi D, ed F sono numeri quadrati. Hor perche A à C è come D ad E, e C à B è come E ad F, per l'egualità, il numero piano A [c] al simile numero piano B è come il numero quadrato D al numero quadrato F, ch'era da dimostrarsi.

A 20 C 30 B 45
D 4 E 6 F 9

a 18. del 7.
b 35. del 7.
c 14. del 7.

SCOLIO.

La conuersa dell'antecedente propositione facilmente la dimostraremo col P. Clauio nel seguente modo.

I numeri, che hanno la medesima proportione, quale hanno i numeri quadrati, sono piani simili.

Habbia il numero A al numero B l'istessa proportione, quale hà il numero quadrato C al numero quadrato D. Dico che i numeri A, & B sono piani simili. Perche frà i numeri quadrati C, & D [a] cade vn medio proportionale, e la proportione di C à D è come A à B, caderà frà i due A, & B [b] vn medio proportionale, e perciò i numeri A, & B [c] sono piani simili, ch'era da dimostrarsi.

A 8 B 18
C 16 D 36

a 11. del 8.
b 8. del 8.
c 20. del 8.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

I numeri solidi simili sono frà loro, come i numeri cubi.

Siano

Siano i numeri ſolidi ſimili A, & B. Dico che il numero A al numero B è come qualche numero cubo ad vn altro numero cubo. Perche i numeri A, & B ſono ſolidi ſimili, frà eſſi caderanno [a] due medij cõtinui proportionali, che ſiano C, & D: ſi prendano poi quattro numeri minimi [b] nella continua proportione de' numeri A, C, D, B; ſaranno gli eſtremi E, ed H, per il primo Corollario alla ſeconda propoſitione di queſto, numeri cubi. E perche i numeri E, F, G, H ſono nella continua proportione de i numeri A, C, D, B, per l'egualità, ſarà E ad H [c] come A à B; cioè il numero ſolido A al ſimile ſolido B, come il numero cubo E al numero cubo H, che era da dimoſtrarſi.

A 240	C 360	D 540	B 810
E 8	F 12	G 18	H 27

[a] 19. del 8.
[b] 35. del 7.
[c] 14. del 7.

SCOLIO.

La conuerſa di queſta propoſitione è facilisſima nel ſeguente modo.

I numeri, che hanno l'iſteſſa proportione de' numeri cubi, ſono ſoli di ſimili.

Habbia il numero A al numero B l'iſteſſa proportione, quale hà il numero cubo C al numero cubo D. Dico che i numeri A, & B ſono ſolidi ſimili. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D, ed i numeri C, & D ſono cubi, caderanno frà i due C, & D, [a] due medij continui proportionali: mà il cubo C al cubo D è come A à B, caderanno ancora frà i due A, & B [b] due medij continui proportionali, e per la 21. propoſitione di queſto, gli eſtremi A, & B ſono ſolidi ſimili, come ſù propoſto dimoſtrare.

A 16	B 54	
C 64	D 216	

[a] 12. del 8.
[b] 8. del 8.

SCOLIO.

Per le coſe da dimoſtrarſi non ſarà inutile il ſeguente problema.

Ritrouare due numeri piani, i quali non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato.

Si prendano due numeri primi, ouero due numeri frà di loro primi, che niſſuno ſia numero quadrato, e ſiano per eſſempio li notati A & B. Dico che il numero A al numero B non è come il numero quadrato al numero quadrato; ſe il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, li numeri A & B, per la 26. di queſto, ſaranno piani ſimili, e per la 18. di queſto, frà li due A & B cade vn medio proportionale; e perche li due eſtremi A & B, per ipoteſi, ſono numeri primi, non hanno alcuna commune miſura fuor che l'vnità; per la qual coſa li due eſtremi A & B, ed il medio, non hanno commune miſura, e pereiò ſono frà di loro primi, e per la prima propoſitione di queſto ſono i minimi nella

A	B
7	13

lo-

loro proportione, è per il Corollario primo alla propoſitione ſeconda di queſto, li due eſtremi A & B ſono numeri quadrati, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che niſſuno delli due ſia quadrato; non dunque il numero A al numero B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO I.

Da quel che ſi è detto è manifeſto, che li numeri primi non ſono come i numeri quadrati.

COROLLARIO II.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo da ritrouare due numeri, che non ſiano piani ſimili l'aggregato de quali non ſia numero quadrato, ne habbia proportione à ciaſcuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato; poiche, ſe ſi diuiderà vn numero non quadrato in due numeri primi, ouero frà di loro primi, il loro aggregato non ſarà numero quadrato, ed il medeſimo aggregato, per la 30. propoſitione del ſettimo, ſarà primo à ciaſcuno di quelli, e per l'antecedente Scolio, l'aggregato à ciaſcuno di quelli non ſarà come numero quadrato à numero quadrato.

Fine del Ottauo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO NONO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se dalla ſcambieuole multiplicatione di due numeri piani ſimili, ſe ne produce qualche numero, il prodotto ſarà numero quadrato.

SIANO i due numeri piani ſimili A, & B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmẽte, produchino il numero C.

A 6 B 54 D 36 E 108 C 324

Dico che il prodotto C è numero quadrato. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia il numero quadrato D. Perche A, multiplicando i due A, & B, produce i numeri D, & C, ſarà il numero A al numero B, [a] come D à C: ma frà i piani ſimili A, & B [b] cade vn medio proportionale, caderà ancora frà i due D, & C vn medio proportionale, ſia dunque quello il numero E; ſaranno i tre D, E, C coutinui proportionali. Hor eſſendo i tre numeri D, E, C continui proportionali, ed il primo D, per coſtruttione, è quadrato, ſarà ancora [d] il terzo C numero quadrato, come fù propoſto dimoſtrare.

a 17. del 7.
b 18. del 8.
c 8. del 8.
d 22. del 8.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due numeri, multiplicandoſi ſcambieuolmente, producono vn numero quadrato; quelli ſono piani ſimili.

Siano i due numeri A, & B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmente, produchino il numero quadrato C. Dico che i numeri A, & B ſono

piani ſimili. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia D. Perche A, multiplicando B, e multiplicando ſe medeſimo, produce i due D, & C; ſarà A à B [a] come D à C; ma frà i due quadrati D, & C, [b] cade vn medio proportionale; caderà ancora frà i due A, & B [c] vn medio proportionale; per la qual coſa i numeri A, & B [d] ſono piani ſimili. che era da dimoſtrarſi.

A 6 B 54
D 36 C 324

a 17 del 7.
b 11. del 8.
c 8. del 8.
d 20. del 8.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vn numero cubo, multiplicando ſe medeſimo, produce qualche numero, quel prodotto ſarà numero cubo.

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicato in ſe medeſimo, produca il numero B. Dico che il numero B è cubo. Sia C il lato del cubo A, e multiplicando C in ſe medeſimo, ſi produca il numero D; ſi che C, multiplicando D, [a] produrrà il numero cubo A. Perche C, multiplicando ſe medeſimo, produſſe D; perciò il numero C miſurerà il numero D [b] per il numero C; ma l'vnità Z miſura C [c] per il medeſimo numero C, perciò tale parte è l'vnità Z di C, quale parte è C di D; e la proportione dell'vnità Z à C [d] ſarà come quella del numero C al numero D; per la qual coſa l'vnità Z, ed i numeri C, D ſono continui proportionali. Similmente perche C, multiplicando D, produce A; perciò D [e] miſurerà A per il numero C: ma C miſura D per il medeſimo numero C; il numero C dunque miſura D, come D miſura A; dal che C à D ſarà [f] come D ad A; ma C à D è come l'vnità Z à C; l'vnità Z dunque, ed i numeri C, D, A ſono continui proportionali; per la qual coſa frà l'vnità Z, ed il numero A, cadono due medij proportionali, che ſono C, & D. In oltre perche A, multiplicando ſe medeſimo produce B, perciò A [g] miſura B per il numero A: ma l'vnità Z miſura A [h] per il medeſimo numero A; l'vnità dunque miſura A, come A miſura B; dal che tale parte è l'vnità di A, quale parte è A di B; donde la proportione, che hà l'vnità Z ad A, haverà il numero A à B; ma frà l'vnità Z, ed il numero A, per quel che ſi è dimoſtrato, cadono i due medij C, & D proportionali; frà i due dunque A, & B, [k] caderanno ancora due medij continui proportionali, come F, ed E. Hor perche i quattro A, E, F, B ſono continui proportionali, ed il primo A, per ipoteſi, è numero cubo, ſarà ancora il quarto B [l] numero cubo; ch'era da dimoſtrarſi.

A 8
E 16 D 4
F 32 C 2
B 64 Z 1

a 19. defin. del 7.
b 7. aſſiom. del 7.
c 5 aſſioma del 7.
d 20. defin. del 7.
e 7. aſſioma del 7.
f 20. defin. del 7.
g 7. aſſioma del 7.
h 5. aſſioma del 7.
K 8. del 8.
l 23. del 8.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vn numero cubo multiplica vn altro numero cubo, il prodotto ſarà ancora numero cubo.

Siano

Siano eſpoſti i numeri cubi A, & B, e dalla loro ſcambieuole multiplicatione ſe ne produca il numero C. Dico che C è numero cubo. S'intenda multiplicato il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia D, ſarà D [a] numero cubo. Perche A, multiplicando ſe medeſimo, e multiplicando B, produce i numeri D, & C, hauerà A à B [b] l'iſteſſa proportione, quale hà D à C; ma frà i due numeri cubi A, & B [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri dunque D, & C [d] caderanno ancora due medij proportionali: e perche il numero D fù dimoſtrato numero cubo, in conſeguenza il numero C [e] ſarà ancora numero cubo, ch' era da dimoſtrarſi.

A 8 B 27
D 64 C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7.
c 12. del 8.
d 8. del 8.
e 23. del 8.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vn numero cubo, multiplicando qualche altro numero, produce numero cubo; il numero multiplicato ſarà cubo.

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicando qualche numero B, produca il numero cubo C. Dico che il numero multiplicato B è numero cubo. Multiplichi il numero A ſe medeſimo, e produca il numero D. Perche A è numero cubo, ſarà ancora D [a] numero cubo. In oltre, perche A, multiplicando ſe medeſimo, e multiplicando B, produce i due D, & C, ſarà A à B [b] come D à C: ma frà i due numeri cubi D, & C, [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri ancora A, & B [d] caderanno due medij proportionali; ſù ſuppoſto A numero cubo, in conſeguenza B [e] ſarà ancora numero cubo, il che era da dimoſtrarſi.

A 8 B 27
D 64 C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7.
c 12. del 8.
d 8. del 8.
e 23. del 8.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se dalla multiplicatione d'vn numero in ſe medeſimo ſe ne produce vn numero cubo, il numero multiplicato ſarà cubo.

Sia il numero A, il quale multiplicando ſe medeſimo, produca il numero cubo B. Dico che A è numero cubo. Dalla multiplicatione di A in B ſe ne produca il numero C. Perche A, multiplicando ſe medeſimo, produce B, e di nuouo A multiplicando B produce C, per la 19. definitione del 7. il numero C ſarà cubo. Hor perche B, per ipoteſi, è numero cubo, e dalla multiplicatione del numero cubo B, nel numero A, ſe ne produce il numero cubo C, il numero A, per l'antecedente propoſitione, ſarà cubo, il che era da dimoſtrarſi.

A 8 B 64 C 512

ne del 7. il numero B sarà quadrato. Di più, perche i tre numeri B,C,D sono continui proportionali, ed il primo B, per quel che si è dimostrato è quadrato, il terzo ancora D [d] sarà quadrato. Nell'istesso modo, considerando i tre D,E,F continui proportionali, ed il primo D, per quel che si è dimostrato, è numero quadrato; sarà ancora il terzo F [e] numero quadrato: per la qual cosa, interponendone sempre vno, gli altri sono quadrati.

d 22. del 8.

e 22. del 8.

Di nuouo, perche l'vnità Z ad A è come B à C, tante volte l'vnità Z misurerà A, [f] per quante volte B misura C: ma l'vnità Z misura A [g] per il

f 20. defin. del 7.

g 5. assiom. del 7.

Z 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729. G 2187. H 6561. K 18683. L 56049. M 168147. N 504441. P 1513323.

medesimo numero A; perciò il numero B misura C per l'istesso numero A; per la qual cosa, multiplicando A per B, il prodotto sarà C; è perche A, multiplicando se medesimo, produce B, e multiplicando B, produce C, per la definitione 19. del 7. il numero C sarà cubo. In oltre perche i quattro numeri C, D, E, F sono continui proportionali, ed il primo C è numero cubo; sarà il quarto F [h] ancora numero cubo. Similmente perche i quattro numeri F,G,H,K sono continui proportionali, ed il primo F è numero cubo, sarà il quarto K [K] ancora numero cubo. Ed il medesimo si proverà de gli altri, e perciò, interponendone sempre due, tutti gli altri sono numeri cubi.

h 23. del 8.

K 23. del 8.

Finalmente, perche il numero F, ch'è il settimo, contando dall'vnità, fù prima dimostrato essere numero quadrato, e poi numero cubo, sarà inconseguenza numero quadrato, e cubo insieme. E nell'istesso modo il numero N, ch'è il settimo, contando da F, essendone interposti cinque, cioè G,H,K,L,M, sarà quadrato, e cubo insieme. Ed il medesimo si dimostrerà per tutti gli altri, se i numeri continui proportionali saranno di maggior moltitudine, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se il primo termine, di quanti numeri si vogliano continui proportionali, è l'vnità, ed il primo, dopo l'vnità, è numero quadrato; tutti gli altri saranno numeri quadrati; e se il primo, dopo l'vnità, è numero cubo, tutti gli altri saranno ancora numeri cubi.

Siano esposti dall'vnità Z quanti si voglia numeri continui proportionali A,B,C,D,E,F, ed il primo A, dopo l'vnità, sia numero quadrato. Dico che tutti gli altri B,C,D, E,F &c. saranno numeri quadrati. Perche i numeri A,B,C,D,E,F sono dall'vnità continui proportionali, per l'antecedente propositione, il terzo B è numero

Z 1 A 4 B 16 C 64 D 256 E 1024 F 4096

qua-

eccettuatone B,D,F,H,L,N,Q, &c. Se è possibile, oltre i notati B,D,F,H, L,N,Q, qualcun altro sia numero quadrato, come il numero E. Perche D

Z 1. A 2 B 4 C 8 D 16 E 32 F 64 G 128 H 256
K 512 L 1024 M 2048 N 4096 P 8192 Q 16384

ad E, ouero E ad F, è come A à B, inuertendo, [a] sarà E à D, ouero F ad E, come B ad A: dal che B ad A hauerà la proportione del numero quadrato E al numero quadrato D (stante che D, per l'ottaua propositione di questo, è numero quadrato) ouero quella del quadrato F al quadrato E: mà B, essendo il terzo dall'vnità, [b] è numero quadrato, in conseguenza il numero A, [c] ch'è il primo, dopo l'vnità, sarà quadrato, il che è contro all'ipotesi. Non dunque il numero E è quadrato. Nell'istesso modo si prouerà, che nissun altro, fuorche gli eccettuati, è numero quadrato.

a Scol. alla 10. del 7.
b 8. del 9.
c 24. del 8.

Di nuouo, supposto che il numero A, contiguo all'vnità, non sia cubo. Dico che niun altro sarà cubo, eccettuatone il quarto dall'vnità, e quelli che restano, interponendone sempre due; cioè eccettuatone i seguenti C, F, K, N, &c. Perche, se oltre questi, qualcun altro fusse cubo, che sia per esempio D, essendo i tre A,B,C, continui proportionali nella continua proportione de i tre D, E, F; per l'egualità [a] sarà A à C come D ad F; ed inuertendo, C ad A [b] sarà come F à D: mà il numero F, [c] per quel che si è detto, è cubo, ed il numero D, per suppositione è cubo, essendo C ad A come F à D, i numeri C, A saranno nella proportione del numero cubo F al numero cubo D: e perche il numero C, [d] quarto dall'vnità, è numero cubo, sarà ancora il numero A, [e] ch'è il primo dopo l'vnità, numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dunque D è numero cubo. Di nuouo, supposto, s'è possibile, che il numero E sia numero cubo. Perche i tre A, B, C sono continui proportionali, nella continua proportione de i tre C, D, E; sarà, per l'egualità, A à C [f] come C ad E, ed inuertendo, C ad A [g] sarà come E à C: E perche C, per l'eccettuatione, è numero cubo, ed E, per suppositione è numero cubo, sarà il numero cubo C ad A, come il numero cubo E al numero cubo C: per la qual cosa il numero A, [h] ch'è il primo dopo l'vnità, sarà numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dunque E è numero cubo. Si è dunque dimostrato, che i due D, E interposti frà i cubi C, F non sono numeri cubi: e nell'istesso modo si dimostrerà, che i due G, H, interposti frà i cubi F, K, non sono numeri cubi: e che i due L, ed M, interposti frà i cubi K, N, non sono numeri cubi, come fù proposto dimostrare.

a 14. del 7.
b Scol. alla 10. del 7.
c 8. del 9.
d 8. del 9.
e 25. del 8.
f 14. del 7.
g Scol. alla 10. del 7.
h 25. del 8.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano, continui proportionali; sempre il minore misura il maggiore per vno de' medesimi numeri proportionali.

Sia-

Siano eſpoſti dall'vnità Z quanti numeri ſi vogliano A, B, C, D, E, F, G, H continui proportionali. Dico che il minore, come C, miſura ogn'altro de' maggiori di lui, come per eſempio H, per vno de' numeri A, B, C, D, E, F, G, H, cioè per quel termine, tanto lontano dall'vnità, per quanto è lontano il numero miſurato da quello, che miſura. Hor do-

Z 1. A 3 B 9 C 27 D 81 E 243 F 729 G 2187 H 6561.

uendoſi prouare, che il numero C miſura H, per vno de i medeſimi termini proportionali. Dico che C miſura H per il numero E, ch'è tanto lontano dall'vnità Z, per quanto H è lontano da C. Perche i termini C, D, E, F, G, H ſono continui proportionali, nella continua proportione de i termini Z, A, B, C, D, E, per l'egualità, ſarà Z ad E [a] come C ad H; e perciò l'vnità Z miſura E [b] come C miſura H: mà l'vnità Z miſura E [c] per l'iſteſſo numero E, in conſeguenza il numero C miſura H per il medeſimo numero E. Similmente dico, che C miſura G per il numero D, il quale è diſtante dall'vnità Z, per quanto G è lontano da C. Eſſendo i cinque termini C, D, E, F, G continui proportionali nella proportione de i cinque termini Z, A, B, C, D, per l'egualità, ſarà Z à D [d] come C à G; dal che l'vnità Z miſurerà D, come C miſura G: mà l'vnità Z miſura D [e] per il medeſimo numero D, perciò il numero C miſura G per l'iſteſſo numero D. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che ogn'altro numero minore miſura ogn'vno de' maggiori, per vno de' medeſimi numeri proportionali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 14. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 5. aſſioma del 7.
d 14. del 7.
e 5. aſſioma del 7.

COROLLARIO.

Nell'antecedente propoſitione appare, che, ſe ſaranno dall'vnità quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, ſempre ciaſcuno de' minori miſura ciaſcuno de' maggiori, per vno de' medeſimi numeri proportionali, cioè per quel numero, che è tanto diſtante dall'vnità, per quanto è diſtante il numero miſurato da quello, che miſura.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se dall'vnità ſiano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, quei numeri primi, che miſurano l'vltimo, miſureranno ancora il proſſimo all'vnità.

Siano eſpoſti dall'vnità Z quanti ſi voglia numeri continui proportionali A, B, C, D. Dico che quei numeri primi, che miſurano l'vltimo termine D, miſureranno ancora il numero A, ch'è proſſimo all'vnità. Sia qualunque numero primo E, il quale miſuri il numero D. Dico che

il

il numero primo E misura ancora il numero A. Se il numero E non misura il numero A, il numero primo E [a] sarà primo al numero A, cioè i due A, & E saranno frà di loro primi; e perche E misura il numero D,

Z 1	A 10	B 100	C 1000	D 10000
E 5	H 20	G 200	F 2000	

lo misurerà per qualche numero; lo misuri dunque per il numero F; multiplicando E il numero F [b] produrrà il numero D. Perche D è distante da A come C da Z, per il Corollario antecedente, A misurerà D per il numero C; e perciò A, multiplicando C, [c] produce D: mà E, multiplicando F, produce il medesimo D, perciò il prodotto della multiplicatione di A in C è vguale al prodotto della multiplicatione di E in F. Si considerino quattro numeri, de' quali il primo sia A, il secondo E, il terzo F, ed il quarto C. Perche il prodotto del ptimo A, e quarto C, è vguale al prodotto del secondo E, e terzo F; sarà il primo A al secondo E, [d] come il terzo F al quarto C; mà i due A, E sono frà di loro primi, e perciò [e] minimi nella loro proportione, in conseguenza i numeri A, ed E, [f] misureranno vgualmente i due F, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente F, come il conseguente E misura il conseguente C; e supposto, che il numero E misuri C per G, multiplicando E nel numero G, [g] produrrà il numero C. In oltre, perche A, per l'antecedente Corollario, misura C per il numero B, multiplicando A in B [h] il prodotto sarà C: mà si disse, che G era prodotto dalla multiplicatione di E in G, sarà il prodotto di E in G vguale al prodotto di A in B; e sarà A primo ad E secondo, [K] come G terzo à B quarto: mà i numeri A, ed E, sono primi frà loro, in conseguenza [l] sono i minimi nella loro proportione di G à B, per la qual cosa i numeri A, E [m] misurano vgualmente i numeri G, & B, cioè l'antecedente A misura l'antecedeute G, ed il conseguente E misura il conseguente B. E supposto, che E misuri B per il numero H, multiplicando E in H [n] il prodotto sarà B. Perche, per il Corollario antecedente, A misura B, per il medesimo numero A (stante che A è distante dall'vnità, come B è distante da A) perciò A, multiplicando se medesimo, [n] produce B; mà E, multiplicando H, produce il medesimo B, perciò il prodotto di A in se medesimo è vguale al prodotto di E in H. Si considerino tre numeri, cioè il primo E, il secondo A, ed il terzo H. Perche il prodotto del primo E nel terzo H è vguale al prodotto del secondo A in se medesimo; sarà E ad A, [o] come A ad H: mà i due E, ed A sono frà di loro primi, ed in conseguenza [p] minimi nella proportione di E ad A, ouero di A ad H; perciò i numeri E, A [q] misureranno vgualmente i numeri A, H, cioè l'antecedente E misura l'antecedente A, ed il conseguente A misura il conseguente H. Mà, per ipotesi, E non misura A, il numero dunque E misurarebbe, e non misuratebbe il numero A, ch'è impossibile. Per la qual cosa, se il numero primo E misura il numero D, misurerà ancora il numero A prossimo all'vnità, che era da dimostrarsi.

a 31. del 7.

b 9. assioma del 7.

c 9 assioma del 7.

d 19. del 7.

e 23. del 7.
f 21. del 7.

g 9. assioma del 7.

h 9. assioma del 7.

K 19. del 7.

l 23. del 7.
m 21. del 7.

n 9. assioma del 7.

o 20. del 7.

p 23. del 7.
q 21. del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se dall'vnità ſiano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, e quello, ch'è dopo l'vnità, ſia primo; niun' altro miſurerà il maſſimo, fuor che quelli, che ſono ne i propoſti numeri proportionali.

Siano eſpoſti dall'vnità Z quanti numeri ſi vogliano A,B,C,D continui proportionali, de'quali il numero A, ch'è proſſimo all'vnità Z, ſia numero primo. Dico che niun'altro numero, fuor che i tre A, B, C, miſureranno il maſſimo D. Miſuri, s'è poſſibile, qualche altro numero E il maſſimo D, il numero E non ſarà numero primo; perche ſe foſſe numero primo, miſurando il numero D, per l'antecedente propoſitione, miſurarebbe il numero A, ch'è proſſimo all'vnità, il che è impoſſibile, ſtante che il numero A è ſuppoſto numero primo. Non dunque il numero E è primo, ma è compoſto, dal che [a] qualche numero primo lo miſura. Dico che altro numero primo non lo miſura, fuor che il primo A. Perche, ſe qualche altro numero primo, fuor che A, miſuraſſe il numero E, quello [b] miſurarebbe il numero D (ch'è miſurato da E) dal che il medeſimo [c] miſurarebbe il numero A proſſimo all'vnità, ch'è impoſſibile per eſſere A numero primo, e perciò non altro numero primo miſura E, fuor che il numero A. In oltre, perche E miſura D, lo miſuri per qualche numero F. Dico che F è diuerſo da i numeri A,B,C. Se F ſarà il medeſimo, che vno de i numeri A, B, C; perche E miſura D per il numero F, lo miſurerà ancora per vno de'numeri A,B,C; ed all'incontro, [d] quel numero in A, B, C, che ſarà vguale ad F, miſurerà il numero D per il numero E; ma il numero D [e] è miſurato da vno de i numeri A,B,C, per vno de i medeſimi A,B,C; ſarà E vno de i numeri A,B,C, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque il numero F è il medeſimo, che vno de i tre A, B, C, ma è diuerſo. Hor perche E miſura D per F, all'incontro F [f] miſura D per E. Dico che F non è numero primo. Perche, ſe foſſe numero primo, miſurando l'vltimo D, miſurarebbe ancora [g] il numero A, ch'è proſſimo all'vnità, ch'è impoſſibile (ſtante che A è numero primo); e perciò F ſarà numero compoſto; per la qual coſa [h] qualche numero primo lo miſura. Dico di nuouo non eſſere altro numero, fuor che il numero A. Se altro numero primo miſura il numero F, perche F miſura D, quel numero primo [K] miſurerà ancora il numero D, e miſurerà [l] parimente il numero A, proſſimo all'vnità, ch'è impoſſibile; ſtante che A è numero primo. Non dunque altro numero primo miſura F, che il numero primo A. Perche dunque E miſura D per F, multiplicando E per F, [m] il prodotto ſarà D. In oltre, perche C è diſtante dall'vnità, come D è diſtante da A, per il Corollario all'11. propoſitione di queſto, A miſura D per il numero C; e perciò A, [n]

Z 1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E ——	H ——	G ——	F ——

a 33. del 7.
b 11. aſſiom. del 7.
c 12. del 9.
d 8. aſſiom. del 7.
e 11. del 9.
f 8. aſſiom. del 7.
g 12. del 9.
h 33. del 7.
K 11. aſſiom. del 7.
l 12. del 9.
m 9. aſſiom. del 7.
n 9. 2 aſſiom. del 7.

multi-

multiplicando C, produce D: ma il numero D è prodotto dalla multiplicatione di E in F, ſarà il prodotto di A in C vguale al prodotto di E in F; per la qual coſa A primo ad E [o] ſecondo, ſarà come F terzo à C quarto: ma per quel che ſi è dimoſtrato, A miſura E, il numero F dunque [p] miſurerà il numero C; e ſuppoſto che lo miſuri per il numero G, ſi tralaſci l'vltimo D, e ſi conſideri C come vltimo.

Se G foſſe il medeſimo, che vno de i numeri A, & B, vno de i numeri A, & B ſarebbe quello, per il quale F miſura C; ed all'incontro [q] vno de i numeri A, & B, miſurerà C per il numero F: ma ciaſcuno de i numeri A, B, miſura C [r] per vno de i medeſimi numeri A, B; ſarà F il medeſimo, che vno de i numeri A, B; il che è falſo, eſſendoſi dimoſtrato, che F nõ è vno de i numeri A, B. Non dunque G è il medeſimo di vno de i numeri A, B. E perche F miſura C per G, all'incontro G [t] miſurerà C per F. Dico che G non è numero primo. Perche ſe foſſe primo, miſurando l'vltimo C, miſurerà ancora il numero primo A, [u] ch'è proſſimo all'vnità, il che è impoſſibile; non dunque G è numero primo, ma è compoſto, e perciò [x] qualche numero primo lo miſura. Dico che queſto non può eſſere altro numero, che A. Imperciochè ſe altro numero primo, che A, miſura G, perche G miſura l'vltimo C, quello, che miſura G, [y] miſurerà ancora l'vltimo C, ed inconſeguenza miſurerà [z] parimente il numero primo A, ch'è più proſſimo all'vnità, il che è impoſſibile. Non dunque altro numero primo miſura G, fuorche A: Inoltre perche F miſura C per il numero G, multiplicando G per F, [a] il prodotto ſarà C. Similmente eſſendo C diſtante da A, come B è diſtante dall'vnità, il numero A miſurerà C [b] per il numero B; e perciò A, multiplicando B, [c] produce C; ſi diſſe, che G, multiplicando F, produce il medeſimo C; [d] ſarà il prodotto di A in B vguale al prodotto di G in F. Si conſiderino quattro numeri, il primo ſia A, il ſecondo F, il terzo G, ed il quarto B. Perche il prodotto del primo A, & quarto B, è vguale al prodotto del ſecondo F, & terzo G, ſarà il primo A al ſecondo F, [d] come il terzo G al quarto B: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, A miſura F, perciò G [e] miſurerà il numero B; lo miſuri per il numero H, ſi tralaſci l'vltimo C, e ſi conſideri B come vltimo. E tenendo il modo antecedente proueremo, che H è diuerſo da A, come ſi è fatto di F, & G,

Se H è l'iſteſſo, che A, ed il numero G miſura B per il numero H, il medeſimo numero G miſurerà B per il numero A; ed all'incontro A [f] miſurerà B per G. In oltre, perche A è diſtante dall'vnità, come B è diſtante da A, per il Corollario all'11. di queſto, A miſurerà B per il medeſimo numero A: ma ſi diſſe che A miſura B per il numero G, in conſeguenza G ſarà il medeſimo, che A; il che è contro à quel che ſi è dimoſtrato. Non dunque H è l'iſteſſo, che A, mà è diuerſo. Di più, perche G miſura B per H, perciò G, multiplicando H, [g] produrrà il numero B. Similmente perche A miſura B per il medeſimo numero A, multiplicandoſi A in ſe medeſimo, produrrà il numero B: per la qual coſa il

Z 1 A 5 B 25 C 125 D 625
E — H — G — F —

o 19. del 7.
p 20. defin. del 7.
q 8. aſſioma del 7.
r 11. del 9.
t 8. aſſioma del 7.
u 12. del 9.
x 33. del 7.
y 11. aſſiom. del 7.
z 11. del 9.
a 9. aſſioma.
b Corol. alla 11. del 9.
c 9. aſſioma del 7.
d 19. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 8. aſſioma del 7.
g 9. aſſioma del 7.

prodotto di H in G sarà vguale al prodotto di A in se medesimo; e per-
h 20. del 7. ciò la proportione del primo H h al secondo A sarà come il secondo A al terzo G; ed inuertendo, A ad H sarà come G ad A: ma, per quel, che si è dimostrato, A misura H, in conseguenza G misurerà A; il che è impossibile, mentre, per ipotesi, A è numero primo. Per la qual cosa se A è numero primo, nissun'altro numero misurerà il massimo D, che i numeri A, B, C, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Se i numeri primi misurano il minimo di quelli, ch'è misurato da loro; nissun altro numero primo misurerà quel minimo, fuor che i medesimi, che lo misurano da principio.

Sia A il minimo numero, misurato da i numeri primi, B, C, D. Dico, che nissun altro numero primo misurerà il minimo A, fuor che i tre B, C, D. Misuri il minimo A qualcun'altro numero primo, diuerso da i tre B, C, D, che sia E; il quale misuri il numero A per il numero F; il numero E, multiplicando F, produrrà il numero A.

A .....
B.. C... D.....
E —— F——

E perche ciascun'numero B, C, D misura il numero A, per la 32. propos. del 7. ciascuno de i numeri B, C, D misurerà vno de i due E, F; e perche non misurano il numero E, per essere E numero primo, in conseguenza misureranno il numero F, il quale è minore di A, che è contro all'ipotesi, mentre il numero A è supposto il minimo di quelli, misurati da i numeri B, C, D. Non dunque altro numero primo E, diuerso da B, C, D misurerà il numero A; ma i numeri primi B, C, D solamente, misureranno il minimo A, come fù proposto dimostrare.

SCOLIO.

I seguenti dieci Theoremi di Barlaam Monaco, dimostrano ne i numeri quelle medesime passioni, che nelle rette linee dimostra Euclide ne' i primi dieci Theoremi del secondo Elemento.

I.

Se saranno due numeri, vno de' quali sia diuiso in quante parti si voglia, il numero piano, fatto dalla multiplicatione de i due proposti numeri, è vguale à i numeri piani, fatti dalle multiplicationi di ciascuna parte del numero diuiso, nel numero non diuiso.

Siano i due numeri AB, & C; e sia AB diuiso nelle parti AD, DE, EB, ed il numero C non diuiso; e sia fatto il numero piano F dalla multiplicatione del numero C nel numero AB; di più, dalla multiplicatione del numero C nella

par-

parte AD fia fatto il numero piano GH; dalla multiplicatione del numero C nella parte DE, fia fatto il piano HK; e dalla multiplicatione del numero C nella parte EB fia fatto il numero piano KL. Dico che il numero piano F è vguale à i numeri piani GH, HK, KL, giunti infieme.

A....D...E..B C..
F.....
G.....H.....K....L

Perche C, multiplicando AB, produce F, perciò AB miſura F [a] per il numero C; ma il numero C [b] è miſurato dall'vnità per l'iſteſſo numero C, ſarà dunque F miſurato da AB, come C è miſurato dall'vnità; e perciò AB ad F [c] è come l'vnità à C. Similmente perche C, multiplicando AD, produce GH, perciò AD miſura GH [d] per il numero C; ma il numero C [e] è miſurato dall'vnità per il medeſimo numero C; il numero dunque AD miſura GH, come l'vnità miſura C; e perciò la proportione di AD à GH [f] è come quella dell'vnità al numero C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che DE ad HK è come l'vnità al numero C; e che EB ad LK è come l'vnità à C. Per la qual coſa tutto AB à tutto GL [g] ſarà come l'vnità al numero C; ma l'vnità al numero C, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come AB ad F, ſarà AB ad F [h] come il medeſimo numero AB à GL; e perciò i numeri F, & GL ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 7. aſſioma del 7.
b 5. aſſioma del 7.
c 20. defin. del 7.
d 7. aſſioma del 7.
e 5. aſſioma del 7.
f 20. defin. del 7.
g 12. del 7.
h Scol. alla 12. del 7.

I I.

Se vn numero è diuiſo in due parti, i due numeri piani, che ſi fanno dalla multiplicatione di tutto il numero in ciaſcuna parte, giunti inſieme, ſono vguali al numero quadrato, che ſi fà dalla multiplicatione di tutto il numero in ſe medeſimo.

Sia il numero AB, diuiſo nelle due parti AC, CB. Dico che i due numeri piani, cioè vno fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, e l'altro dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato di tutto il numero AB. Si eſponga il numero D vguale ad AB, ſarà il quadrato del numero AB vguale al piano fatto dalla multiplicatione del numero D nel numero AB. In oltre perche il numero AB è diuiſo ne i due numeri AC, CB, ed il numero D non diuiſo è vguale al numero AB; il piano fatto dalla multiplicatione del numero D, e dalla parte AC, col piano fatto dal medeſimo numero D, e dalla parte CB, ſarà vguale al piano fatto da tutto il numero AB nella parte AC, col piano fatto dal medeſimo numero AB nella parte BC: ma i piani fatti dal numero D, multiplicato in ciaſcuna delle parti AC, CB, inſieme giunti, per l'antecedente dimoſtratione, ſono vguali al piano fatto dalla multiplicatione del numero D, nel numero AB; ſaranno i piani fatti dalle multiplicationi del numero AB in ciaſcuna delle parti AC, CB, vguali al piano fatto dal numero D nel numero AB. E perche il piano fatto dal numero D nel numero AB è vguale al quadrato del numero AB; ſarà il quadrato di tutto il numero AB vguale à i due piani fatti dalla multiplicatione del numero AB in ciaſcuna delle parti AC, CB, come fù propoſto dimoſtrare.

D.....
A.... C..B

III.

Se vn numero sarà diuiso in due parti, il numero piano fatto dalla multiplicatione delle parti, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, doue fù fatto il quadrato.

Sia il numero AB, diuiso in due parti, come AC, CB. Dico che il numero piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, è vguale al piano fatto dalle parti BC, CA, col quadrato della parte CA. Si esponga il numero D, vguale al numero AC, sarà il piano fatto dal numero D nella parte AC, vguale al quadrato del numero AC. Similmente, essendo D vguale ad AC, il piano, fatto da BC in CA, è vguale al piano fatto da BC in D; ed il piano fatto da BA in D è vguale al piano fatto da BA in AC. In oltre perche la retta BA è diuisa in C, il piano fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero D, per il primo Theorema, è vguale à i due piani, fatti dalle multiplicationi di AC nel numero D, e di CB nel numero D: mà il piano fatto da AB in D è vguale al piano fatto da BA nella parte AC; sarà il piano fatto da BA in AC, vguale à i due piani fatti dà BC in D, e da AC in D: e perche i due piani fatti da BC in D, e da AC in D, sono vguali al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC; sarà il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte AC, vguale al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.

A....C.....B
D....

IV.

Se vn numero è diuiso in due parti, i quadrati delle parti, col doppio piano fatto da lla scambieuole multiplicatione delle parti, è vguale al qu adrato di tutto il numero.

Sia il numero AB diuiso nelle due parti AC, CB, dico che i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto dalla scambieuole multiplicatione delle parti AC, CB, è vguale al quadrato di tutto il numero AB.

A.....C....B

Perche il numero AB è diuiso nelle due parti AC, CB, i piani fatti dalla multiplicatione di tutto il numero AB, in ciascuna delle parti AC, CB, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di tutto il numero AB; mà il piano, fatto dal numero AB nella parte AC, per l'antecedente dimostratione, è vguale al piano fatto da BC in CA, col quadrato di AC; ed il piano, fatto da tutto il numero AB nella parte BC, è vguale al piano fatto da AC in CB, col quadrato di AC; saranno i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto da AC in CB, vguali al quadrato di tutto il numero AB, ch'era da dimostrarsi.

V.

Se vn numero paro è diuiso in due parti vguali, ed il

mede-

medesimo è diuiso in due parti ineguali ; il piano , fatto dalle parti ineguali , col quadrato della parte intermedia , è vguale al quadrato della metà del numero .

Sia il numero paro AB, diuiso nelle due parti vguali AC, CB , ed il medesimo numero AB sia diuiso nelle due parti ineguali AD,DB . Dico che il piano fatto dalla multiplicatione delle parti ineguali AD, DB , col quadrato della parte intermedia CD , è vguale al quadrato di CB, eh'è la metà del numero . Perche AC è vguale à CB, sarà il piano, fatto da CB in BD, vguale al piano fatto da AC in DB , ouero da BD in AC . In oltre , perche il numero AD è diuiso nelle due parti AC , CD, per il primo Theorema, il piano, fatto da BD in DC , col piano contenuto da BD in AC , è vguale al piano contenuto da BD in D A ; mà il piano contenuto da B D in AC, per quel , che s'è detto , è vguale al piano contenuto da CB, in BD ; sarà il piano contenuto da CB in BD, col piano di BD in DC , vguale al piano contenuto da BD in DA, ouero da AD in DB ; vgualmente s'aggiũga il quadrato del numero C D, ne viene il piano fatto da AD in DB , col quadrato di CD, vguale al piano fatto da CB in BD , col piano fatto da BD in DC , assieme col quadrato di DC: mà il piano contenuto da BD in DC, col quadrato di DC, per il 3. Theorema, è vguale al piano contenuto da EC in CD; sarà il piano contenuto da AD in DB , col quadrato di C D , vguale al piano contenuto da CB in BD , col piano fatto da BC in CD : mà il piano contenuto da C B in B D , col piano di BC in CD, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di CB; sarà il piano fatto da AD, in DB, col quadrato di CD , vguale al quadrato di CB, come fù proposto dimostrare .

A ..... C ... D .. B

V I.

Se vn numero paro sarà diuiso in due parti vguali , ed à quello se gli aggiunga vn numero ad arbitrio ; il piano, che si fà dalla multiplicatione di tutto l'aggregato , nel numero aggiunto , col quadrato della metà del primo numero , è vguale al quadrato del numero composto della metà , e dell'aggiunto.

Sia il numero paro AB, diuiso nelle due parti vguali AC, CB, al quale sia aggiunto il numero BD ad arbitrio . Dico che il piano , fatto dalla multiplicatione di tutto l'aggregato AD nel numero aggiunto DB , col quadrato della metà CB, è vguale al quadrato del numero CD, composto della metà CB, e del numero aggiunto BD . Perche AC , per ipotesi , è vguale à CB , il piano , fatto dalla multiplicatione di DB in BC, è vguale al piano contenuto da DB in CA , ouero da AC in BD . Si consideri il numero AD, diuiso nelle parti AC, CD, per il primo Theorema, il piano , fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB , è vguale à i due piani contenuti da AC in DB , e da CD in DB : mà il piano

A ..... C ..... B ... D

conte-

contenuto da AC in BD è vguale al piano de'i due DB, BC; sarà il piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB, vguale à i due piani, cioè vno contenuto da CD in DB, e l'altro contenuto da DB in BC; vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il piano fatto dal numero AD nel numero BD, col quadrato di CB vguale à i piani contenuti da CD in DB, e da DB in BC, col quadrato di CB; mà il piano contenuto da DB in BC, col quadrato di CB, per il 3. Theorema, è vguale al piano fatto DC in CB; sarà il piano contenuto da AD in DB, col quadrato di CB, vguale al piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB. E perche il piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di CD; sarà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AD nel numero DB, col quadrato del numero CB, vguale al quadrato del numero CD, come fù proposto dimostrare.

A.....C.....B...D

V I I.

Se vn numero è diuiso in due parti, il quadrato di tutto il numero, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, col quadrato del rimanente.

Sia il numero AB diuiso nelle due parti AC, CB. Dico che il quadrato di tutto il numero AB, col quadrato della parte BC, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC.

A.....C...B

Perche il numero AB è diuiso nelle due parti AC, CB, il piano contenuto da tutto il numero AB, nel numero BC, col piano contenuto da tutto AB nella parte AC, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di AB: mà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AB in AC, per il terzo Theorema, è vguale al piano contenuto da i numeri BC, CA, col quadrato di AC; sarà il piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i due numeri AC, CB, più il quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il quadrato di AB, più il quadrato di CB, vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i numeri AC, CB, più i quadrati delle parti AC, CB: mà il piano contenuto da i due AC, CB, col quadrato di CB, per il terzo Theorema, è vguale al piano, contenuto da i due AB, BC, il doppio piano dunque, contenuto da i due AB, BC col quadrato di AC, sarà vguale al quadrato di AB, col quadrato di CB, ch'era da dimostrarsi.

V I I I.

Se vn numero è diuiso in due parti, il quadruplo piano, contenuto da tutto, e da vna delle parti, col quadrato del rimanente, è vguale al quadrato del numero, composto di tutto, e di quella medesima parte,

Sia

Sia il numero AB, diuiſo nelle due parti AC, CB, al quale s'aggiunga il numero BD, vguale al numero BC. Dico che il quadruplo piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC, è vguale al quadrato di AD. Perche B D è vguale, per coſtruttione, à BC, il piano, con- A . . . . . C . . . B . . . D *tenuto da AB in BD, ſarà vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC; ed il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, ſarà vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC. Si conſideri il numero AD diuiſo ne i due numeri AB, BD; per il quarto Theorema, il quadrato di tutto il numero AD è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BD, con i quadrati de i due AB, BD; mà il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, per quel che ſi è detto, è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC; ſarà il quadrato di AD vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, co'i quadrati de i due AB, BD, cioè con i quadrati de i due AB, BC; mà i quadrati de i due AB, BC, per il ſettimo Theorema, ſono vguali al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC; ſarà il quadrato di AD vguale al quadruplo piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC, ch'era da dimoſtrarſi.*

I X.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed il medeſimo è diuiſo in due parti ineguali; i quadrati delle parti ineguali ſono il doppio del quadrato della metà, col quadrato del numero intermedio.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle due parti vguali AC, CB, ed il medeſimo numero AB ſia diuiſo nelle due parti ineguali AD, DB. Dico, che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, ſono il doppio del quadrato della metà AC, col qua A . . . . . C . . . . D . . B *drato del numero intermedio CD. Perche A C è vguale à CB, ſarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB; ed il piano contenuto da i due AC, CD, ſarà vguale al piano contenuto da i due BC, CD. In oltre perche il numero AD è diuiſo nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, il quadrato di AD ſarà vguale à i quadrati delle parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medeſime AC, CD; mà il doppio piano, contenuto dalle due AC, CD, è vguale al doppio piano, contenuto dalle due BC, CD; ſarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD, ne vengono i quadrati de i due AD, DB, vguali à i quadrati delle tre parti AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD: mà il doppio piano contenuto dalle due BC, CD, col quadrato di BD, per il ſettimo Theorema, è vguale à i quadrati de i due BC, CD; ſaranno i quadrati delle due AD, DB vguali à i quadrati delle due AC, CB, col doppio quadrato di CD; e perche il quadrato di CB è vguale al quadrato di CA; i quadrati dunque delle due AD, DB, ſono vguali al doppio quadrato di AC, col doppio quadrato di CD; ed in conſeguenza i quadrati delli due AD, DB, ſono il doppio de i ſemplici quadrati delli due AC, CD, come fù propoſto dimoſtrare.*

X.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed à quello s'aggiunga vna parte ad arbitrio; il quadrato di tutto l'aggregato, col quadrato della parte aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato del rimanente dell'aggregato.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle due parti vguali AC, CB, al quale ſia aggiunta qualunque parte BD. Dico che il quadrato dell'aggregato AD, col quadrato della parte aggiunta BD,
è il doppio del quadrato della metà A A.....C.....B....D
C, col quadrato del rimanente CD.
Perche AC è vguale à CB, ſarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB, ed il piano contenuto dalle due parti AC, CD, ſarà vguale al piano contenuto dalle due DC, CB; dal che il doppio piano contenuto dalle due AC, CD, ſarà vguale al doppio piano, contenuto dalle due DC, CB. In oltre s'intenda il numero AD diuiſo nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, i quadrati delle due parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medeſime parti AC, CD, ſaranno vguali al quadrato di AD: mà il doppio piano contenuto dalle due AC, CD è vguale al doppio piano contenuto dalle due DC, CB; ſarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD; i quadrati de i due AD, DB, ſaranno vguali à i quadrati delle tre AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; mà, per il ſettimo Theorema, il doppio piano contenuto dalle due DC, CB, col quadrato di BD, è vguale à i quadrati delle due DC, CB; ſarà il doppio quadrato di CD, co'i quadrati delle due AC, CB, cioè col doppio quadrato di AC, vguale à i quadrati delle due AD, DB; ed i ſemplici quadrati AC, CD ſaranno la metà de i quadrati de i due AD, DB. Per la qual coſa i quadrati de' i due AD, DB, ſono il doppio de i quadrati delle due AC, CD, il che era da dimoſtrarſi.

LEMMA.

Se due numeri ſono primi frà loro, il piano contenuto da eſſi, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i loro quadrati; ed è ancora primo al ſolo aggregato de'loro quadrati.

Siano i numeri DE, EF frà di loro primi. Dico che il piano contenuto da i due DE, EF, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i quadrati de i due DE, EF. Perche ſe non ſono primi, qualche numero ſarà loro commune miſura; ſia quello il numero G. Perche G miſura il piano contenuto da i due DE, EF, e miſura l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col piano contenuto

da i medeſimi DE, EF, miſurerà ancora il loro compoſto, [a] *cioè miſurerà l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col doppio piano contenuto da i due DE EF; ma i quadrati de i due DE, EF, col doppio piano contenuto da i medeſimi DE, EF, per il 4. de gli antecedenti Theoremi, è vguale al quadrato di DF; il numero dunque G miſurerà ancora il quadrato di DF: ma per ſuppoſitione, miſurà il piano contenuto da i due DE, EF, in conſeguenza il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, ſono numeri frà di loro compoſti. Inoltre, perche i numeri DE, EF,* [b] *per ipoteſi, ſono primi frà loro; l'aggregato DF* [c] *ſarà primo tanto à DE, quanto à DF; ed inuertendo ciaſcuno de i due DE, EF ſarà primo ad FD; donde il piano contenuto da i due DE, EF,* [d] *ſarà primo ad FD: per la qual coſa il medeſimo piano contenuto da i due DE, EF,* [e] *ſarà primo al quadrato di DF: ma il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, furono dimoſtrati eſſere frà di loro compoſti, ſaranno dunque primi frà loro, e ſaranno frà di loro compoſti, ch'è impoſſibile. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col medeſimo piano di DE in EF, hanno commune miſura, ma ſono frà di loro primi.*

D . . E . . . F
G ---

a 10. aſſiom. del 7.

b 14. defin. del 7.
c 30. del 7.
d 26. del 7.
e 26. del 7.

Dico di nuouo, che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF ſono primi frà loro: perche ſe non ſono frà di loro primi qualche numero ſarà loro commune miſura ſia quello il numero G. Perche il numero G miſura l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, e miſura, per ipoteſi, il piano contenuto da i due DE, EF, miſurerà ancora [f] *il loro compoſto, cioè miſurerà l'aggregato del piano contenuto da i due DE, EF, con i quadrati de i medeſimi; dal che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, col piano contenuto da i medemi DE, EF, haueranno vna commune miſura, ch'è contro à quello, che prima ſi è dimoſtrato. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de' quadrati de i medemi DE, EF, hanno commune miſura, ma ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare.*

f 10. aſſiom. del 7.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Se tre numeri, continui proportionali, ſono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medeſima proportione con eſſi, due, preſi come ſi voglia, giunti inſieme, ſono primi al terzo.

Siano i tre numeri continui proportionali A, B, C, cioè, che il primo A al ſecondo B ſia come il ſecondo B al terzo C, i quali ſiano i minimi di tutti gli altri, che hanno la medeſima proportione con eſſi. Dico che due, preſi in qualunque modo, ſono primi all'altro; cioè, che giunti inſieme i due A, C, l'aggregato è primo al numero B; e giunti inſieme i due B, C, l'aggregato è primo al numero A; e giunti inſieme i due A, & B, l'

a 35. del 7. aggregato è primo al numero C. Si prendano [a] i due numeri DE,EF, che ſiano minimi nella proportione A à B, ò di B à C. Eſſendo i due DE,EF minimi nella medeſima proportione de i tre continui proportionali A,B,C, per la 2. propoſitione dell'8, DE, multiplicando ſe medeſimo, produce il primo termine A; e ſimilmente EF, multiplicando ſe medeſimo, produce il terzo C; e dalla ſcambieuole multiplicatione de i due DE, EF, ſe ne produce il medio B.

A .... B .....
C .....
D..E...F

Perche i numeri DE, EF ſono i minimi di tutti quelli, che hanno la medeſima proportione con eſſi, per la 24. propoſ. del 7, ſono frà di loro primi; e perciò, giunti inſieme, ſarà tutto il numero DF [a] primo à ciaſcuno di eſſi, cioè ſarà primo al numero DE, e ſarà ancora primo al numero FE: a 30. del 7.

b 26. del 7. per la qual coſa [b] il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, ſarà primo al numero EF: ma il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, per il 3. degli antecedenti theoremi, è vguale al prodotto, ò piano, contenuto da i due FE, ED, col quadrato di DE; ſarà il prodotto, fatto da FE in ED, col quadrato di DE, primo al numero EF: ma il prodotto de i due FE, ED, è vguale al numero B; ed il quadrato di DE è vguale al numero A; ſarà l'aggregato de i numeri A, & B, primo al numero EF. E

c 26. del 7. perche C è il quadrato del numero EF, perciò i due A,B, [c] inſieme giunti, ſono primi al numero C, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

d 24. del 7. e 30. del 7. Di nuouo, perche i due DE, EF [d] ſono frà di loro primi, il loro aggregato FD [e] ſarà primo al numero DE; ed il prodotto, ò piano, contenuto da i due DF, FE, [f] ſarà primo al medeſimo numero DE: ma il prodotto, fatto da i due DF, FE, per il 3. de gli antecedenti Theoremi, è

f 26. del 7. vguale al prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF; il prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF, ſarà primo al numero DE: ma il prodotto de i due DE, EF è vguale al numero B; ed il quadrato di EF è vguale al numero C; l'aggregato dunque de i due numeri B, & C, ſarà [f] primo al numero DE; ed eſſendo A il quadrato di DE, ſarà l'aggregato de

g 26. del 7. i due B, & C [g] primo al numero A, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.

Finalmente perche i due DE, EF, per quel, che s'è detto, ſono primi frà loro, l'aggregato de i loro quadrati, cioè l'aggregato de i quadrati di DE, EF, per l'antecedente lemma, ſarà primo al piano contenuto da i due DE, EF; ma i quadrati de i due DE, EF ſono i notati A, & C; ed il piano, contenuto da i due DE, EF, è vguale al numero B, in conſeguenza i due A, & C, giunti inſieme, ſono primi al numero B, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri ſono frà di loro primi, non è poſſibile, che il primo al ſecondo ſia, come il ſecondo ad vn altro numero.

Siano i numeri A, & B, frà di loro primi. Dico che A, à B non può

eſſere

essere come B ad vn altro numero. Sia, se è possibile, A à B, come B ad vn altro numero, per essempio C. Perche i numeri A, & B sono frà di loro primi, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione di A à B; ma la proportione di B à C è come quella di A à B; i due minimi numeri dunque A, & B, [b] misurano vgualmente i due B, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente B, ed il conseguente B misura il conseguente D. E perche A [c] misura se medesimo, dunque il numero A è commune misura de i due A, & B; per la qual cosa i due A, & B [d] sono numeri frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre i numeri A, & B, furono supposti primi frà loro. Non dunque A à B è come B ad vn altro numero, ch'era da dimostrarsi.

A.....
B.....
C———

a 23. del 7.
b 22. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, ed i loro estremi siano numeri frà di loro primi, non è possibile, che il primo al secondo sia come l'vltimo ad vn altro numero.

Siano quanti numeri si vogliano A,B,C,D, continui proportionali, i di cui estremi A, & D siano frà di loro primi. Dico che il primo A al secondo B non è come l'vltimo D ad vn altro numero. Sia, s'è possibile, A à B, come D ad vn altro numero, per essempio E. Perche i due A, & B sono primi frà loro, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione. E perche D ad E è come A à B, i minimi dunque A, & B [b] misureranno vgualmente i due D, ed E; cioè l'antecedente A misurerà l'antecedente D, ed il conseguente B misurerà vgualmente il conseguente E; ma il numero A [c] misura se medesimo, in conseguenza il numero A è commune misura de i due estremi A, & D; e perciò i due A, & D [d] sono frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre furono supposti frà loro primi. Non dunque A à B è come D ad vn altro numero, il che era da dimostrarsi.

A 8 B 12 C 18 D 27 E——

a 23. del 7.
b 21. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVIII.

Dati due numeri, considerare se à quelli si può trouare il terzo proportionale.

Siano dati i due numeri A, & B, e si voglia sapere, se à i dati numeri A, & B, si possa ritrouare il terzo proportionale; cioè si voglia conoscere se A à B possa essere, come B ad vn altro numero. O i numeri A, & B sono, ò non sono, frà di loro primi; se sono frà di loro primi, sarà manifesto, per la 16. propositione di questo, non potersi trouare il terzo proportionale.

A 4 B 6 D 9 C 36

Se i numeri A, & B non ſono frà loro primi, multiplicando B ſe medeſimo, produca il numero C. O il numero A miſura, ò non miſura il numero C; ſuppoſto prima, che A miſuri il numero C, per il numero D. Dico che ſi può alli due A, & B, ritrouare il terzo proportionale; e che quello ſarà l'iſteſſo numero D. Perche A miſura il numero C per il numero D; perciò A, multiplicando D, [a] produrrà C; ma il numero C è prodotto dalla multiplicatione di B in ſe medeſimo; ſarà il prodotto di A in D vguale al quadrato del numero B: per la qual coſa A à B [b] ſarà come B à D; e perciò il numero D è il terzo proportionale à i due A, & B.

A 4 B 6 D 9 C 36

a 9. aſſioma del 7.

b 20. del 7.

Di nuouo, ſuppoſto, che A non miſuri il numero C. Dico che à i due A, & B non è poſſibile ritrouare il terzo proportionale. Sia ſe è poſſibile, il terzo proportionale D, in modo, che A à B ſia come B à D. Perche A à B è come B à D, i tre numeri A, B, D ſaranno continui proportionali; e perciò il prodotto fatto dalla multiplicatione degli eſtremi A, & D, ſarà vguale [c] al prodotto del medio B in ſe medeſimo; ma il prodotto di B in ſe medeſimo, per coſtruttione, è il numero C; ſarà il prodotto di A in D vguale à C; per la qual coſa il numero A miſurerà C [d] per il numero D, ch'è contro all'ipoteſi, mentre fù ſuppoſto, che A non miſura il numero C. Non dunque D è il terzo proportionale, ed in conſeguenza à i due A, & B non ſi può trouare il terzo continuo proportionale. Nell'iſteſſo modo ſi può inueſtigare, ſe à i numeri B, ed A ſi poſſa ritrouare il terzo proportionale, in modo che B ad A ſia come A ad vn altro; il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

A 6 B 4 D — C 16

c 20. del 7.

d 7. aſſioma del 7.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIX.

Dati tre numeri, conſiderare ſe à quelli ſi poſſa ritrouare il quarto numero proportionale.

Siano i dati tre numeri A, B, C, ò continui, ò non continui proportionali, e ſi voglia conſiderare ſe ſia poſſibile ritrouargli vn quarto numero proportionale; cioè ſe A à B può eſſere come C ad vn altro numero. Multiplichi B il numero C, e produca D, ò il numero A miſura, ò non miſura il numero D; ſuppoſto prima, che A miſuri il numero D per il numero E. Dico che à i tre A, B, C ſi può ritrouare il quarto proportionale; e che il medeſimo numero E ſara il quarto proportionale. Perche A miſura D per il numero E, multiplicando A il numero E, [a] produrrà il numero D: ma B, multiplicando C, produce il medeſimo numero D, il prodotto dunque fatto da gli eſtremi, A, ed E, ſarà vguale al prodotto de i medij B, & C; per la qual coſa il primo A al ſecondo B [b] ſarà come il terzo C al quarto E; ſarà dunque il numero E il quarto proportionale.

A 4 B 8 C 9 E 18 D 72

a 9. aſſioma del 7.

b 19. del 7.

Di

Di nuouo, ſuppoſto che A non miſuri il numero D. Dico che non ſi può trouare il quarto proportionale alli tre A, B, C. Perche, ſe è poſſibile, ſia quello qualche numero E, in modo, che A à B ſia come C ad E; ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, ed E, [c] vguale al prodotto de i medij B, & C; ma il prodotto de i medij B, & C, per coſtruttione, è il numero D; il prodotto dunque de i due A, ed E, ſarà vguale al numero D; per la qual coſa A miſura D [d] per il numero E, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che A non miſura D. Non dunque il numero E è il quarto proportionale, e perciò à i tre numeri A, B, C, non ſi può trouare il quarto proportionale. Nell'iſteſſo modo ſi conſidererà, ſe à i tre numeri C, B, A, ſi può trouare il quarto proportionale, in modo, che C à B, ſia come A ad vn altro, ed in tal modo s'è conſiderato ſe à tre dati numeri ſi può trouare il quarto proportionale, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

A 3 B 4 C 10 E —— D 40

c 19. del 7.

d 7. aſſiom. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

La moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi.

Sia qualunque terminata moltitudine di numeri primi A, B, C. Dico che i numeri primi ſuperano la moltitudine A, B, C. Si prenda il numero DE [a] in modo, che DE ſia il minimo di tutti quelli miſurati da i propoſti A, B, C, al quale s'aggiunga l'vnità EF. O il compoſto D F è numero primo, ouero è numero compoſto. Sia nel primo luogo numero primo, in tal caſo i numeri A, B, C, DF ſono numeri primi, e perciò la moltitudine de i numeri primi A, B, C, DF ſupera la moltitudine data, A, B, C.

A 2 B 3 C 5
D —— E - F
G ——

a 38. del 7.

Di nuouo, ſuppoſto che il numero DF non ſia numero primo, e perciò qualche numero primo lo miſurerà; ſia quello il numero G. Dico che il numero primo G non è alcuno de' propoſti A, B, C. Sc G foſſe vno de i propoſti A, B, C, perche ciaſcuno de i tre A, B, C miſura il numero DE, ancora il numero G, che rappreſenta vno di quei tre, miſurerà il medeſimo numero DE. Hor ſe il numero G miſura tutto il numero DF, e miſura la parte DE, miſurerà ancora [b] il rimanente EF; cioè il numero G miſurerà l'vnità EF; il tutto miſura la parte, ch'è impoſſibile. Non dunque il numero primo G è vno de i propoſti A, B, C, ed in conſeguenza la moltitudine de i numeri primi A, B, C, G ſarà maggiore della moltitudine de' propoſti A, B, C. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſarà data qualunque altra moltitudine di numeri primi; per la qual coſa la moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi, ch'era da dimoſtrarſi.

b 12. aſſiom. del 7.

CO-

COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo di trouare quanti numeri primi ſi vogliano d'aggiungere ad vna moltitudine terminata di numeri primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se quanti numeri pari ſi vogliano ſiano compoſti inſieme, l'aggregato ſarà numero paro.

Siano quanti numeri pari ſi vogliano AB, BC, CD, i quali, compoſti inſieme, facciano tutto il numero AD. Dico che AD è numero paro. Perche i propoſti AB, BC, CD ſono numeri pari, ogn'vno di loro [a] ſi può diuidere in due parti vguali; ſia E la metà di AB, il numero F ſia la metà di BC, ed il numero G ſia la metà di CD; ſarà AB ad E, [b] come BC ad F, e come CD à G: per la qual coſa AD, ch'è il compoſto di tutti gl'antecedenti, ad E, F, G inſieme, ch'è il compoſto de i conſeguenti, ſarà [c] come vn antecedente ad vn conſeguente, cioè ſarà come AB, ad E; mà AB è il doppio di E, in conſeguenza AD ſarà il doppio di E, F, G inſieme. Hor eſſendo E, F, G inſieme, la metà di AD, ſi può dunque da AD prenderne la metà E, F, G, e per la ſeſta definitione del ſettimo, il numero AD, compoſto de i numeri pari AB, BC, CD, è numero paro, che era da dimoſtrarſi.

A.....B.....C.....D
E.... F... G....

[a] 6. defin. del 7.
[b] 20. defin. del 7.
[c] 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine pari, il loro compoſto ſarà numero paro.

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, DE, di moltitudine pari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AE. Dico che AE è numero paro.
Perche i numeri AB, BC, CD, DE ſono numeri diſpari, ogn'vno [a] è differente dal numero paro per l'vnità; e perciò, detratta da ciaſcuno l'vnità, i rimanenti ſono numeri pari, i quali, giunti inſieme, compongono [b] vn numero paro. E perche la moltitudine delle vnità detratte è numero paro, ſtante che la moltitudine de' termini è ſuppoſta paro, ſe l'aggregato di queſte vnità, ch'è numero paro, s'aggiunge all'antecedente compoſto, che ſi diſſe eſſere numero paro, l'aggregato, cioè il numero AE, [c] ſarà numero paro, come fù propoſto dimoſtrare.

A...B.....C.....D.....E

[a] 7. defin. del 7.
[b] 21. del 9.
[c] 21. del 9.

THEORE-

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine diſpari, il loro compoſto ſarà numero diſparo.

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, di moltitudine diſpari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AD. Dico che AD è numero diſparo. Perche il numero diſparo è differente dal numero paro [a] per vna ſola vnità, detratta l'vnità ED dal numero diſparo CD, il rimanente CE ſarà numero paro. Perche li numeri diſpari AB, BC ſono di moltitudine pari, il loro aggregato AC [b] ſarà numero paro; al quale aggiungaſi il numero paro CE, ne verrà il compoſto AE [c] numero paro; ſe à queſto s'aggiunge l'vnità ED, il numero AD ſarà differente dal numero paro AE, per quanto è l'vnità ED; per la qual coſa il compoſto AD [d] ſarà numero diſparo, il che era da dimoſtrarſi.

A . . . B . . . . . C . . . . . E . D

a 7. defin. del 7.
b 22. del 9.
c 22. del 9.
d 7. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero paro.

Sia il numero paro AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che l'auanzo AC ſarà numero paro. O il numero BC, detratto, è la metà del numero AB, ò è maggiore, ouero minore della metà di AB. Sia nel primo luogo CB la metà di AB; perche il numero paro CB è la metà di AB, il rimanente AC ſarà vguale à CB: mà CB è ſuppoſto numero paro, ſarà ancora AC numero paro, come fù propoſto prouare.

A . . . . . C . . . . . B

Di nuouo, non ſia CB la metà di AB, mà ſia ò maggiore, ouero minore della metà. Perche i numeri AB, CB, per ipoteſi, ſono numeri pari, d'ogn'vno di eſſi [a] poſſiamo prenderne la metà: ſia dunque DB la metà di AB, ed il numero EB ſia la metà del numero CB; ſarà AB alla ſua metà BD, [b] come CB alla ſua metà BE; e permutando, ſarà AB à BC, [c] come DB à BE; e diuidendo, AC à CB [d] ſarà come DE ad EB; permutandoſi di nuouo, AC à DE [e] ſarà come CB à BE; mà CB è, per coſtruttione, il doppio di BE, ſarà AC il doppio di DE. Hor eſſendo DE la metà di AC, ſarà dunque AC [f] numero paro; per la qual coſa, detratto dal numero paro AB il numero paro CB, reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.

A . . . . . C . . D . . . E . . . . . B
A . . . . . D . . . C . . E . . B

a 6. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 13. del 7.
d Scol. alla 22. del 7.
e 13. del 7.
f 6. defin. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero diſparo, quel, che reſta, ſarà numero diſparo.

Sia il numero paro AB, dal quale ne ſia detratto il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Da CB ſe ne detragga l'vnità CD, reſterà [a] il numero paro DB. Perche dunque tutto AB, per ipoteſi, è numero paro, detrattone il numero paro DB, reſta AD [b] numero paro; dal quale, detrattane l'vnità CD, reſta AC [c] numero diſparo, che era da dimoſtrarſi.

A . . . . . C . D . . . . B

a 7. defin. del 7.
b 24 del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn numero diſparo ſe ne detrae vn numero diſparo, il rimanente ſarà numero paro.

Sia AB numero diſparo, dal quale ſe ne detragga il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC è numero paro. Da i numeri diſpari AB, CB, ſe ne detragga l'vnità, reſtano i due AD, CD [a] numeri pari; ſi che dal numero paro AD, detratto il numero paro CD, [b] reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.

A . . . . . C . . . . D . B

a 7. defin. del 7.
b 28. del 9.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se dal numero diſparo ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero diſparo.

Sia il numero diſparo AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Dal numero diſparo AB ſe ne detragga l'vnità AD, reſta DB [a] numero paro, dal quale detrattone il numero paro CB, [b] reſta il numero paro DC; al quale s'aggiunga l'vnità AD, ſarà AC [c] numero diſparo, come fù propoſto dimoſtrare.

A . D . . . . . C . . . . . B

a 7. defin. del 7.
b 24. del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVIII.

Se vn numero diſparo multiplica vn numero paro, quel che produce ſarà numero paro.

Sia A numero diſparo, e B numero paro, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che il prodotto C è numero paro. Perche A, multiplicando B produce il numero C, ſarà C [a] compoſto di tante volte B, per quante vnità ſono nel numero A; e perche B è nume-

A . . . B . . . .
C . . . . . .

a 15. defin. del 7.

ro

ro paro, ſarà C compoſto di tante volte il numero paro B, per quante vnità ſono nel numero A; mà il numero, compoſto di più numeri pari, [b] è numero paro; il numero C dunque, ch'è compoſto di più volte il numero paro B, ſarà numero paro, che era da dimoſtrarſi. [b] 21. del 9.

COROLLARIO I.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che ſe vn numero paro multiplica vn altro numero paro, il prodotto ſarà numero paro,

COROLLARIO II.

D'onde ne ſegue, che vn numero paro, multiplicando ſe medeſimo, produce numero paro.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se vn numero diſparo multiplica vn numero diſparo, quel, che produce, ſarà numero diſparo.

Siano i numeri diſpari A, & B, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che C è numero diſparo. Perche A, multiplicando B, produce C; il numero C ſarà compoſto di tante volte il numero diſparo B, [a] per quante vnità ſono nel numero A; & perche tanto il numero A, quanto B, è numero diſparo, ſarà C compoſto dal numero diſparo B, per moltitudini diſpari; mà il numero, ch'è compoſto da numeri diſpari, per moltitudini diſpari, [b] è numero diſparo; il numero dunque C, ch'è compoſto dal diſparo B, per moltitudini diſpari, ſarà numero diſparo, ch'era da dimoſtrarſi.

A.....
B..;
C.....

[a] 15. defin. del 7.
[b] 29. del 9.

COROLLARIO.

Appare nell'antecedente propoſitione, che ſe vn numero diſparo multiplica ſe medeſimo, quel, che produce, ſarà numero diſparo.

SCOLIO.

Aggiungo i due ſeguenti Theoremi del Campano, che ſeruiranno come Lemmi alle dimoſtrationi ſuccedenti.

Se il numero diſparo miſura il numero paro, lo miſura per numero paro.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero paro B per il numero C. Dico che C è numero paro. Perche, se il numero C sarà numero disparo, il prodotto B, fatto dalla multiplicatione de i numeri dispari A, & C, a *sarà numero disparo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C è numero disparo, mà sarà numero paro.*

A... C....
B.....

a 29.del 9.

Se il numero disparo misura vn numero disparo, lo misura per numero disparo.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero disparo B per il numero C. Dico che C sarà numero disparo. Perche, se C fosse numero paro, il numero B, ch'è prodotto dalla multiplicatione del numero disparo A nel numero paro C, a *sarebbe numero paro, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero C è numero paro, ma sarà numero disparo, ch'era da dimostrarsi.*

A... C.....
B.....

a 28. del 9.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se il numero disparo misura vn numero paro, misurerà ancora la metà di quello.

Sia il numero paro A, misurato dal numero disparo B. Dico che il numero disparo B misurerà ancora la metà del numero paro A. Sia misurato il numero A dal numero B per il numero C, per lo Scolio antecedente, C sarà numero paro; e perciò il numero C si può diuidere in due parti vguali. Hor perche B misura A per il numero C, all'incontro C misurerà A b per il numero B, per la qual cosa C sarà la parte di A denominata da B, come appariſce nella 3. definitione del 7. In oltre, perche C alla sua metà è come A c alla sua metà, permutando, sarà C ad A d come la metà di C alla metà del numero A; e perciò tante volte C misura A, e per quante volte la metà di C misura la metà di A: ma C misura tante volte A, f per quante vnità sono in B; perciò la metà di C misurerà tante volte la metà di A, per quante vnità sono in B; dal che B multiplicando la metà di C, g produce la metà di A. Per la qual cosa B misura la metà di A, come fù proposto dimostrare.

A..... B.....
C..... D——

a 6.defin. del 7.
b 8. assioma
c 20. defin. del 7.
d 23. del 7.
e 20.defin. del 7.
f 8. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Se il numero disparo è primo à qualche numero, sarà ancora primo al doppio di quello.

Sia il numero disparo A, il quale sia primo al numero B, il di cui doppio sia il numero C. Dico che il numero A è primo al numero C. Se il numero A non è primo al numero C, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello il numero D. Dico

prima che D è numero diſparo. Se D non è numero diſparo, neceſſariamente ſarà numero paro, il quale miſurando il numero diſparo A, lo miſurerà per qualche numero E; e multiplicando il numero paro D per il numero E, [a] produrrà il numero paro A, eh'è contro all'

A..... B.....
C.....D
E

a 28. del 9.

ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto il numero A diſparo. Non dunque D è numero paro, ma è numero diſparo. Hor eſſendo C il doppio di B, in conſeguenza ſi può diuidere in due parti vguali, e perciò C [b] è numero paro; ſi è ſuppoſto C eſſere miſurato da D, dunque il numero diſparo D miſura il numero C, e per l'antecedente propoſitione, D miſurerà la metà di C, cioè miſura il numero B: ma per la ſuppoſitione fatta, miſura ancora il numero A; ſarà dunque D commune miſura de i due A, & B: per la qual coſa i due A, & B [c] ſono numeri frà loro compoſti, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque A, & C hanno commune miſura, ma ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare.

b 6. defin. del 7.

c 14. defin. del 7.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

I numeri, che dal due procedono per il doppio, ſono ſolamente parimente pari.

Dal numero due, notato A, Z 1 A 2 B 4 C 8 D 16 E 32
creſcano per il doppio i numeri
B,C,D,E. Dico che queſti ſono ſolamente numeri parimente pari. Si eſponga l'vnità Z; perche i numeri A,B,C,D,E, cominciando dall' vnità Z, ſucceſſiuamente ogn'vno è doppio dell'antecedente, ſaranno i ſeguenti Z 1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. nella medeſima proportione, cioè nella proportione doppia; in conſeguenza il numero A [a] miſurerà tutti gli altri B, C, D, E, e ciaſcuno de i numeri B,C,D,E, [b] miſurerà il maggiore di lui per qualcheduno de'medeſimi A,B,C,D,E. E perche tutti ſono numeri pari; perciò i numeri pari A,B,C,D,E ſono miſurati da i numeri pari A,B,C,D,E per li medeſimi numeri pari, ed in conſeguenza i numeri B,C,D,E [c] ſono numeri pari.

a 11. aſſioma del 7.

b 11. del 9.

c 8. defin. del 7.

Che poi ſiano ſolamente numeri parimente pari, è manifeſto, poiche eſſendo i numeri A,B,C,D,E, dall'vnità continui proportionali, ed il numero A, ch'è proſſimo all'vnità, è numero primo, niſſun' altro numero miſurerà i propoſti, [d] fuor che i medeſimi A,B,C,D,E, i quali, perche ſono tutti numeri pari, ſi miſureranno l'vn l'altro; cioè i minori miſurano i maggiori per i medeſimi numeri pari; e perciò ſono ſolamente numeri parimente pari.

d 13. del 9.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Se la metà d'vn numero è diſparo, quello ſarà ſolamente numero parimente diſparo.

Sia la metà del numero A diſparo. Dico che il numero A è ſolamente parimente diſparo. Che ſia parimente diſparo ſi dimoſtra. Perche la metà di A è numero diſparo, ſarà il numero A.....

A miſurato dal numero due, ch'è paro, per vn numero diſparo, cioè per la ſua metà; e perciò A [a] è numero parimente diſparo. Che ſia poi ſolamente numero parimente diſparo, lo dimoſtraremo in queſto modo.

a 9. defin. del 7.

Sia B la metà del numero A, e ſia C il numero due; ſe A non è parimente diſparo ſolamente, ſarà ancora parimente paro; e perciò ſarà miſurato da qualche numero paro per numero paro. Intendaſi il numero paro D, che miſuri il numero A per il numero paro E; ſi che D, multiplicando E, [b] produrrà il numero A: ma il medeſimo numero A è prodotto dalla multiplicatione del binario C nel B, il prodotto, fatto dal primo C nel quarto B, ſarà vguale al prodotto fatto dal ſecondo D nel terzo E: per la qual coſa il primo C al ſecondo D [c] ſarà come il terzo E al quarto B: ma il binario C miſura il numero paro D; il numero dunque E miſurerà il numero B; cioè il numero paro E miſura il numero diſparo B; ch'è impoſſibile. Non dunque A è numero parimente paro, ma è ſolamente numero parimente diſparo, ch'era da dimoſtrarſi.

A..... B..... C.. D—— E——

b 9. aſſioma del 7.

c 19. del 7.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Se il numero paro non naſce dalla continua duplatione del numero due, ne la ſua metà è numero diſparo; quello è numero parimente paro, e parimente diſparo.

Sia il numero paro A, il quale non ſia prodotto dalla continua duplatione del numero due, ne la ſua metà ſia numero diſparo. Dico che il numero A è parimente paro, ed è ancora parimente diſparo. Perche la metà del numero paro A è numero paro, perciò il numero due, ch'è numero paro, miſura il numero paro A per la ſua metà, ch'è numero paro, e per la definitione 8. del 7, il numero A è parimente paro.

A.....

Di nuouo s'intenda diuiſo il numero A in due parti vguali, e ſimilmente la metà ſia diuiſa in due parti vguali, e la metà di queſta in due vguali, e con queſt'ordine, fino à tanto, che ſi peruiene à qualche numero diſparo, non potendoſi peruenire al numero due, poiche in quel caſo il numero A ſarebbe prodotto dalla continua duplatione del numero due; ch'è contro all'ipoteſi; ſe ſi peruiene al numero diſparo, ſarà il numero A miſurato da quel numero diſparo [a] per numero paro, non potendo eſſere miſurato per numero diſparo à cauſa, che i numeri diſpari, multiplicati frà loro, [b] producono numero diſparo, e dourebbero produrre il numero paro A. Hor perche il numero paro A è miſurato dal numero diſparo

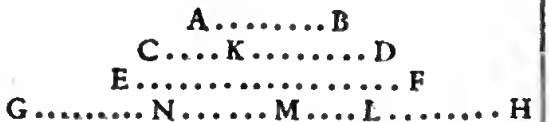
a Scol. alla prop. 29. del 9.

b 29. del 9.

ſparo per numero paro, ſarà, per la definitione 9. del 7. numero parimente diſparo: fù dimoſtrato eſſere ancora numero parimente paro, in conſeguenza il numero A ſarà parimente paro, e parimente diſparo, ch' era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXV.

Se ſiano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, e dal ſecondo, & vltimo, ſe ne detragga il primo numero; quello, che reſta dal ſecondo, al primo, ſarà come il rimanente dell'vltimo all'aggregato di tutti i termini, che l'antecedono.



Siano quanti numeri ſi vogliano continui proportionali, AB, CD, EF, GH, e tanto dal ſecondo CD, quanto dall'vltimo GH, ſe ne detragga il primo AB; cioè dal ſecondo CD ſe ne leui DK, vguale al primo AB; e dall'vltimo GH ſe ne leui LH vguale al primo AB. Dico che il reſtante CK al primo A è come il rimanente GL all'aggregato de gli antecedenti EF, CD, AB. Dal numero GH ſe ne detragga HM vguale al numero CD, e ſe ne ſepari HN vguale al numero EF. Perche MH è vguale al numero CD, ed HL è vguale, per ipoteſi, à DK, il rimanente LM ſarà vguale al rimanente KC. In oltre perche AB à CD è come CD ad EF, ed ancora come EF à GH; inuertendo, ſarà GH ad EF, [a] come EF à CD, e come CD ad AB; ma NH, per coſtruttione, è vguale ad EF, ed il numero MH è vguale à CD, e ſimilmente il numero LH è vguale ad AB; ſarà GH ad HN come HN ad HM, e come HM ad HL; e, diuidendo, GN ad NH, [b] come NM ad MH, e come ML ad LH; per la qual coſa tutti gli antecedenti inſieme GN, NM, ML, cioè tutto GL à tutti i conſeguenti inſieme, NH, MH, LH, [c] ſaranno come vno antecedente ad vn conſeguente, cioè come ML ad LH: ma i notati NH, MH, LH ſono vguali à i numeri EF, CD, AB, in conſeguenza GL à i numeri EF, CD, AB, inſieme giunti, ſarà come ML ad LH. E perche ML fù dimoſtrato vguale à CK, ed il numero LH fù fatto vguale ad AB, ſarà GL all'aggregato de i numeri EF, CD, AB, come CK al primo numero AB, il che era da dimoſtrarſi.

a Scol. alla 10. del 7.

b Scol. alla 22. del 7.

c 12. del 7.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXVI.

Se ſiano dall'vnità quanti numeri ſi vogliano continui proportionali nella proportione dupla, in modo, che l'aggregato di tutti ſia numero primo; e queſto, multipli-

cato

cato nell'vltimo, produca qualche numero, il prodotto ſarà numero perfetto.

Siano dall'vnità Z quanti numeri ſi vogliano A,B,C,D, nella proportione dupla, ed il loro aggregato, aſſieme con l'vnità, ſia il numero E, il quale, multiplicando D, produca il numero F. Dico che F è numero perfetto. Per quanti ſono i numeri A, B, C, D, altretanti ſe ne prendano nella proportione dupla, cominciando da E, che ſiano E,G,H,K. Perche i numeri A,B,C,D ſono nella medeſima proportione de i numeri E,G,H,K,

Z 1	A 2	B 4	C 8	D 16
E 31	G 62	H 124	K 248	F 496
	K 31			L 31
	M 31			H 465
		P ——	Q ——	

per l'egualità, A à D [a] ſarà come E à K, ed il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A,& K,[b] ſarà vguale al prodotto de i medij D, ed E; ma E, multiplicando D, per ipoteſi, produſſe F, il prodotto dunque di A in K è vguale al numero F; dal che K [c] miſura F per il numero A, cioè per il numero 2; e perciò F ſarà il doppio del numero K, ed i numeri E,G,H,K,F ſono continui proportionali. Dal ſecondo termine G, e dall'vltimo F, ſe ne leuino i numeri K, ed L, ogn'vno vguale al numero E, ch'è il primo termine, ed i reſtanti ſiano i notati M, ed H; donde i due L, ed H, inſieme, ſaranno vguali al numero F. E perche il numero G è il doppio di E, e dal numero G ſi è detratto il numero K, vguale ad E; ſarà il reſtante M vguale ad E. In oltre, perche dal ſecondo termine G, e dall'vltimo F, ſe n'è detratto vn numero vguale al primo termine E; ſarà il reſtante M al primo termine E, [d] come il rimanente H all'aggregato de'termini E,G,H,K; ma il numero M, per quel, che ſi è detto, è vguale ad E; ſarà il numero H vguale all'aggregato de i termini E, G, H,K; ſi aggiunga ad H il numero L, ed all'aggregato de i numeri E, G, H, K, s'aggiunga l'aggregato de i termini Z,A,B,C,D,ch'è vguale ad E, ouero ad L; ne vengano tutti i termini Z, A,B,C,D,E,G,H,K, giunti inſieme, vguali à i due L, ed H inſieme, cioè vguali al numero F. Di più, perche E, multiplicando D, produce F, perciò D miſura F [e] per il numero E: ma ciaſcuno de i termini Z, A, B, C, [f] che ſono nella proportione dupla, miſura il maſſimo D, in conſeguenza tutti i termini Z, A,B,C,D, miſurano il numero F: e perche ciaſcun termine E,G,H,K, miſura il medeſimo numero F (ſtante che ſono continuati nella proportione dupla) in conſeguenza tutti i termini Z, A,B, C, D, E, G, H, K, cioè ogn'vno da per ſe, miſura il numero F. Dico finalmente, che niſſun' altro numero, fuor che gli antedetti, miſura il numero F.

Lo miſuri, s'è poſſibile, qualche altro numero P per il numero Q, multiplicando P nel numero Q, il prodotto [g] ſarà il numero F: ma E, multiplicando D, produce il medeſimo numero F; ſarà il prodotto di E in D vguale al prodotto di P in Q. Si conſiderino quattro numeri, cioè il primo E,

a 14. del 7.
b 19. del 7.
c 7. aſſioma del 7.
d 35. del 9.
e 9. aſſiom. del 7.
f 11. aſſioma del 7.
g 9. aſſioma del 7.

mo E, il ſecondo Q, il terzo P, ed il quarto D. Perche il prodotto del primo E nel quarto D è vguale al prodotto del ſecondo Q nel terzo P, ſarà il primo E al ſecondo Q, [h] come il terzo P al quarto D. E perche i numeri A, B, C, D ſono proportionali dall'vnità Z, ed il termine A, più proſſimo all'vnità, è numero primo, niſſun'altro numero miſurerà il maſſimo D, [K] fuor che gli antecedenti A, B, C; fù ſuppoſto il numero P non eſſere alcuno de i numeri A, B, C; in conſeguenza il numero P non miſurerà il numero D: ſi diſſe, che la proportione di E à Q è come quella di P à D, non miſurando P il numero D, ne meno E miſurerà il numero Q: per ipoteſi, E è numero primo, i due numeri dunque E, & Q [l] ſono frà di loro primi, e perciò [m] ſono minimi nella proportione di E à Q: mà E à Q è come P à D, i due minimi dunque E, & Q [n] miſureranno vgualmente i due P, & D, cioè l'antecedente E miſura l'antecedente P, ed il conſeguente Q miſura il conſeguente D. E perche niſſun'altro numero miſura D, [o] fuor che i notati A, B, C; ſarà il numero Q vno de i numeri A, B, C; e ſuppoſto, che ſia il medeſimo che B, perche i tre E, G, H ſono continui proportionali nella continuata proportione di B, C, D, per l'egualità, ſarà B à D [p] come E ad H; ed il prodotto de gli eſtremi B, & H, [q] ſarà vguale al prodotto de i medij D, ed E: mà il prodotto di D in E, per ipoteſi, è vguale al prodotto di P in Q; ſarà il prodotto di P in Q vguale al prodotto di B in H: e la proportione di Q à B [r] ſarà come quella di H à P; fù ſuppoſto Q il medeſimo, che B, ſarà dunque H il medeſimo che P; il che è contro alla ſuppoſitione fatta, mentre fù ſuppoſto P diuerſo da tutti i numeri A, B, C, D, E, G, H, K. Non dunque altro numero miſura il numero F, fuor che l'vnità, ed i numeri A, B, C, D, E, G, H, K, e perche queſti, per quel, che ſi è dimoſtrato, tutti miſurano il numero F, e, giunti inſieme, ſono vguali al medeſimo numero F, per la definitione 22. del ſettimo, il numero F ſarà numero perfetto, ch' era da dimoſtrarſi.

[h] 19. del 7.
[K] 13. del 9.
[l] 31. del 7.
[m] 23. del 7.
[n] 21. del 7.
[o] 13. del 9.
[p] 14. del 7.
[q] 19. del 7.
[r] 19. del 7.

SCOLIO.

Per facilitare le coſe à venire aggiungo qui li ſeguenti due Theoremi.

Frà l'vnità, ed il numero 2, e frà l'vnità, ed il numero 3; come ancora frà l'vnità, ed il numero 5, e frà i numeri, che differiſcono d'vna ſola vnità, non cade medio proportionale.

Cada prima, ſe è poſſibile, frà l'vnità A, ed il A. C — B. *numero 2, notato B, il medio proportionale C; perche C è medio proportionale frà li due A, & B, ſarà C maggiore di A, e minore di B; perche ſe C foſſe vguale ad A, eſſendo A à C come C à B, e l'vnità A è poſta vguale à C, ſarebbe C vguale à B, per la qual coſa A ſarebbe vguale à B, ch'è contro all'ipoteſi: nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrarà che C non è vguale à B in conſeguenza C*

ſarà minore di B, e maggiore di A: e perche la minima parte del numero è l'vnità, eſſendo C minore di B, ed il numero B eoſta di due ſole vnità, il medio C non ſarà maggiore dell'vnità, e pereiò C ſarà vguale ad A, ch'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato. In oltre eſſendo C maggiore di A, al minimo ſarà C due vnità, nel qual caſo ſarà vguale à B, eh'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A, ne vguale AB, ed in conſeguenza non è medio frà li due A & B, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

A. C— B..

Di nuouo ſia eſpoſta l'vnità A, ed il numero 3 notato B, e cada frà eſſi, s'è poſſibile, il medio C: ſi dimoſtri, come prima ſi fece, che il medio C non è vguale ad A, ne meno è vguale al numero B, e pereiò ſarà maggiore di A, e minore di B; hor eſſendo C minore di B, al più coſtarà di due vnità,

A. C— B...

e ſimilmente eſſendo maggiore di A, al minimo C coſtarà di due vnità, e perche il numero 2 è numero paro, pereiò il medio C ſarà numero paro; hor eſſendo C medio proportionale frà li due A & B, ſarà A à C come C à B; mà l'vnità A miſura il numero C [a] per l'iſteſſo numero C, in conſeguenza il numero C [b] miſura il numero B per l'iſteſſo numero C, dal che il numero paro miſura il numero diſparo, eh'è impoſſibile, non dunque C è maggiore di A, ne minore di B, ne meno è vguale ad A, ouero à B, e perciò non è medio frà li due A & B.

a 5. aſſioma del 7.
b 20. defin. del 7.

In oltre ſia eſpoſta l'vnità A, ed il numero 5 notato B, e ſia C, s'è poſſibile, medio frà li due A & B, ſi dimoſtri come prima ſi fece, che C non è vguale ad A, ne meno è vguale à B, mà C è maggiore di A, e minore di B; ſia prima C minore di B per vna ſola vnità; perche B è numero diſparo ſarà C numero paro, e perche A à C è come C à B, e l'vnità A [c] miſura C, perciò il numero paro C miſurerà il numero diſparo B, ch'è impoſſibile; non dunque C è minore di B d'vna ſola vnità. Sia di nuouo C minore di B di 2 vnità, cioè C ſia numero ternario, ſe da B, eh'è 5 vnità, ſe ne detrae il ternario C, e le due vnità che reſtano ſi detraggono dal ternario C, reſta vna ſola vnità, e pereiò li due C & B [d] ſono numeri primi: e perche A à C è come C à B, e l'vnità A miſura il numero C, in conſeguenza il numero primo C miſurerà il numero primo B; ch'è impoſſibile, non dunque C è minore di B di due vnità. Sia dunque C minore di B di tre vnità, cioè ſia 2, eh'è numero paro; perche A à C è come C à B, e l'vnità A miſura il numero C, in conſeguenza il numero paro C miſurerà il numero diſparo B, ch'è impoſſibile, non dunque C è minore di B di tre vnità, ne meno è minore di B di quattro vnità, perche ſarebbe vguale ad A; per la qual coſa C non è medio proportionale frà li due A & B eh'era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

A. C— B.....

c 5. aſſioma del 7.
d 1. del 7.

Finalmente ſiano li numeri A & B differenti per vna ſola vnità in modo, che A ſia minore di B. Dico che frà eſſi non cade medio proportionale. Sia s'è poſſibile, C medio proportionale, frà li due A & B. Dico prima che C non è vguale ad A ne meno è vguale al numero B, perche ſe foſſe vguale ad A, eſſendo A à C come C à B, ſarebbe C vguale à B, mà è ancora vguale ad A, in conſeguenza A ſarà vguale à B, ch'è contro all'ipoteſi.

A... C— B....

Nell'

Nell'istesso modo si dimostrerà, che C non è vguale à B; per la qual cosa C è maggiore di A è minore di B, e perche B supera A per vna sola vnità, essendo C maggiore di A, al minimo sarà vguale à B, ch'è contro à quel che si è dimostrato; similmente essendo C minore di B al minimo sarà vguale ad A, ch' è contro à quel che si è dimostrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A; ne vguale à B, per la qual cosa non è medio frà li due A & B, ch'era da dimostrarsi.

I numeri, che sono nella dupla, ò tripla, ò quintupla proportione, ouero differiscono per vna sola vnità, non sono come numero quadrato à numero quadrato.

Siano prima i numeri A & B nella proportione dupla, si trouino [a] *i minimi nella proportione di A à B, che siano C & D. Perche A & B sono nella proportione dupla, i minimi saranno l'vnità, ed il numero 2, frà quali per l'antecedente dimostratione, non cade medio proportionale, e perciò* [b] *non sono piani simili, per la qual cosa C à D* [c] *non è come numero quadrato à numero quadrato, mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato.*

A.... B.....
C. D..

a 2. del 8.
b 18. del 8.
c 26. del 8.

Di nuouo siano i numeri A, & B nella proportione tripla. Dico che A à B non è come numero quadrato à numero quadrato. Si trouino i minimi numeri [d] *nella proportione di A à B, che siano C, & D, perche A, & B, sono nella proportione tripla, i minimi, cioè C, & D saranno l'vnità, ed il numero ternario, frà quali per l'antecedente dimostratione non cade medio proportionale, e perciò* [e] *non sono piani simili, e la proportione di C à D* [f] *non sarà come numero quadrato à numero quadrato; mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri nella quintupla proportione non sono come numero quadrato à numero quadrato.*

A.. B.....
C. D...

d 2. del 8.
e 18. del 8.
f 26. del 8.

Finalmente siano i numeri A. & B, differenti solamente per vna sola vnità. Dico che non sono come numero quadrato à numero quadrato. Perche i numeri A, & B, differiscono per vna sola vnità, per l'antecedente dimostratione non cade frà loro alcun medio proportionale, e perciò [g] *non sono piani simili, ne meno sono* [h] *come numero quadrato à numero quadrato, ch'era da dimostrarsi.*

A... B....

g 18. del 8.
h 26. del 8.

Fine del Nono Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO DECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Commenſurabili ſi chiamano le grandezze, quando ſono miſurate da vna medeſima miſura.

II.

Incommenſurabili ſi dicono quelle grandezze, delle quali non ſi troua alcuna miſura commune.

III.

Le linee rette ſono commenſurabili in potenza, quando il medeſimo ſpatio miſura i loro quadrati,

OGNI quadrato ſi chiama potenza del ſuo lato, e perciò, nelle coſe à venire, quando ſi dirà la potenza d'vna retta linea, intenderemo l'iſteſſo, come ſe diceſſimo il quadrato di quella retta linea; e ſe per eſſempio, ſi dirà, che delle rette linee A, & B, in potenza l'vna è dupla all'altra, non ſi deue intendere la retta linea A eſſer dupla alla retta linea B, ma che la potenza della retta linea A è dupla alla potenza della retta linea B, cioè, che il quadrato della retta linea A, è duplo al quadrato della retta linea B. Ed il ſimile s'intenderà ſe ſi dirà tripla, quadrupla &c. ſuppoſto queſto. Spiega Euclide nella prima definitione, che coſa dobbiamo intendere per quantità commenſurabili, e dice, che le grandezze all'hora ſi chiamano commenſurabili, quando ſono miſurate da vna medeſima quantità, e

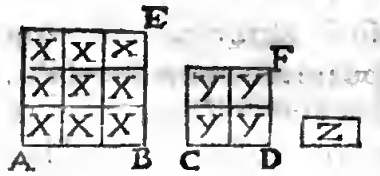
A

B

non

non importa, che non ſiano miſurate vgualmente, ma baſta, che ciaſcuna ſia miſurata dalla medeſima quantità in modo, che non ſoprauanzi coſa alcuna; e quella quantità, che miſura le grandezze commenſurabili, ſi chiama commune miſura. E nota, che in queſta prima definitione Euclide parla delle quantità in genere, ſenza reſtringerſi à particolare alcuno; ſi che volendola applicare à qualche particolare, come per eſſempio alle rette linee, ſi può dire, che le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, quando ſono miſurate da vna medeſima retta linea; ed i piani ſono ancora commenſurabili, quando vn medeſimo ſpatio gli miſura: e con modo ſimile, queſta prima definitione ſi può applicare à tutti i particolari. Spiega poi nella ſeconda definitione, quali ſono le quantità incommenſurabili, e, tenendo la medeſima generalità in queſta, che nella prima, chiama grandezze incommenſurabili quelle, delle quali non ſi troua niuna miſura commune; e queſta ancora, come ſi è detto della prima definitione, ſi può applicare à tutti i particolari, chiamando le rette linee incommenſurabili in lunghezza, quando niſſuna retta linea le miſura; ed i piani ancora ſi dicono incommenſurabili, quando non ſi troua ſpatio alcuno, che gli miſura: e con modo ſimile ſi può fare l'applicatione à tutti gli altri generi di quantità.

Premeſſa la cognitione delle quantità commenſurabili, ed incommenſurabili, coſi in genere, paſſa Euclide al particolare, e con la terza definitione ci ſpiega, che coſa doueremo intendere, quando ſi dirà, rette linee commenſurabili in potenza; e dice, che all'hora le rette linee ſi diranno commenſurabili in potenza, quando i loro quadrati ſaranno miſurati da vn medeſimo ſpatio; come per eſſempio. Siano eſpoſte le rette linee AB, CD, i di cui quadrati, ò vogliamo dire potenze, ſiano AE, CF, le quali ſi concepiſcano di tali grandezze, che diuiſa AE ne gli ſpatij vguali, notati X, e diuiſa CF ne gli ſpatij vguali, notati Y, ciaſcuno de gli ſpatij Y ſia vguale à ciaſcuno de gli ſpatij X; s'intenda poi vn altro piano come Z, vguale ad vno de gli ſpatij X, ouero Y; in tal caſo lo ſpatio Z miſurerà giuſtamente il quadrato AE, ſenza che reſti coſa alcuna; ed il medeſimo piano Z miſurerà giuſtamente il quadrato CF, ſenza che reſti coſa alcuna: dal che il piano Z ſarà commune miſura delle due potenze AE, CF, e per la prima definitione, le due potenze AE, CF, ſaranno commenſurabili; e ſecondo tal ipoteſi le rette linee AB, CD, che ſono lati di quelle potenze commenſurabili, ſi dicono rette linee commenſurabili in potenza, di modo che, ò che le rette linee ſiano, ò che non ſiano commenſurabili in lunghezza, quando i loro quadrati hanno vna commune miſura; quelle rette linee ſi dicono commenſurabili in potenza. E notiſi, che ſe i quadrati, ò potenze AE, CF ſono commenſurabili, ed i loro lati AB, CD ſono ancora commenſurabili in lunghezza, le medeſime rette AB, CD, ſi chiameranno commenſurabili in lunghezza, e ſi chiameranno ancora commenſurabili in potenza; ma ſe i quadrati AE, CF ſono commenſurabili, ed i loro lati AB, CD non ſono commenſurabili in lunghezza; all'hora le rette AB, CD ſi dicono ſolamente commenſurabili in potenza.



Le

I V.

Le rette linee ſi dicono incommenſurabili in potenza, quando non ſi troua ſpatio alcuno, che miſura i loro quadrati.

Quando le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, come ſi dimoſtrerà à ſuo luogo; e quando le rette linee non ſono commenſurabili in lunghezza, può eſſere, che ſiano commenſurabili in potenza; e può eſſere, che non ſiano; cioè può eſſere, che qualche ſpatio miſuri i loro quadrati, e può eſſere, che mai ſi troui ſpatio alcuno, che li miſuri: ſe qualche ſpatio miſura i loro quadrati, quelle rette linee ſi dicono commenſurabili in potenza, come ſi diſſe nell'antecedente definitione; ma ſe in niſſun modo ſi troua ſpatio, che miſuri i detti quadrati, quelle rette linee ſi dicono eſſere incommenſurabili in potenza: ed in queſto caſo ſaranno incommenſurabili in potenza, e ſaranno ancora incommenſurabili in lunghezza, di modo, che, ſi come, quando due rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, così, quando ſono incommenſurabili in potenza, ſono ancora incommenſurabili in lunghezza; il che tutto ſi dimoſtrerà à ſuo luogo.

V.

La retta linea terminata, riſpetto alla quale tutte le infinite altre rette linee terminate ſono ò commenſurabili, ouero incommenſurabili, delle quali alcune ſono commenſurabili in lunghezza, ed in potenza, altre ſono ſolamente commenſurabili in potenza, ed altre ſono incommenſurabili in lunghezza, ed in potenza, ſi chiama Rationale.

Accioche la ſpiegatione di queſta definitione rieſca più chiara, la poniamo dopo le ſeguenti due definitioni.

V I.

Tutte le altre rette linee, che ſono à queſta commenſurabili in lunghezza, e potenza, ouero commenſurabili ſolamente in potenza, ſi dicono Rationali.

Tutte

VII.

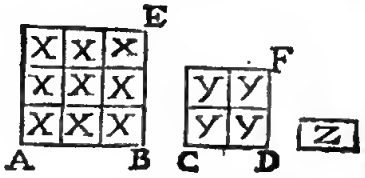
Tutte quelle rette linee poi, che à queſta ſono incommenſurabili, ſi chiamano Irrationali.

In tre generi diuide Euclide l'infinita moltitudine delle rette linee, à cauſa che tre caſi ſolamente ſi danno in Natura, che riguardano la loro commenſurabilità, ed incommenſurabilità; cioè, ò le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ed in queſto caſo ſono neceſſariamente commenſurabili ancora in potenza, come à ſuo luogo ſi dimoſtrerà; ò non ſono commenſurabili in potenza, ed in queſt'altro caſo neceſſariamente ne meno ſono commenſurabili in lunghezza, come ſimilmente ſi dimoſtrerà in queſto decimo Elemento; ouero non ſono commenſurabili in lunghezza, ma ſono commenſurabili in potenza. Se non ſono commenſurabili in potenza (per il che, come ſi è detto, ne meno ſono commenſurabili in lunghezza) chiama le rette linee, ſecondo queſto genere, Irrationali. Se le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza (perilche ſono ancora commenſurabili in potenza) ſecondo queſt'altro genere, le chiama Rationali. E finalmente, quando le rette linee non ſono commenſurabili in lunghezza, ma ſono commenſurabili in potenza, le chiama ſimilmente Rationali. Due generi dunque di rette linee rationali ſi conſiderano in Natura, ed vn ſolo d'Irrationali, cioè. Quelle rette linee, delle quali in riguardo à qualche commune miſura, ſe ne poſſono eſprimere le parti, ch'Euclide chiama commenſurabili in lunghezza, coſtituiſcono il primo genere delle rette linee Rationali. Quelle rette linee poi, delle quali in riguardo à qualche commune miſura, non ſe ne poſſono eſprimere le parti, per il che ſi dicono incommenſurabili, ò ſono, ò non ſono commenſurabili in potenza; ſe ſono commenſurabili in potenza, cioè che delle loro potenze ſe ne poſſano in riguardo à qualche commune miſura eſprimere le parti, queſte coſtituiſcono l'altro genere di rette linee, che ſimilmente ſi dicono Rationali. E ſe ne meno ſono commenſurabili in potenza, cioè, che ne in lunghezza, ne in potenza ſe ne poſſano eſprimere le parti, in riguardo à qualche commune miſura, quelle coſtituiſcono il terzo genere, e ſi dicono Irrationali. E da quì ſi caua, che qualunque retta linea, conſiderata ſola, ſenza comparatione ad altra retta linea, quella non è ne rationale, ne meno irrationale: ma ſe ſarà comparata à qualche altra retta linea, all'hora, ſecondo le conditioni ſpiegate di ſopra, ò ſarà rationale, ouero irrationale. Per eſſempio, la retta AB, conſiderata ſola, ſenz'altra comparatione, non è rationale, ne irrationale; ma comparata à qualche altra retta C, ſe la retta C miſura giuſtamente la retta AB, diuiſa AB nelle parti vguali alla retta C, verremo in cognitione di quante parti ſono in AB vguali à C; e così potremo eſprimere la moltitudine delle parti, che ſono in AB, vguali alla retta C; ed in tal caſo la retta AB è commenſurabile in lunghezza, riſpetto alla miſura C, cioè la retta linea AB è quella, della quale ſe ne poſſono eſprimere le parti, riſpetto alla miſura C; ed in queſto caſo la retta linea AB ſi chiama rationale. Se poi la retta linea C non miſura giuſtamente la retta AB, ma ſi troua qualche retta D, la

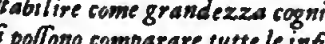
quale

quale è commune miſura delle due AB, & C, quelle, per la prima definitione, ſono commenſurabili in lunghezza, e però ſi diuidano le rette AB, & C, nelle parti vguali alla retta D, ed haueremo cognite le parti della retta AB, riſpetto alla miſura D; e ſi ſapranno ancora le parti della retta C, riſpetto alla medeſima retta D; e, per quel, che ſi è detto, le rette AB, & C, delle quali ſono cognite le parti, riſpetto alla commune miſura D, ſi dicono ſimilmente Rationali; e queſte ſono quelle, che coſtituiſcono il primo genere delle rette Rationali.

Di nuouo, ſiano le rette AB, CD, frà le quali non cada alcuna miſura commune, quelle ſaranno incommenſurabili in lunghezza, ed i loro quadrati ſiano AE, CF; e ſuppoſto, che lo ſpatio Z ſia commune miſura de i quadrati AE, CF, ſaranno le rette AB, CD, per la terza definitione, commenſurabili in potenza. S'intendano diuiſi i quadrati AE, CF, negli ſpatij X, ed Y, ogn'vno vguale allo ſpatio Z, ed haueremo cognite le parti delle potenze AE, CF, riſpetto alla miſura Z; e per quel, che ſi è detto, le rette AB, CD ſono ancora rationali; e queſte coſtituiſcono il ſecondo genere delle rette Rationali. Quelle rette poi, che non hanno commune miſura, ne in lunghezza, ne in potenza, coſtituiſcono l'altro genere, e ſi dicono Irrationali.

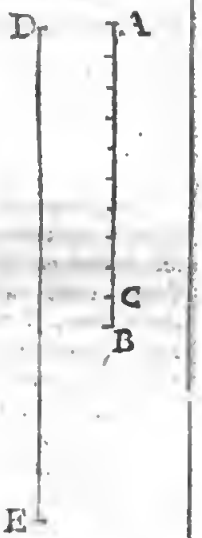


Finalmente, perche qualunque retta linea ſi può diuidere in quante parti vguali ſi vuole, perciò ogni retta linea ſi può ſtabilire come grandezza cognita, cioe come miſura, ò norma, alla quale ſi poſſono comparare tutte le infinite altre rette linee. Per eſſempio, ſia eſpoſta qualunque retta linea AB, la quale potendoſi à noſtro arbitrio diuidere in quante parti vguali vogliamo, la poſſiamo ancora ſtabilire come grandezza cognita, ed eſprimerne quelle parti, nelle quali l'haueremo diuiſa, ò altre, nelle quali ſi può ſempre diuidere: e, comparando à queſta tutte le infinite altre rette linee, molte di quelle ſaranno à queſta commenſurabili in lunghezza, e per quel, che ſi è detto, ſaranno ancora commenſurabili in potenza: altre ſaranno ſolamente commenſurabili in potenza; ed altre ſaranno incommenſurabili in lunghezza, ed ancora in potenza; e queſta retta linea AB, ò altra, che ſi può porre in ſuo luogo, ſtabilita come quantità à noi cognita, alla quale ſaranno comparate tutte le altre, è quella, che Euclide nella definitione quinta di queſto, chiama Rationale; alla quale comparate le altre, quelle, che à queſta ſaranno commenſurabili in lunghezza, e potenza; ouero ſaranno ſolamente commenſurabili in potenza, le chiama nella 6. defin. Rationali. Le altre, che à queſta ſaranno incommenſurabili in lunghezza, e potenza, nella 7. defin. le chiama Irrationali.



Per

Per più chiara ſpiegatione deueſi riflettere, che, douendoſi miſurare qualche ſpatio propoſto, queſto, come è vſo commune, non ſi fà altrimente, che con l'aiuto di qualche cognita miſura, diuiſa in palmi, piedi, e ſimili: e perche queſti palmi, ò piedi, non in tutti i paeſi ſono vguali, ma ſono di differenti lunghezze, è manifeſto, che le diuiſioni di tali miſure ſono arbitrarie; e non ſolo le diuiſioni ſono arbitrarie, ma ſono ancora arbitrarij i nomi delle medeſime miſure: poiche in alcuni luoghi le loro miſure le chiamano Braccia, Cubiti &c. ed in altri le chiamano Canne, Catene, Pertiche, Paſſi, e ſimili. Hor, non douendo Euclide reſtringerſi in vna delle antedette, ò altre miſure particolari, per parlare in genere d'ogni miſura, ò che ſi vſi, ò che poſſa vſarſi, intende diuiſa qualunque retta in quante parti vguali ſi voglia, in modo, che queſta retta poſſa rappreſentare tutte le miſure, che ſi vſano, e quante altre ad arbitrio dell'huomo ſe ne poſſono vſare; e queſta è quella retta, che chiama Rationale, di modo, che ſotto queſta voce di Rationale dobbiamo intendere, non ſolo tutte le miſure, che attualmente ſi vſano in ogni paeſe, ma quelle ancora, che à noſtro arbitrio ſi poſſono vſare. E perche, quando con qualche miſura vſata ſi miſura qualche ſpatio, non ſi ſà altro, ſe non che la comparatione frà la coſa miſurata, e quella, con la quale ſi miſura; come per eſſempio ſe foſſe propoſta qualunque miſura AE, ò che ſia pertica, ò canna, ò catena, ò braccio, ò paſſo &c. che ſempre la chiameremo Rationale, e con queſta ſi haueſſe à miſurare la lunghezza DE; queſta operatione non è altro, ſe non che vedere quante volte DE contiene la miſura AB; ouero quante parti è DE di quelle, che ſono in AB; il che è vna ſemplice comparatione, che ſi fà trà la lunghezza DE, e la propoſta miſura AB. Quindi è, ch'Euclide chiama Rationale quella linea, alla quale ſono comparate tutte le altre, ed è l'iſteſſo che dire, con la quale ſi miſurano tutte le altre.



Notiſi, che quando ſi è ſtabilita la linea, che chiamiamo Rationale, come AB; ò altra, la quale arbitrariamente è diuiſa in parti vguali, ogn'vna di quelle vguali parti, come BC, per eſſere ſingolare, ſi chiama Vnità. E perche, come s'è detto, la Rationale AB è vna certa miſura determinata, alla quale ſi comparano tutte le altre rette; perciò ogn'una delle parti vguali, che ſono in AB, ſi conſidera come vnità determinata; anzi che nelle comparationi da farſi frà la Rationale, e le altre grandezze, baſta la cognitione della ſola vnità CB; poco importando, che la Rationale conſti di vna ſola vnità, ò di più vnità, vguali à DB; atteſo che la Rationale ſi può fare lunga, ò breue, quanto ſi vuole, ed è la medeſima coſa dire, che DE conſti per eſſempio, di mille di quelle parti, che in AB ſono dieci; quanto è dire, che la retta DE conſti di mille vnità, ò parti vguali à CB.

VIII.

Il quadrato della ſudetta Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, ſi chiama ancora Rationale.

IX.

Tutti i piani, che ſono commenſurabili all'antedetto quadrato, ſi dicono ſimilmente Rationali.

X.

E quei piani, che al medeſimo ſudetto quadrato ſono incommenſurabili, ſi dicono Irrationali.

XI.

Le rette linee poi, i di cui quadrati ſono incommenſurabili all'iſteſſo ſudetto quadrato, ſi chiamano Irrationali: come ancora quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à i piani, che ſono incommenſurabili à quel medeſimo ſudetto quadrato, ſi dicono parimente incommenſurabili.

Per eſſempio ſia AB quella retta, ſtabilita come cognita, alla quale ſi habbiano à comparare tutte le altre; ſarà AB, come ſi è detto, quella retta, che chiamiamo Rationale, il di cui quadrato, come vuole Euclide nell' ottaua definitione, ſi chiamerà Rationale: e tutti i piani che ſaranno commenſurabili al quadrato di AB, per quelche ſpiega nella 9. definitione, ſi chiameranno ſimilmente Rationali. Quei piani poi che ſaranno incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il ſenſo della decima definitione, ſi chiameranno Irrationali. Finalmente le rette, i di cui quadrati ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſi dicono irrationali alla retta AB; e quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à quei piani, che ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il tenore dell' 11. definitione, ſi dicono Irrationali alla retta AB.

A ——————— B

Aggiungo, come fà il P. Clauio, vn ſolo poſtulato con alcuni Aſſiomi, de' quali ſi ſerue Euclide in queſto Elemento.

POSTVLATO.

Si prende per conceſſo, che di due ineguali grandezze del medeſimo genere, la minore ſi poſſa tante volte multiplicare, finche ne riſulti vna grandezza, che ſuperi la maggiore.

Per-

Perche ogni grandezza terminata si può accrescere in infinito, percio, multiplicandosi vna proposta grandezza più, e più volte, finalmente si peruerrà ad vna grandezza, maggiore di qualunque altra terminata grandezza del medesimo genere.

ASSIOMI.

I.

Quella grandezza, che misura molte altre grandezze, misurerà ancora il composto di quelle.

II.

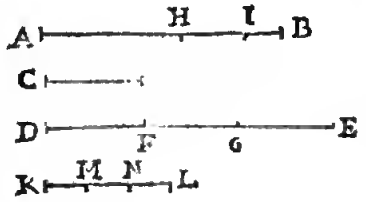
Se vna grandezza misura vn altra grandezza, misurerà ancora la misurata da quella.

III.

Se vna grandezza misura tutta vn'altra grandezza, e misura vna parte di quella, misurerà ancora il rimanente.

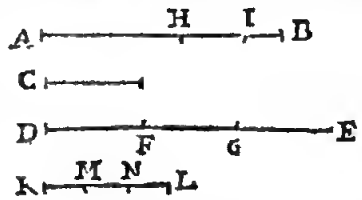
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due grandezze ineguali dalla maggiore se ne detrae più della metà, e dal rimanente se ne detrae più della metà, e di nuouo da quel, che resta, se ne detrae più della metà, e questo si faccia sempre, finalmente restarà vna grandezza minore dell'altra.



Siano proposte due grandezze ineguali, come AB maggiore, & C minore. Dico che, se dalla maggiore AB se ne detrae più della metà, e dal rimanente se ne detrae ancora più della metà, e di nuouo da quel, che resta, se ne detrae più della metà, e questo si faccia sempre, finalmente resterà vna grandezza minore della data C. Si prenda DE multiplice di C in modo, che la grandezza DE sia prossima maggiore a di AB, e si diuida nelle parti vguali à C, che siano DF, FG, GE; si detragga dalla grandezza AB più della metà, che sia A H; e dal rimanente HB se ne detragga similmente più della metà, che sia HI: e questa detrattione si faccia tante volte, in modo, che le parti AH, HI, IB siano tante, per quante sono le parti in DE. Dico che l'vltimo auanzo IB è minore di C.

Si prenda KL multiplice di IB, come DE è multiplice di C, e ſi diuida KL nelle parti vguali ad IB, che ſiano KM, MN, NL. Perche AH, per coſtruttione, ſupera la metà di AB, ſarà AH maggiore di HB; e molto più della parte IB: ma IB è vguale à KM, ſarà AH maggiore di KM. Similmẽte perche HI ſupera la metà di HB, ſarà HI maggiore di IB; ma IB è vguale ad MN, ſarà HI maggiore di MN; e tutta AI ſarà maggiore di tutta la grandezza KN: e perche IB è vguale ad NL, ſarà tutta AB maggiore di KL: per coſtruttione DE è maggiore di AB, ſarà DE maggiore di KL.



Finalmente perche DE, per coſtruttione, è multiplice di C, come LK è multiplice di IB, eſſendo C vguale ad EG, e la grandezza IB vguale ad LN, ſarà DE multiplice di EG, come KL è multiplice di LN: dal che ſarà ED ad LK, come GE ad LN: ma DE è dimoſtrata maggiore di LK, ſarà GE maggiore di LN, cioè LN minore di GE; e perche LN è vguale ad IB, e la grandezza EG è vguale à C, ſarà IB minore di C, come fù propoſto dimoſtrare.

a 15. del 5. e 20. diffin. del 7.

SCOLIO.

Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che ſe da AB ſe ne detrae la metà, e da quel che reſta ſe ne detrae la metà, e queſto ſi farà ſempre, finalmente l'vltimo auanzo, come IB, ſarà minore di C. Poiche, ſuppoſta la medeſima coſtruttione, eſſendo AH la metà di AB, ſarà AH maggiore di IB, cioè maggiore di KM; & eſſendo HI la metà di HB, ſarà HI vguale ad IB, dal che HB ſarà vguale ad ML, e tutta AB maggiore di KL: ed, argumentandoſi come prima ſi fece, ſi dimoſtrerà che IB è minore di C.

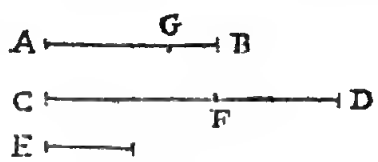
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se di due grandezze ineguali ſi detrae ſempre la minore, quanto ſi può, dalla maggiore, con reciproca detrattione; ſe di queſta continua detrattione, fatta reciprocamente, mai l'auanzo miſuri l'antecedente; quelle grandezze ſaranno incommenſurabili.

Siano le grandezze ineguali AB, CD, e dalla maggiore CD ſe ne detragga quanto ſi può la minore AB; ed il rimanente ſi detragga quanto ſi può da AB, e quel che reſta ſi detragga, quanto ſi può, da FD, e con queſt'ordine ſi proceda ſempre; ſe in queſta continua detrattione fatta reciprocamente, mai l'auanzo miſura la precedente. Dico che le grandezze AB, CD ſono incommenſurabili. Se non ſono incommenſurabili, quelle ſaranno miſurate da qualche miſura commune,

che

che sia E, la quale ò sarà vguale, ò minore di AB. Sia dunque detratta da CD, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia FD; sarà FD minore di AB: e perche AB misura CF, sarà CF ò vguale, ouero maggiore di AB; per la qual cosa CF sarà maggiore di FD; e perciò CF sarà maggiore della metà di CD. Similmente da AB se ne detragga, quãto si può, l'auanzo FD, e quel, che resta, sia GB; sarà GB minore di FD. E perche FD misura AG, sarà AG maggiore di FD; e sarà molto maggiore di GB; per la qual cosa AG sarà maggiore della metà di AB. Di nuono da FD se ne detragga, quanto si può, GB, e con quest'ordine si proceda, fin à tanto, che resti da AB, [a] ouero CD, vna grandezza minore di E. Supposto, che sia fatta questa continua detrattione, e sia il rimanente GB, minore della grandezza E. Perche E misura, per suppositione, la quantità AB, e la medesima AB, per costruttione misura CF, in conseguenza la quantità E misurerà [b] CF: ma, per la suppositione fatta, misura tutta CD; la quantità dunque E misurerà ancora [c] il rimanente FD; ma l'auanzo FD, per costrurtione, misura AG, perciò la quantità E [d] misurerà AG. E perche la medesima E misura tutta AB; la quantità E dunque [e] misurerà il rimanente GB; fù suppostà GB minore di E, la maggiore misurerà la minore, ch'è impossibile. Non dunque la grandezza E è commune misura delle due AB, CD, ma le due AB, CD sono incommensurabili, che era da dimostrarsi.



[a] 1. del 10.
[b] 2. assioma del 10.
[c] 3. assioma del 10.
[d] 2. assioma del 10.
[e] 3. assioma del 10.

SCOLIO.

Faremo la conuersa all'antecedente propositione col P. Clauio, nel seguente modo.

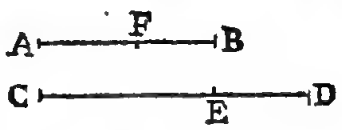
Se due grandezze saranno incommensurabili, detratta sempre, quanto si può, la minore dalla maggiore, con reciproca detrattione, mai l'auanzo misurerà la precedente.

Siano le grandezze incommensurabili AB, CD, e dalla maggiore CD se ne detragga, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia ED, sarà ED minore di AB. Similmente da AB se ne detragga, quanto si può, l'auanzo ED, e quel, che resta, sia FB; sarà FB minore di ED. E con quest'ordine si proceda, sottraendo sempre, quanto si può, la minore dalla maggiore alternatiuamente. Dico che mai restarà auanzo, che misuri l'antecedente.

Dall'auanzo FB sia misurato, se è possibile, l'antecedente ED. Perche FB misura ED, e, per ipotesi, ED misura AF, in conseguenza FB [a] misurerà AF;

[a] 2. assioma del 10.

AF; ma FB misura se medesima, misurerà ancora [b] *il tutto AB. E perche AB misura CE, perciò FB* [c] *misurerà CE, ma per la fatta suppositione, FB misura ED, misurando le due CE, ED,* [d] *misurerà ancora il tutto CD; ma si è dimostrato, che FB misura tutta AB; sarà dunque FB commune misura delle due AB, CD: per la qual cosa le due AB, CD sono commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque l'auanzo FB misura la precedente ED, come fù proposto dimostrare.*

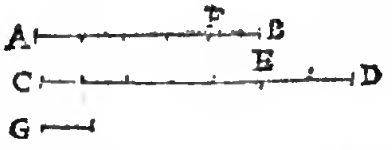


b 1. assiom. del 10.
c 2. assioma del 10.
d 1. assioma del 10.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE III.

Date due grandezze commensurabili, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano le due date grandezze commensurabili AB, CD, e si habbia à ritrouare la loro massima commune misura. Dalla maggiore CD se ne detragga, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia ED; sarà ED minore di AB. Poi da AB se ne detragga, quanto si può, l'auanzo ED, e quel, che resta, sia FB; sarà FB minore di ED. E similmente da ED se ne detragga FB, e con quest'ordine si proceda fino à tanto, che qualche auanzo misuri l'auanzo precedente, il che non può mancare; perche, se mai si troverà auanzo, che misuri la precedente, per la seconda propos. di questo, le grandezze AB, CD saranno incommensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque FB quell'auanzo, che misuri l'auanzo precedente ED. Dico che FB è la massima commune misura delle proposte grandezze AB, CD. Perche FB misura ED, e per costruttione ED misura AF; l'auanzo dunque FB [a] misurerà AF; ma FB misura se medesimo, in conseguenza FB [b] misurerà tutta AB; per costruttione AB misura CE, dunque FB [c] misurerà CE; ma FB misura ancora ED, misurando le due CE, ED, [d] misurerà parimente tutta CD: ma, per quel, che si è dimostrato, FB misura AB, sarà FB commune misura delle due AB, CD.



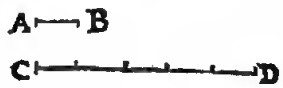
a 2. assioma del 10.
b 1. assiom. del 10.
c 2. assioma del 10.
d. 1. assioma del 10.

Dico finalmente, che FB è la massima di tutte le altre, che misurano le grandezze AB, CD. Se FB non è la massima, qualche altra grandezza sarà la massima commune misura delle due AB, CD; sia dunque quella la notata G, la quale, per esser massima sarà maggiore di FB. Perche G misura AB, e per costruttione, AB misura CE, perciò G [a] misurerà CE; mà per suppositione G misura tutta CD, in conseguenza [b] misurerà ancora il rimanente ED; e perche ED misura AF, dunque G [c] misurerà AF; mà G, per suppositione, misura tutta AB, misurando il tutto AB, e la parte AF, [d] misurerà ancora l'auanzo FB. mà G è supposta maggiore di FB, la maggiore misurerà la minore, ch'è impos-

a 2. assioma del 10.
b 3. assiom. del 10.
c 2. assiom. del 10.
d 3. assioma del 10.

sibile.

ſibile. Non dunque G è la maſſima commune miſura, mà ſarà FB. Se poi la minore AB miſuraſſe giuſtamente la maggiore CD, in modo, che, detratta AB, quanto ſi può, da CD, non ſuprauanzi coſa alcuna, all' hora AB ſarà la maſſima commune miſura, ſtante che AB miſurarebbe CD, e miſurarebbe ancora ſe medeſima, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

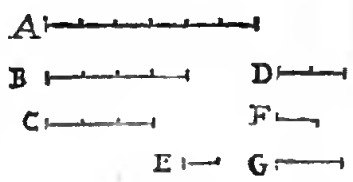


COROLLARIO.

Nella ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, ſupponendoG la maſſima commune miſura delle due AB, CD, ſi è dimoſtrato, che G miſura FB. Hor ſe ſupporremo, che G non ſia la maſſima, mà ſia vna di quelle, che miſura le due AB, CD, procedendoſi nell'iſteſſo modo, ſi prouerà, che G miſura la maſſima FB. D'onde è manifeſto, che quella grandezza, che miſura le due AB, CD, miſurerà ancora la loro maſſima commune miſura.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date tre grandezze commenſurabili, ritrouare la loro maſſima commune miſura,

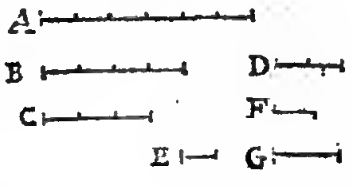


Siano propoſte le tre grandezze commenſurabili A, B, C, e ſi voglia ritrouare la loro maſſima commune miſura. Per l'antecedente propoſitione ſi troui la maſſima commune miſura di due ſole, come, per eſempio, delle due A, & B, che ſia D; ſe D miſura C, ſarà D la maſſima commune miſura delle tre A, B, C; mà ſe D non miſura C, perche le tre A, B, C ſi ſuppongono commenſurabili, qualche grandezza le miſurerà tutte tre; ſia E la loro commune miſura. Perche E miſura le tre A, B, C ſarà dunque commune miſura delle due A, & B, e, per l'antecedente Corollario, E miſurerà ancora D, ch'è maſſima commune miſura delle due A, & B: mà E miſura C, perciò E ſarà commune miſura delle due C, & D; per la qual coſa le due C, & D ſono commenſurabili. Si troui dunque, per l'antecedente propoſitione, la maſſima commune miſura delle due C, & D, che ſia F. Dico che F è la maſſima commune miſura delle tre A, B, C. Perche F miſura D, e per coſtruttione, D miſura le due A, B; perciò F [a] miſurerà le due A, & B:

[a] 2 aſſioma del 10.

ma

mà per costruttione, F misura ancora C, in conseguenza F è commune misura delle tre A, B, C.



Dico finalmente, che F è la massima. Se F non è la massima, qualche altra grandezza sarà la massima misura delle tre A, B, C; sia quella la notata G, sarà G maggiore di F. Perche G misura le due A, B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora D, ch'è loro massima commune misura, mà G, per suppositione, misura C, in conseguenza G sarà commune misura delle due C, & D; e per il Corollario antecedente, G, misurerà ancora F, ch'è massima commune misura delle due C, & D: mà G è supposta maggiore di F, la maggiore misurarebbe la minore, ch'è impossibile. Non dunque G è la massima; mà la massima sarà F, ch'era da farsi è dimostrarsi.

COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che posta G commune misura delle tre A, B, C misura ancora F, sarà manifesto, che quella grandezza, la quale sarà commune misura di tre altre grandezze, la medesima misurerà la massima commune misura di quelle tre grandezze.

Il medesimo modo tenuto à trouare la massima commune misura à tre grãdezze commensurabili, si può ancora tenere, per trouare la massima commune misura à più di tre grandezze commensurabili; cioè, se le date grandezze saranno quattro, si troui prima la massima commune misura à tre di quelle, e poi, frà la massima trouata, e la quarta, si troui vn altra massima; e se saranno cinque si trouerà prima la massima commune misura à quattro, e con quest'ordine in infinito; e sempre si prouerà, che quella grandezza, che è commune misura di quante si voglia grandezze, misurerà ancora la massima, che misura quelle.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

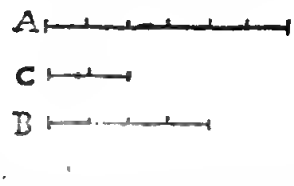
Le grandezze commensurabili hanno frà di loro quella proportione, che hà il numero al numero.

Siano le grandezze commensurabili A, & B. Dico che la proportione di A à B è come quella, che hà vn numero ad vn altro numero. Si troui [a] la massima commune misura delle due A, & B, che sia C; e quante volte C misura la grandezza A, tante volte l'vnità F misuri il numero D; come ancora, per quante volte C misura la grandezza B, tante volte l'vnità F misuri il numero E. Perche C misura A, come l'vnità F misu-

a 3. del 10.

ra

ra il numero D, sarà A multiplice di C, come D è multiplice dell'vnità F; e per quel, che si è dimostrato auanti alla sesta definitione del quinto Libro, gli vguali multiplici della prima A, e terza D, secondo qualunque multiplicatione, sono ambidue, presi separatamente, ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda C, e quarta F, presi secondo qualunque multiplicatione; e per la sesta definitione del quinto Libro, la prima A alla seconda C è come la terza D alla quarta F; cioè la grandezza A alla grandezza C haverà la medesima proportione, quale hà il numero D all'vnità F. Similmente, perche C misura B, come l'vnità F misura il numero E, sarà C à B, come F ad E. In oltre si considerino le tre grandezze A, C, B, delle quali C sia intermedia; e si considerino i numeri D, E, e l'vnità F sia intermedio; la proportione di A, à B, per il Lemma settimo dopo la 18. del sesto, è composta delle proportioni di A à C, e di C à B: mà A à C è come D ad F, e la proportione di C à B è come quella di F ad E, la proportione di A à B sarà cõposta delle due proportioni, cioè di D ad F, e di F ad E: mà la proportione del numero D al numero E, per il citato Lemma, è composta delle medesime due proportioni di D ad F, e di F ad E: in conseguenza la proportione di A à B sarà come quella del numero D al numero E, ch'era da dimostrarsi.



COROLLARIO I.

Da quel, che si è detto è manifesto, che se saranno tre grandezze da vna parte, come A, C, B, e tre numeri da vn altra, come D, F, E, e che sia A à C come D ad F, e sia C à B come F ad E, per l'egualità, sarà A à B come il numero D al numero E.

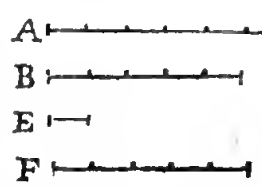
COROLLARIO II.

Da quel, che si è detto nell'antecedente dimostratione, appare, che, se vna grandezza è misurata da vn'altra grandezza, come vn numero è misurato dall'vnità, sarà la grandezza alla grandezza, come il numero all'vnità.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

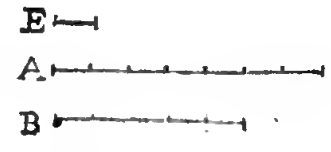
Se due grandezze hanno la proportione frà di loro, quale hà il numero al numero, quelle grandezze saranno cõmensurabili.

Habbia la grandezza A alla grandezza B quella proportione, che hà il numero C al numero D. Dico che le grandezze A, & B ſono frà loro commenſurabili. Frà i numeri C, & D ſi eſponga l'vnità G; e s'intenda diuiſa la grandezza A in tante parti vguali, per quante vnità ſono nel numero C. Poi ſia eſpoſta la grandezza E, vguale ad vna di quelle parti, che ſono in A, e ſi multiplichi la grandezza E, in modo, che ne venga F, la quale contenga tante volte E, per quante vnità ſono nel numero D. Perche A contiene tante volte E, per quante vnità ſono nel numero C, conterrà A tante volte E, per quante volte il numero C contiene l'vnità G; e, per il ſecondo Corollario all'antecedente propoſitione, la proportione di A ad E ſarà come quella del numero C all'vnità G. Similmente perche F contiene E tante volte, per quante vnità ſono nel numero D, ſarà E parte di F, come l'vnità G è parte del numero D, per la qual coſa E ad F, per il citato Corollario, ſarà come G à D. Hor, eſſendo A ad E come C à G; e ſi è dimoſtrata E ad F eſſere come G à D, per l'egualità, come ſi diſſe nel primo de gli antecedenti Corollarij, ſarà A ad F come il numero C al numero D: ma il numero C al numero D, per ipoteſi, è come A à B, ſarà A ad F [a] come la medeſima grandezza A alla grandezza B; e perciò le grandezze B, ed F [b] ſono frà di loro vguali; per coſtruttione E miſura F, in conſequenza E miſurerà la grandezza B; ma, per coſtruttione, miſura ancora A, la quantità dunque E ſarà commune miſura delle due A, & B: per la qual coſa le grandezze A, & B [c] ſono cõmenſurabili, che era da dimoſtrarſi.



a 11. del 5.
b 9. del 5.
c 5. defin. del 10.

In altro modo più breue. Si diuida A in tante parti vguali, per quante vnità ſono nel numero C, e ſi eſponga E vguale ad vna delle parti, che ſono in A. Perche E miſura A, come l'vnità G miſura il numero C, ſarà E ad A, come l'vnità G al numero C: ma, per ipoteſi, A à B è come C à D, ſarà, per l'egualità, come ſi diſſe nel Corollario primo all'antecedente propoſitione E à B come G à D; e perche l'vnità G miſura il numero D, perciò E miſurerà B; mà E, per coſtruttione, miſura ancora A, ſarà E commune miſura delle due A, & D: per la qual coſa le due A, & B [d] ſono commenſurabili, come fù propoſto dimoſtrare.



d 7. defin. del 10.

COROLLARIO I.

Dalla prima dimoſtratione dell'antecedente propoſitio-

ne

ne ſi caua il modo di trouare vna retta linea, alla quale vn' altra retta linea ſia come vn numero ad vn altro numero. Si replichi la figura della prima dimoſtratione, douendoſi trouare vna retta linea, alla quale ſia A (che quì la ſuppo-niamo retta linea) come il numero C al numero D; ſi diuida la retta A in tante parti vguali, per quante vnità ſono nel numero C, e ſi prenda la retta F, la quale conſti di tante parti vguali alle parti di A, per quante vnità ſono nel numero D, e per quel, che ſi è dimoſtrato, la retta A alla retta F ſarà come il numero C al numero D.

COROLLARIO II.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto ancora il modo da ritrouare vna retta linea, al di cui quadrato, ſia il quadrato d'vna retta data, come vn numero ad vn altro numero.

Per eſſempio ſia la retta data A, e ſi habbia da ritrouare vn altra retta, in modo, che il numero C al numero D ſia come il quadrato della retta A al quadrato della retta da trouarſi. Si troui, come nell'antecedente Corollario, la retta F, in modo, che la retta A alla retta F ſia come il numero C al numero D; poi frà le rette A, ed F, ſi troui vna media proportionale, come G. Dico che G è la retta, che ſi cerca. Perche G è media proportionale frà le due A, ed F, hauerà A ad F, per il Lemma 7. dopo la 18. del 6. duplicata proportione, che A à G: ma il quadrato di A al quadrato di G [b] *hà la medeſima duplicata proportione, che hà la retta A alla retta G; ſarà il quadrato di A al quadrato di G, come A ad F: ma, per coſtruttione, A ad F è come C à D, ſarà il quadrato di A al quadrato di G,* [c] *come il numero C al numero D, ch'era da farſi.*

[a] 13. del 6.

[b] 20. del 6.

[c] 11. del

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Le grandezze incommenſurabili non hanno la proportione frà loro, come hà il numero al numero.

Siano le grandezze A, & B incommenſurabili. Dico che non ſono frà di loro come numero à numero.

Se A à B ſarà come numero à numero, per l'antecedente propoſitione, le grandezze A, & B ſaranno commenſura-

bili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A à B è come vn numero à numero; e perciò le grandezze incommensurabili, non sono come numero à numero, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se due grandezze frà loro non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelle sono incommensurabili.

Siano le grandezze A, & B, le quali non habbiano frà loro la proportione, che hà il numero al numero. Dico che sono incommensurabili. Non siano incommensurabili, se è possibile. Perche le due A & B sono commensurabili, per la 5. propositione di questo, haueranno quella proportione, che hà il numero al numero, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque sono commensurabili, ma saranno incommensurabili, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

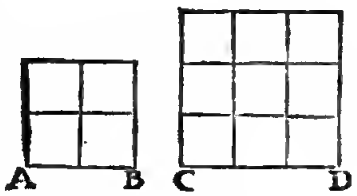
L'antecedente propositione, ch'Euclide dimostra in genere, douendosi applicare alle rette linee, è necessario auuertire, che, potendo le rette linee essere commensurabili in lunghezza, e potenza; e, potendo essere commensurabili in potenza solamente, quando la retta linea alla retta linea, non è come il numero al numero, per quel, che si è dimostrato nell'antecedente propositione, quelle rette linee saranno incommensurabili in lunghezza; ma non ne segue, che non possano essere commensurabili in potenza, mentre quelle, che sono commensurabili in potenza solamente, sono ancora incommensurabili in lunghezza. Si conclude dunque, che quando due rette linee non sono frà loro come numero à numero, quelle sono incommensurabili in lunghezza; e può essere, che siano incommensurabili in potenza, e può essere ancora, che siano commensurabili in potenza.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

I quadrati delle rette linee commensurabili in lunghezza, hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: ed i quadrati, che frà loro hanno la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, hanno i lati commensurabili in lunghezza. Di più, i quadrati delle rette linee incommensurabili

in

in lunghezza, non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; e de i quadrati, che non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, ne meno i lati haueranno le lunghezze commensurabili.



Siano prima le rette linee AB, CD, commensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD è come vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza, la retta AB, alla retta CD, [a] haverà quella proportione, che hà il numero al numero; habbia dunque la retta AB alla retta CD quella proportione, che hà il numero E al numero F; ed i quadrati de i numeri E, F siano i notati G, ed H. Perche il quadrato di AB al quadrato di CD [b] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, e la proportione di AB à CD è come E ad F; haverà il quadrato di AB al quadrato di CD duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [c] hà la medesima duplicata proportione del numero E al numero F; sarà il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.

[a] 5. del 10.

[b] 20. del 6.

[c] 11. del 8.

Di nuouo, sia il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H. Dico che le rette AB, CD sono commensurabili in lunghezza. Siano i numeri E, ed F i lati de i numeri quadrati G, ed H. Perche il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD [d] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, ed il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD, per ipotesi, è come il numero quadrato G al numero quadrato H; haverà il numero quadrato G al numero quadrato H duplicata proportione, che la retta AB alla retta CD: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [e] hà duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F; sarà il lato AB al lato CD, come il numero E al numero F; per la qual cosa le rette linee AB, CD sono commensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

[d] 20. del 6.

[e] 11. del 8.

In oltre, siano le rette A, & B, incommensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato di A al quadrato di B non è come il numero quadrato al numero quadrato.

Habbia, s'è possibile, il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; per quel, che si è dimostrato nella seconda parte, le

rette

rette A, & B ſaranno commenſurabili in lunghezza; il che è contro all' ipoteſi. Non dunque il quadrato di A al quadrato di B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente, non habbia il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Dico che le rette A, & B ſono incommenſurabili in lunghezza. Se le rette A, & B non ſono incommenſurabili in lunghezza, per neceſſaria conſeguenza, ſono commenſurabili in lunghezza; e, per quel, che ſi è dimoſtrato nella prima parte, il quadrato di A al quadrato di B ſarà come il numero quadrato al numero quadrato, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque le rette A, & B ſono commenſurabili in lunghezza; ma hanno le lunghezze incommenſurabili, come fù propoſto dimoſtrare.

COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che le rette linee, le quali ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, e quelle, che ſono commenſurabili in potenza, non ſempre ſono commenſurabili in lunghezza. Di più, quelle rette, che ſono incommenſurabili in lunghezza, non ſempre ſono incommenſurabili in potenza. Quelle rette linee poi, che hanno le potenze incommenſurabili, ſempre ſono incommenſurabili in lunghezza.

Cioè, eſſendoſi dimoſtrato nella prima parte, che i quadrati delle rette linee, che ſono commenſurabili in lungezza, ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, ed i numeri quadrati, come gli altri numeri, ſono tutti commenſurabili; ancora i quadrati di quelle rette linee ſono commenſurabili; e perciò, quando le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza.

Similmente, perche nella ſeſta propoſitione di queſto, ſi è dimoſtrato in genere, che le grandezze, le quali ſono frà loro come numero à numero, ſono commenſurabili; ſe i quadrati di due rette non ſaranno come numero quadrato à numero quadrato, mà ſaranno come numero non quadrato, à numero non quadrato, quei due quadrati ſaranno commenſurabili: mà perche non ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, per l'ultima parte dell'antecedente propoſitione, i latidi quei quadrati ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E queſte ſono quelle rette linee, che ſono incommenſurabili in lunghezza, e ſono commenſurabili in potenza; cioè ſono quelle, che ſi dicono commenſurabili ſolamente in potenza. E da qui ne ſe-

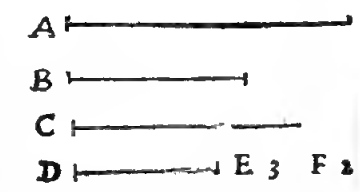
gue,

gue, che le rette, le quali ſono incommenſurabili in lunghezza, non ſempre ſono incommenſurabili in potenza.

Finalmente, nella ſettima propoſitione di queſto ſi è dimoſtrato in genere, che quando le grandezze non ſono frà di loro come numero à numero, quelle ſono incommenſurabili. Hor quando i quadrati di due rette linee non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelli ſono incommenſurabili: mà ſi è dimoſtrato nella prima parte, che quando i quadrati delle rette non ſono frà loro, come numero quadrato à numero quadrato, quelle rette linee ſono incommenſurabili in lunghezza; quando dunque i quadrati delle rette linee non ſono come numero à numero, ne meno ſaranno come numero quadrato à numero quadrato; e perciò ſaranno incommenſurabili in potenza, ed in lunghezza. Donde è manifeſto, che quando i quadrati di due rette linee ſono incommenſurabili, neceſſariamente ancora quelle rette linee ſaranno incommenſurabili in lunghezza.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se quattro grandezze ſono proportionali, e la prima è commenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà commenſurabile alla quarta; e ſe la prima è incommenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà incommenſurabile alla quarta.



Siano le quattro grandezze proportionali A, B, C, D, ò che tutte quattro ſiano del medeſimo genere, ò che le due A, & B ſiano d'vn genere, e le altre due d'vn altro genere, e la prima A ſia commenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà ancora commenſurabile alla quarta D. Perche A, & B ſi ſuppongono commenſurabili, la proportione di A à B [a] ſarà come quella d'vn numero ad vn altro numero. Sia dunque come il numero E al numero F. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D, hauerà C à D l'iſteſſa proportione, quale hà il numero E al numero F; per la qual coſa le due C, & D [b] ſono commenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. a 5. del 10. b 6. del 10.

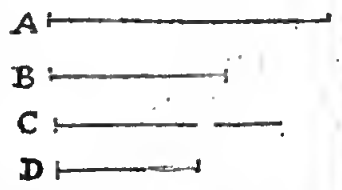
Di nuouo, ſuppoſto che la prima A ſia incommenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà incommenſurabile alla quarta D. Perche le due A, & B ſi ſuppongono incommenſurabili, la proportione di A à B [c] non ſarà come quella del numero al numero: ma la proportione di A à B, per ipoteſi, è come quella di C à D; la proportione dunque di C à D non è come quella del numero al numero. Per la qual coſa C, & D [d] ſono incommenſurabili, che era da dimoſtrarſi. c 7. del 10. d 8. del 10.

SCO-

SCOLIO I.

L'antecedente propoſitione, ch'Euclide pone in genere, non ſolo ſi applica alle rette linee, che ſono commenſurabili, ò incommenſurabili in lunghezza, ma ſi applica ancora à quelle, che ſono commenſurabili, o incommenſurabili in potenza, nel ſeguente modo.

Se quattro linee rette ſono proportionali, e la prima è commenſurabile ſolamente in potenza alla ſeconda, ancora la terza ſarà commenſurabile ſolamente in potenza alla quarta; e ſe la prima è incommenſurabile in potenza alla ſeconda, ancora la terza ſarà incommenſurabile alla quarta.



Habbia A à B l'iſteſſa proportione, che hà C à D. Dico prima, che ſe A è commenſurabile ſolamente in potenza alla ſeconda B, ancora C ſarà commenſurabile ſolamente in potenza alla quarta D. Perche A à B è come C à D, ſarà il quadrato di A al quadrato di B [c] *come il quadrato di C al quadrato di D: e perche le due A, & B ſi ſuppongono commenſurabili in potenza, i loro quadrati* [f] *ſaranno ancora commenſurabili; per la qual coſa il quadrato di A al quadrato di B* [g] *ſarà come numero à numero: mà il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato di D; ſarà il quadrato di C al quadrato di D come è il numero al numero; perciò i quadrati delle due C, & D,* [h] *ſono commenſurabili: dal che le due C, & D* [K] *ſono commenſurabili in potenza, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

c 22. del 6.
f 3. defin. del 10.
g 5. del 10.
h 6. del 10.
K 3. defin. del 10.

Di nuouo, ſuppoſto che A ſia incommenſurabile in potenza alla retta B. Dico che C ſarà incommenſurabile in potenza alla retta D. Perche le due A, & B ſono incommenſurabili in potenza, i loro quadrati ſaranno incommenſurabili, e perciò [l] *non ſono frà loro come numero à numero: mà la proportione del quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato D; non ſarà il quadrato di C al quadrato di D come numero à numero; per la qual coſa* [m] *non ſaranno commenſurabili, e le due C, & D non ſono commenſurabili in potenza, che era da dimoſtrarſi.*

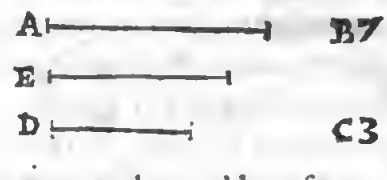
l 7. del 10.
m 8. del 10.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Ad vna propoſta retta linea ritrouare due rette linee incommenſurabili, cioè vna incommenſurabile ſolamente in lunghezza, e l'altra incommenſurabile in lunghezza, ed in potenza.

Sia propoſta la retta linea A, alla quale ſi voglia prima trouare vna retta linea incommenſurabile ſolamente in lunghezza.

Per il Lemma anteeedente* ſi trouino due numeri, come B, & C, i quali non habbiano la proportione, come numero quadrato à numero quadrato; poi, per il Corollario [illegible] alla propoſitione ſeſta di queſto, ſi troui la retta D, in modo, che il quadrato della retta A al quadrato della retta D, ſia come il numero B al numero C. Dico che la retta D è incõmenſurabile ſolamente in lunghezza alla retta A. Perche il quadrato di A al quadrato della retta D, per coſtruttione, è come il numero B al numero C; e ſimilmẽte per coſtruttione, il numero B al numero C non è come numero quadrato à numero quadrato; perciò il quadrato di A al quadrato di D non ſarà come numero quadrato à numero quadrato; ed inconſeguenza le rette A, & D a ſono incommenſurabili in lunghezza. Che poi le rette A, & D ſiano incommenſurabili ſolamente in lunghezza, è chiaro; poiche, eſſendo il quadrato di A al quadrato di D, come il numero B al numero C, i quadrati delle due A, & D b ſaranno commenſurabili; e le rette A, & D, ſaranno commenſurabili in potenza, per la qual coſa le rette A & D ſono ſolamente incommenſurabili in lunghezza.



* queſto Lẽma manca per errore, però ſi caua dallo Scolio poſto nel fine del 9. lib.

a 9. del 10.

b 6. del 10.

Di nuouo, alla propoſta retta linea A s' habbia à ritrouare vna retta incommenſurabile in lunghezza, e potenza. Si troui, come prima, la retta D, che ſia incommenſurabile ſolamente in lunghezza alla retta A; poi c ſi troui vna media proportionale frà le rette A, & D, che ſia la notata E. Dico che la retta E è incommenſurabile alla retta A, in lunghezza, e potenza. Perche E, per coſtruttione, è media proportionale frà le due A, & D, la prima A alla terza D, per il Lemma ſettimo dopo la 18. del ſeſto, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla ſeconda E: mà il quadrato di A al quadrato di E hà la medeſima duplicata proportione di A ad E; ſarà il quadrato di A al quadrato di E, come A à D: ma le due A, & D, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono frà loro incommenſurabili in lunghezza, ſarà il quadrato di A incõmenſurabile al quadrato di E; e perciò i quadrati di A, ed E d ſono incommenſurabili, ed i lati A, & E ſaranno incommenſurabili in lunghezza. Per la qual coſa le rette A, ed E, ſono incommenſurabili in lunghezza, ed in potenza, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

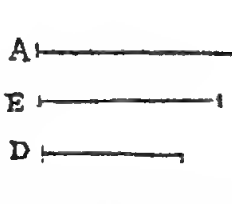
c 13. del 6.

d 10. del 10.

COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che, ſe la propoſta retta A ſarà quella retta linea, che, nella quinta definitione, fù chiamata Rationale, eſſendo D, per quel, che ſi è dimoſtrato, ſolamente commenſurabile in potenza alla Rationale A, ouero ſolamente incommenſurabile in lunghezza, ch'è l'iſteſſa coſa, ſarà, per la 6. defin. di queſto,

la retta D Rationale. Ed all'incontro, se stabiliremo la retta D come Rationale, essendo A commensurabile solamente in potenza à D, sarà ancora A Rationale. In oltre perche E, ch'è media proportionale frà le due A, & D, è incommensurabile alla retta A, tanto in lunghezza, come in potenza, sarà ancora incommensurabile in lunghezza, e potenza alla retta D. Poiche, essendo E media proportionale frà le due D, ed A, sarà il quadrato di D al quadrato di E, come D ad A: mà D è incommensurabile in lunghezza ad A, sarà il quadrato di D [c] incommensurabile al quadrato di E; per la qual cosa D, ed E saranno ancora incommensurabili in lunghezza, come si disse. Donde appare, che, se frà due rette linee, come A, & D, incommensurabili solamente in lunghezza, cioè commensurabili solamente in potenza, si troua vna media proportionale, come E, sarà E incommensurabile in lunghezza, e potenza, tanto alla retta A, quanto alla retta D: si che, determinata A, ouero D, come Rationale, sempre la media E sarà irrationale.

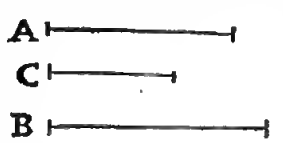


c 10. del 10.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XII.

Quelle grandezze, che sono commensurabili ad vna terza, saranno commensurabili frà di loro.

Sia la grandezza A, commensurabile alla grandezza C, e la grandezza B sia commensurabile alla medesima grandezza C. Dico che le grandezze A, & B, sono frà loro commensurabili. Perche A, & C si suppongono commensurabili, la proportione di A à C [a] sarà come quella, che hà il numero al numero; habbia dunque A à C la proportione, che hà il numero D al numero E. Similmente, perche le due C, & B sono commensurabili, hauerà C à B [b] la proportione, che hà il numero al numero: sia, per esempio, come il numero F al numero G. Si prendano [c] tre numeri, come H, K, L, che siano i minimi nelle proportioni di D ad E, e di F à G; cioè che H à K sia come D ad E, ouero A à C; e la proportione di K ad L



a 5. del 10.
b 5. del 10.
c 4. del 8.

sia

ſia come quella di F à G, cioè, come quella di C à B. Perche H à K è come A à C, e la proportione di K ad L è come quella di C à B, per il primo Corollario alla quinta propoſitione di queſto, ſarà per l'egualità, A à B come il numero H al numero L. Per la qual coſa le grandezze A, & B [f] ſono commenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi. f6.del 19.

SCOLIO.

Se le grandezze A, & B ſono rette linee, e le due A, & B ſono commenſurabili ſolamente in potenza alla retta C. Dico che le due A, & B ſono commenſurabili in potenza frà loro. Perche, l'antecedente propoſitione ſi è dimoſtrata in genere, ſe in luogo delle rette A, C, B ſi pongono i loro quadrati, ſarà manifeſto, da quel, che ſi è dimoſtrato, che i quadrati di A, & B, ſono commenſurabili; e perciò le rette A, & B ſono commenſurabili in potenza.

Se due grandezze ſono commenſurabili frà loro, ed vna di quelle ſia commenſurabile ad vna terza, l'altra ſarà ancora commenſurabile alla medeſima terza.

Siano le due A, & B, commenſurabili frà loro, ed A ſia commenſurabile à C. Dico che B ſarà commenſurabile alla medeſima C. Perche tanto B, quanto C, è commenſurabile ad A, per l'antecedente propoſitione, le due B, & C ſono frà loro commenſurabili.

A ——————
C ——
B ——————

THEOREMA X. PROPOSITIONE XIII.

Se vna di due grandezze è commenſurabile ad vna terza, e l'altra è incommenſurabile alla medeſima terza, quelle due ſono incommenſurabili.

Sia la grandezza A commenſurabile à C, e la grandezza B incommenſurabile alla medeſima C. Dico che le due A, & B ſono incommenſurabili. Se B, ed A non ſono incommenſurabili, ſarà B commenſurabile ad A; mà C è ſuppoſta commenſurabile alla medeſima A, le due B, & C [a] ſaranno commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque le due A, & B ſono commenſurabili; per la qual coſa B ſarà incommenſurabile ad A, ch'era da dimoſtrarſi.

A ——————
C ——
B ——————

a 12.del 20.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIV.

Se due grandezze ſono commenſurabili, ed vna di quelle ſia incommenſurabile ad vna terza, ancora l'altra ſarà incommenſurabile alla medeſima terza.

Siano le grandezze A, & B cõmenſurabili frà loro, e ſia A incommenſurabile à C. Dico che B ſarà incommenſurabile alla medeſima C. Se B non è incommenſurabile à C, ſarà C commenſurabile à B; ma, per ipoteſi, A è commenſurabile à B, le due A, C [a] ſaranno commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque B è commenſurabile à C, ma le due C, & B ſono incommenſurabili, come fù propoſto dimoſtrare.

a 12. del 10.

SCOLIO.

Da quel, che ſi è detto, facilmente ſi dimoſtra il ſeguente Theorema.

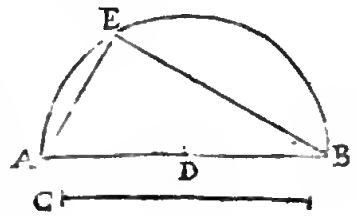
Quelle grandezze, che ſono commenſurabili alle incommenſurabili, ſono frà di loro incommenſurabili.

Siano le due grandezze A, & B incommenſurabili; e ſia C commenſurabile ad A, e la grandezza D ſia commenſurabile à B. Dico che le due C, & D ſono incommenſurabili. Perche le due C, ed A, per ipoteſi, ſono commenſurabili, ed A è incommenſurabile à B, per l'antecedente propoſitione, ſarà C incommenſurabile à B. Similmente perche D, & B, per ipoteſi, ſono frà loro commenſurabili, e ſi è dimoſtrata B incommenſurabile à C, per l'antecedente propoſitione, ſarà D incommenſurabile à C, ch'era da dimoſtrarſi.

LEMMA.

Date due rette linee ineguali, ritrouare di quanto la potenza della maggiore ſupera la potenza della minore.

Delle rette date ſia la maggiore AB, e la minore C, e ſi voglia ritrouare quanto la potenza, ò quadrato, di AB è maggiore della potenza, ò quadrato di C. Si diuida AB [a] in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, ſi deſcriua il mezzo circolo AEB, nel quale ſi addatti [b] la retta BE vguale alla retta C. Si tiri la retta AE. Dico che la potenza di AB ſupera la potenza di C per quanto è la potenza, ò quadrato di AE. Perche l'angolo AEB



a 10. del 1.

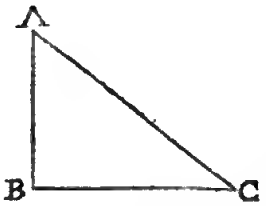
b 1. del 4.

nel

nel mezzo circolo [c] *è retto, ſarà il quadrato di AB* [d] *vguale à i quadrati de i lati BE, EA, e perciò il quadrato di AB ſupera il quadrato di BE, cioè di C, per il quadrato di AE, ch'era da dimoſtrarſi.*

[c] 3. del 3.
[d] 47. del 1.

Date due rette linee, ritrouare la retta, la di cui potenza ſia vguale alle potenze delle date.

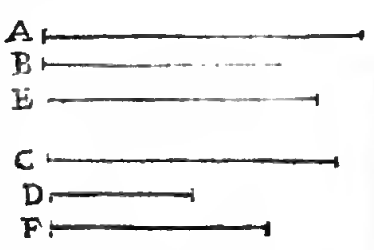


Siano le rette date AB, BC, e ſi voglia ritrouare la retta, il di cui quadrato, ò potenza, ſia vguale à i quadrati, ò potenze, delle due AB, BC. Si addattino le rette AB, BC, [e] *che facciano angolo retto ne gli eſtremi B; ſi tiri la retta AC. Eſſendo l'angolo B retto, il quadrato di AC* [f] *è vguale à i quadrati delle due AB, BC; cioè la potenza di AC è vguale alle potenze delle due AB, BC, ch'era da dimoſtrarſi.*

[e] 11. del 1.
[f] 47. del 1.

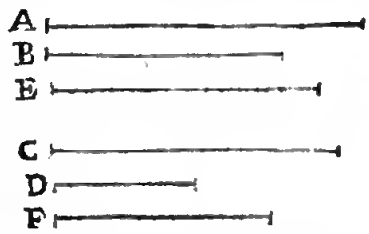
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XV.

Se quattro linee rette ſono proportionali, e la potenza della prima ſupera la potenza della ſeconda, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, commenſurabile in lunghezza alla prima; la potenza della terza ſuperarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, commenſurabile in lunghezza alla terza. E ſe la potenza della prima ſupera la potenza della ſeconda, per il quadrato di vna retta, incommenſurabile alla prima; la potenza ancora della terza ſuperarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, incommenſurabile alla terza.



Siano le quattro rette linee proportionali A, B, C, D, e la potenza della prima A ſuperi la potenza della ſeconda B, per il quadrato della retta E; e la potenza della terza C ſuperi la potenza della quarta D, per il quadrato della retta F. Dico che, ſe la retta E è commenſurabile in lunghezza alla prima A, ſarà ancora la retta F commenſurabile in lunghezza alla terza C; e ſe la retta E

è incommensurabile in lunghezza alla prima A, ancora la retta F sarà incommensurabile in lunghezza alla terza C. Perche il quadrato di A, per ipotesi, supera il quadrato di B per il quadrato di E, sarà E la differenza frà il quadrato di A, ed il quadrato di B; e per simile ragione, il quadrato di F sarà la differenza di quanto il quadrato di C supera il quadrato di D. In oltre, perche A à B è come C à D, sarà il quadrato di A [a] al quadrato di B, come il quadrato di C al quadrato di D; e, diuidendo, la differenza frà i quadrati di A, & B, cioè, il quadrato di E, al quadrato di B, [b] sarà come la differenza frà i quadrati di C, & D, cioè, il quadrato di F al quadrato di D: ed inuertendo, il quadrato di B al quadrato di E [c] sarà come il quadrato di D al quadrato di F. Hor perche il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato di D; ed il quadrato di B al quadrato di E è come il quadrato di D al quadrato di F, per l'egualità, il quadrato di A al quadrato di E [d] sarà come il quadrato di C al quadrato di F; e la proportione della retta A alla retta E [e] sarà come quella della retta C alla retta F. Se dunque la retta A è commensurabile in lunghezza alla retta E, sarà ancora la retta C [f] commensurabile in lunghezza alla retta F; e se la retta A è incommensurabile in lunghezza alla retta E, [g] sarà ancora la retta C incommensurabile in lunghezza alla retta F, come fù proposto dimostrare.



4 il quadra: to di.

a 22. del 6.
b 17. del 5.
c Corol. alla 4. del 5.
d 22. del 5.
e 22. del 6.
f 10. del 10.
g 10. del 11.

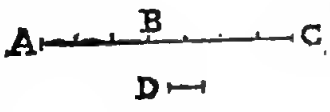
SCOLIO.

Nell'istesso modo si dimostrerà, che se A è commensurabile ad E, solamente in potenza, ancora C sarà commensurabile solamente in potenza alla retta F.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XVI.

La composta di due grandezze commensurabili è commensurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono: e se la composta è commensurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due saranno commensurabili frà loro.

Siano le due grandezze AB, BC commensurabili, le quali, giunte insieme, compongano la grandezza AC. Dico che la composta AC è commensurabile ad AB, ed è ancora commensurabile alla grandezza BC. Perche le due AB, BC sono cõmensurabili, per la 1. defin.



di

di queſto, haueranno vna commune miſura; ſia la loro commune miſura [a] la notata D. Perche D miſura AB, e miſura BC, miſurerà ancora [b] il tutto AC; hor eſſendo D commune miſura delle due AC, AB, ſaranno le due AC, AB [c] commenſurabili. Similmente perche D miſura AC, e miſura ancora BC, le due AC, BC ſaranno commenſurabili.

[a] 3. del 10.
[b] 1. aſſioma del 10.
[c] 1. aſſioma del 10.

Di nuouo ſia tutta AC commenſurabile ad AB, ouero BC; per eſſempio, ſia commenſurabile ad AB: Dico che le due AB, BC ſono commenſurabili. Sia D [d] la commune miſura delle due AB, AC; perche D miſura il tutto AC, e miſura la parte AB, miſurerà ancora [e] il rimanente BC; dal che D ſarà commune miſura delle due AB, BC; e perciò le due AB, BC ſono commenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi.

[d] 3. del 10.
[e] 9. aſſiom. del 10.

COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che quando la compoſta di due grandezze è commenſurabile ad vna di quelle, ſarà ancora commenſurabile al rimanente; cioè ſe AC è commenſurabile ad AB, la medeſima ſarà commenſurabile al rimanente BC, ſtante che ſe D miſura AC, e miſura AB, per il 9. aſſioma, miſura ancora il rimanente BC, e perciò le due AC, BC ſono commenſurabili.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVII.

La compoſta di due grandezze incommenſurabili è incommenſurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono; e ſe la compoſta di due grandezze è incommenſurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due, che la compongono, ſaranno incommenſurabili.

Siano prima le due grandezze AB, BC incommenſurabili, le quali, giunte inſieme, compongano la grandezza AC. Dico che AC ſarà incommenſurabile ad AB, ed ancora ſarà incommenſurabile à BC. Se AC non è incommenſurabile ad AB, ouero BC, ſarà AC commenſurabile ad vna delle due: ſia dunque AC commenſurabile ad AB, per l'antecedente Corollario, ſarà AC commenſurabile al rimanente BC; dal che le due AB, BC, [a] ſaranno commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque AC è commenſurabile ad AB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che AC è incommenſurabile à BC.

[a] 16. del 10.

Di nuouo ſia AC incommenſurabile ad vna delle componenti AB, BC, per eſſempio ſia incommenſurabile ad AB. Dico che le due AB, BC ſono incommenſurabili. Se le due AB, BC non ſono incommenſurabili,

ſa-

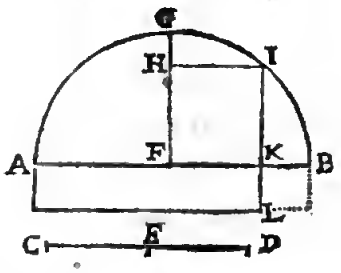
b 16.del 10. sarà AB commensurabile à BC, e tutta AC composta delle due AB, BC [b] sarà commensurabile ad AB, ouero BC, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le due AB, BC sono commensurabili, ma AB è incommensurabile à BC.

COROLLARIO.

Quindi è, che se la composta di due grandezze è incommensurabile ad vna delle componenti, sarà ancora incommensurabile all'altra; cioè, se AC è incommensurabile ad AB, sarà ancora incommensurabile al rimanente BC. Perche se AC fosse commensurabile à BC, per il Corollario all'antecedente propositione, sarebbe AC commensurabile ad AB, ch'è contro all'ipotesi; non dunque AC è commensurabile à BC.

LEMMA I.

Date due rette linee ineguali, applicare alla maggiore vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata.



Sia AB la maggiore, e CD la minore delle rette date, e si voglia alla maggiore AB applicare vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di CD, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà che manchi, à compire la retta AB, per vna figura quadrata. Si diuida CD [a] *in due parti vguali in E, sarà il quadrato di CE* [b] *la quarta parte del quadrato di CD; si diuida similmente AB in due parti vguali in F, e, fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, si descriua il mezo circolo AGB; nel punto F, sopra la retta AB* [c] *si erigga la perpendicolare FG; perche AB è maggiore di CD, sarà AF, ouero FG maggiore di CE. Si faccia FH* [d] *vguale à CE, e dal punto H si tiri la retta HI,* [e] *parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferenza AGB in qualche punto I; dal punto I si faccia cadere la retta IK,* [f] *perpendicolare ad AB; sarà IK* [g] *vguale ad HF; si continui IK*

a 10.del 1.
b Scol. alla 4. del 2.
c 11.del 1.
d 3.del 1.
e 31.del 1.
f 12.del 1.
g 34.del 1.

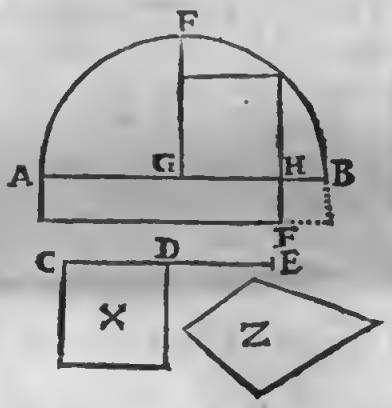
verso

verſo L, e ſi faccia KL [h] vguale à KB, e ſi compiſca il rettangolo AL; ſarà il rettangolo AL applicato ad AB, e manca à compire la linea AB per il quadrato LB (ſtante che LK è vguale à KB) Dico che il rettangolo AL è vguale alla quarta parte del quadrato di CD. Perche IK [l] è media proportionale frà le due AK, KB, ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AK, KB, [m] vguale al quadrato di IK: ma il rettangolo AL è vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AK, KB, ſtante che LK è vguale à KB; ſarà il rettangolo AL vguale al quadrato di IK, ouero di FH, cioè vguale al quadrato di CE; ma il quadrato di CE [n] è la quarta parte del quadrato di CD; ſarà il rettangolo AL vguale alla quarta parte del quadrato di CD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

h 3. del 1.
l 13. del 6.
m 17. del 6.

LEMMA II.

Diuidere vna data retta linea talmente, che il rettangolo contenuto dalle parti ſia vguale ad vn dato rettilineo.



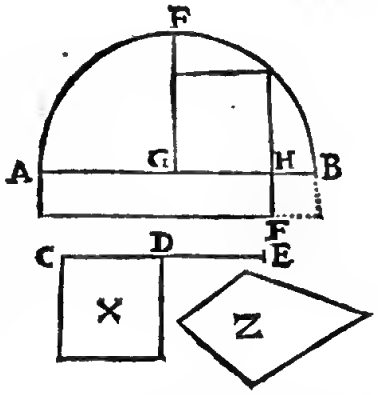
Sia data la linea retta AB, ed il rettilineo Z, e ſi voglia diuidere la retta AB in modo, che il rettangolo, contenuto dalle parti, ſia vguale al rettilineo Z. Si faccia il quadrato X [a] vguale al rettilineo Z, ſi continui il lato CD verſo E, e ſi faccia DE [b] vguale al lato CD, ſarà il quadrato X [c] la quarta parte del quadrato di CE. Se la retta CE non è minore di AB, il problema ſarà impoſſibile, ſtante che, douendoſi operare come nell'antecedente Lemma, CD non ſarà minore di FG. Se poi CE ſarà minore di AB, ſi applichi ad AB, per l'antecedente Lemma, il rettangolo AF, vguale al quadrato X, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come per eſſempio, per il quadrato FB; ſara diuiſa la retta AB in H. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB è vguale al rettilineo Z. Perche la mancanza FB è quadrato, ſarà FH vguale ad HB; dal che il rettangolo AF, ſarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle parti AH, HB; ma il rettangolo AF è vguale, per coſtruttione, al quadrato X, cioè al rettilineo Z; ſarà il rettangolo

a 14. del 2.
b 3. del 1.
c Scol. alla 4. del 2.

contenuto dalle parti AH, HB, vguale al rettilineo Z, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che, applicato ad vna retta linea, come AB, vn rettangolo, per essempio, AF, vguale ad vn dato rettilineo Z, ouero X, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, come FB, per questa applicatione sarà diuisa la linea AB talmente in H, che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB, sarà vguale al rettilineo Z, ouero X; stante che si è dimostrato, che il rettangolo applicato AF è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AH, HB.



LEMMA III.

Se alla maggiore di due rette ineguali sia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; le parti, fatte nella maggior linea dalla proposta applicatione, saranno frà di loro ineguali.

Siano le rette ineguali, cioè AB maggiore, e la minore CD, la quale sia diuisa in due parti vguali in F; e sia applicato alla maggiore AB [a] *vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato di CD; cioè* [b] *vguale al quadrato di CF, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come il quadrato di EB; per questa fatta applicatione sarà diuisa la retta AB in due parti, come AE, EB. Dico che le parti AE, EB sono frà di loro ineguali. Se non sono ineguali, sarà AE vguale ad EB, dal che il quadrato di AB* [c] *sarà il quadruplo del quadrato di AE, ouero EB. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, per quel, che si è di-*

a lem. 2.

b Scol. alla 4. del 2.

c Scol. alla 4. del 2.

mostra-

moſtrato ne i due antecedenti Lemma, è vguale al quadrato di CF; eſſendo il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di CF, il medeſimo quadrato di CD ſarà il quadruplo del rettangolo contenuto dalle due AE, EB: ma il rettangolo, contenuto dalle due AE, EB, è vguale al quadrato di EB (ſtante che EB è ſuppoſta vguale ad AE) ſarà il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di EB; fù dimoſtrato il quadrato di AB eſſere il quadruplo del medeſimo quadrato di EB; il quadrato dunque di CD ſarà vguale al quadrato di AB, ed il lato CD ſarà vguale al lato AB, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque la parte AE è vguale ad EB, ma ſono frà di loro ineguali, ch'era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

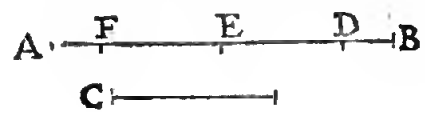
Perche EB è il lato di quel quadrato, che rappreſenta la mancanza per compire la linea, ſarà manifeſto che EB è la minor parte, & AE la maggiore.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVIII.

Se ſaranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata: ſe le parti della maggior linea ſono commenſurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea commenſurabile in lunghezza alla propoſta maggiore. E ſe il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſa maggior linea; applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta, ſarà diuiſa la maggiore in due parti commenſurabili in lunghezaa.

Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore C, ed alla maggiore AB, per il primo Lemma, ſia applicato vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la linea AB, ma, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e ſia per

essempio, la mancanza per quanto è il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico prima, che se le parti AD, DB sono commensurabili in lunghezza, il quadrato di AB superarà il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla maggiore AB.



Perche la retta AB dalla fatta applicatione è diuisa nelle parti AD, DB, per il Coroll. dopo il Lemma 3. sarà AD maggiore di DB; e per il Lemma 2. e suo Corollario, il rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, sarà vguale alla quarta parte del quadrato della retta C; e perciò il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, sarà vguale al quadrato della retta C. In oltre, essendo AD maggiore di DB, si diuida la retta AB [a] in due parti vguali in E, il punto E caderà frà li punti A, & D; ed il quadrato di AB [b] sarà il quadruplo del quadrato di EB; cioè il quadruplo quadrato di EB è vguale al quadrato di AB; si faccia EF [c] vguale ad ED, restarà DB vguale ad AF, ed il quadrato di FD [d] sarà il quadruplo del quadrato di ED; cioè il quadruplo quadrato di ED è vguale al quadrato di FD. Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in D, sarà il rettangolo contenuto dalle parti ineguali AD, DB, [e] col quadrato di ED, vguale al quadrato di EB; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadruplo quadrato di ED, sarà vguale al quadruplo quadrato di EB; ma il quadruplo quadrato di EB è dimostrato vguale al quadrato di AB; ed il quadruplo quadrato di ED è mostrato vguale al quadrato di FD; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di FD, vguale al quadrato di AB: fù dimostrato, che il quadruplo rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, è vguale al quadrato di C; il quadrato dunque della retta C, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di AB; e perciò il quadrato di AB supera il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato di FD. Dico che FD è commensurabile in lunghezza ad AB. Perche AF è vguale à DB, la composta delle due AF, DB, sarà il doppio di DB; e perciò la composta delle due AF, DB sarà commensurabile in lunghezza alla retta DB. In oltre perche le due AD, DB, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza, sarà tutta AB [f] commensurabile in lunghezza alla parte DB: ma la composta delle due AF, DB, è commensurabile in lunghezza alla medesima DB; sarà tutta AB [g] commensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB. Hor essendo tutta AB commensurabile in lunghezza alla retta composta delle due AF, DB, per il Corollario alla 16. propositione di questo, sarà tutta AB commensurabile in lunghezza al rimanente FD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che il quadrato di AB superi il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB; applicato alla maggiore AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che

a 10. del 1.
b Scol. alla 4. del 2.
c 3. del 1.
d Scol. alla 4. del 2.
e 5. del 2.
f 16. del 10.
g 12. del 10.

manchi

manchi à compire la linea AB per vna figura quadrata, ſarà diuiſa la retta AB come in D. Dico che le parti AD, DB ſono commenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come prima ſi fece, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD. Perche il quadrato di AB, per ipoteſi, ſupera il quadrato di C per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza ad AB, ed il quadrato di AB, per quel, che ſi è dimoſtrato, ſupera il quadrato di C per il quadrato di FD; perciò AB ſarà commenſurabile in lunghezza alla retta FD; e, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, la retta AB ſarà commenſurabile in lunghezza al rimanente AF, DB; cioè alla compoſta delle due AF, DB: mà la retta DB, come ſopra ſi diſſe, è commenſurabile in lunghezza alla medeſima retta, compoſta delle due AF, DB; in conſeguenza le due AB, BD, [h] ſono commenſurabili in lunghezza; e perche tutta AB, (ch'è compoſta delle due AD, DB) è commenſurabile in lunghezza ad vna di quelle, cioè alla retta AB; le due AD, DB [K] ſono commenſurabili in lunghezza, ch'era da dimoſtrarſi. h 12. del 10. K 16. del 10.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XIX.

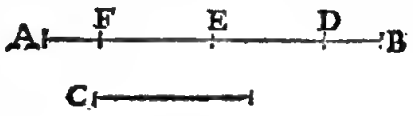
Se ſaranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; ſe le parti della maggior linea ſono incommenſurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea ſuperarà il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, incommenſurabile in lunghezza alla propoſta maggior linea. E ſe il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza ad eſſa maggiore linea; applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta ſarà diuiſa la maggiore in due parti, incommenſurabili in lunghezza.

Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore ſia C; ed alla maggiore AB, per il primo Lemma all' antecedente propoſitione, ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e la mancanza ſia, per

eſſem-

essempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico prima che, se le parti AD, DB, sono incommensurabili in lunghezza, il quadrato di AB superarà il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla retta AB.

Si faccia la costruttione della precedente propositione, e si proui, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD: si proui ancora, che la composta delle due AF, DB, è commensurabile alla retta DB. Perche le rette AD, DB, per ipotesi, sono incommensurabili in lunghezza, sarà tutta AB [a] incommensurabile in lunghezza alla parte DB: ma DB, per quel, che si è detto, è commensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB; sarà tutta AB [b] incommensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB; e per il Corollario alla 17. propositione, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente FD; mà il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD, essendosi dimostrata FD incommensurabile in lunghezza ad AB, il quadrato di AB superarà il quadrato di C, per quanto è il quadrato d'vna retta, come è FD, incommensurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Di nuouo, sia il quadrato di AB maggiore del quadrato di C, per quanto è vna retta incommensurabile in lunghezza ad AB; e sia applicato ad AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di C, in modo, che manchi à compire la linea AB, per quanto è vna figura quadrata, e la mancanza sia, per essempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico che le parti AD, DB sono incommensurabili in lunghezza. Suppostà la medesima costruttione dell'antecedente propositione, si dimostrerà, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD; si che, per ipotesi, AB sarà incommensurabile in lunghezza alla retta FD, e, per il Corollario alla propositione 17, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente AF, DB, cioè alla composta delle due AF, DB: mà, per quel, che si disse nella dimostratione dell'antecedente propositione, la composta delle due AF, DB, è commensurabile in lunghezza alla retta DB; sarà la retta AB [c] incommensurabile in lunghezza alla retta DB. Hor se tutta la retta AB (ch'è composta delle due AD, DB) è incommensurabile ad vna, cioè à DB, saranno le due AD, DB, [d] incommensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi.

a 17. del 10.
b 14. del 10.
c 14. del 10.
d 17. del 10.

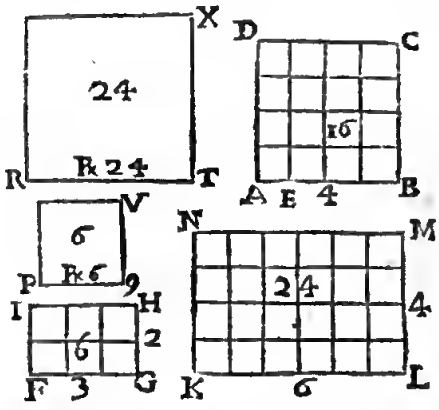
SCOLIO I.

Sin qui Euclide hà trattato delle grandezze commensurabili, ed incommensu-

menſurabili frà di loro, e conſeguentemente s'inoltra à trattare delle grandezze comparate alla Rationale, ſpiegata nella definitione quinta di queſto, che ſono quelle grandezze, che ſi dicono Rationali, o Irrationali, ſecondo che ſono commenſurabili, ò incommenſurabili alla detta Rationale. E per maggior chiarezza, deueſi auuertire, che in due modi Euclide conſidera la commenſurabilità, ed incommenſurabilità delle grandezze; cioè, ò conſidera la commenſurabilità, ed incommenſurabilità delle grandezze, comparate frà di loro; ouero le conſidera comparate alla Rationale, della quale pienamente fù parlato dopo la ſettima definitione di queſto. La commenſurabilità, ed incommenſurabilità delle grandezze frà di loro (del che hà trattato ſino à queſto luogo) la nomina con le medeſime voci di commenſurabile, ed incommenſurabile; quella poi, che riguarda la comparatione alla Rationale (della quale ſi parlerà nelle coſe ſeguenti) l'eſprime con le voci denominate dalla medeſima Rationale; cioè, quelle rette, che ſono commenſurabili in lunghezza alla Rationale, che per la nona propoſitione, ſono ancora commenſurabili in potenza, le chiama Rationali in lunghezza, e potenza; e quelle rette, che alla Rationale ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſi dicono Rationali in potenza ſolamente; e quelle rette, che alla Rationale ſono incommenſurabili in potenza, le quali, per la nona propoſitione di queſto, ſono ancora alla medeſima Rationale incommenſurabili in lunghezza, le chiama Irrationali. Donde è manifeſto, che due riguardi cadono nelle comparationi, cioè, uno è quello della comparatione frà di loro, e l'altro della comparatione riſpetto alla Rationale. Quanto à quello, che ſi fà nella comparatione frà di loro, ſi eſprime con le voci di Commenſurabili in lunghezza, e potenza; ò di Commenſurabili in potenza ſolamente; ouero d'Incommenſurabili in lunghezza, e potenza, ſecondo che ſaranno, ò non ſaranno commenſurabili frà di loro. Quello poi, che ſi farà nella comparatione, riſpetto alla Rationale, ſi eſprimerà con le voci di Rationali in lunghezza, e potenza; ò di Rationali ſolamente in potenza; ouero d'Irrationali in lunghezza, e potenza, ſecondo che ſaranno commenſurabili, ò incommenſurabili alla Rationale. Nota, che quando le rette linee ſono alla Rationale commenſurabili ſolamente in potenza, cioè, quando le rette linee, comparate alla Rationale, non ſono commenſurabili in lunghezza, mà ſono ad eſſa Rationale ſolamente commenſurabili in potenza, all' hora queſti due riguardi s'vniſcono inſieme, in modo, che, ſe le rette linee, commenſurabili ſolamente in potenza alla Rationale, ſaranno commenſurabili frà di loro in lunghezza, quelle ſi chiameranno Rationali in potenza, e commenſurabili frà di loro in lunghezza: ſe poi ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza alla Rationale, ed ancora ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza frà di loro; ſi chiameranno Rationali in potenza, ed ancora commenſurabili frà di loro in potenza.

Quindi è, che i numeri ſordi, cioè quelli, da i quali non ſi può eſtrarre la radice, ò lato, ſenza che ſoprauanzi coſa alcuna, comparati frà di loro, poſſono eſſere commenſurabili in lunghezza, e per la nona di queſto, commenſurabili ancora in potenza; e, comparati alla Rationale, poſſono ancora eſſere incommenſurabili in lunghezza, e commenſurabili in potenza; e, ſecondo queſto caſo, quei numeri ſordi ſi dicono Rationali in potenza, e commenſurabili frà di loro in lunghezza, e potenza; come per eſſempio. Sia eſpoſta la

Ra-



Rationale AB, espressa col numero 4; cioè, che consti di quattro vnità determinate, il di cui quadrato ABCD constarà di 16. vnità quadrate; e sarà il quadrato AC, per la 5. definitione, Rationale, al quale deuono essere comparati gli altri piani; ciò fatto, si multiplichi vna delle vguali parti, ò vnità, che sono in AB, quanto si vuole, e produca, per essempio, la retta, ò numero FG. Perche l'vnità AE, per costruttione, è commune misura delle due AB, FG; sarà FG commensurabile in lunghezza alla rationale AB; e per la definitione 6. di questo, FG sarà Rationale. Nel punto G si erigga la retta GH perpendicolare ad FG; si faccia GH multiplice di AE in modo, che sia maggiore, ò minore di FG; sarà GH commensurabile ad AB, e perciò sarà Rationale; co' i lati FG, GH sia fatto il piano rettangolo GI. Perche i lati FG, GH, constano di parti vguali ad AE, ogn'vna delle vnità quadrate, che compongono il piano FH, sarà vguale à ciascuna delle vnità quadrate, che compongono il Rationale AC; e perciò il quadrato di AE sarà commune misura de i piani FH, AC: mà AC è Rationale, sara FH ancora Rationale. Si esponga poi il piano rettangolo KM, in modo, che il lato KL sia il doppio di FG; ed LM sia il doppio di GH; sarà FG à GH, come KL ad LM; dalche i piani FH, KM saranno frà di loro simili. In oltre, perche AE misura FG, e per costruttione, FG misura KL, l'vnità AE misurerà KL; e perciò KL è commensurabile alla Rationale AB, e per la 6. definitione, KL sarà Rationale. Nell'istesso modo si proverà, che LM è Rationale, e sarà il piano KM commensurabile al rationale AC; e per la 9. definitione, il piano KM sarà Rationale. Di più perche FG à GH e come KL ad LM, e per costruttione, FG è ineguale ad HG, sarà KL ineguale ad LM; e per la definitione 18. del 7. Libro, i piani FH, KM non sono numeri quadrati; per la qual cosa i loro lati non sono esprimibili, rispetto alle vnità determinate nella Rationale AB, ma si considerano sordamente; come i notati PQ, RT, i di cui quadrati siano i notati PV, RX; sarà PV vguale al piano FH, e sarà RX vguale à KM: ma i due FH, KM, per quel, che si è dimostrato, sono commensurabili al Rationale AC, saranno i due PV, RX, commensurabili al Rationale AC: ma i lati PQ, RT, non essendo esprimibili, rispetto alle vnità della Rationale AB, perciò sono incommensurabili ad AB. Hor essendo i lati PQ, RT, incommensurabili in lunghezza ad AB, e le potenze PV, RX sono commensurabili al Rationale AC; i lati PQ, RT saranno quelli, che si dicono Rationali solamente in potenza alla proposta Rationale AB.

Finalmente perche i piani KM, FH sono frà loro simili, sarà il piano KM al piano FH, come il quadrato del lato KL al quadrato del lato FG; mà il quadrato di KL è il quadruplo del quadrato di FG (per essere KL il dop-

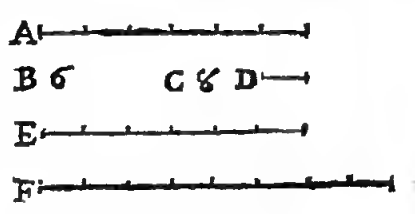
pio

pio di FG) ſarà il piano KM il doppio del piano FH: ma KM è vguale ad RX, ed il piano FH è vguale à PV; ſarà il quadrato RX il quadruplo del quadrato PV; ed il lato RT ſarà il doppio del lato PQ: dal che i lati RT, PQ ſono commenſurabili in lunghezza, e la commune miſura ſarà PQ; e ſono ancora commenſurabili in potenza, ſtante che VP miſura quattro volte RX. D'onde è manifeſto, che i numeri ſordi PQ, RT, comparati frà di loro, ſenza hauere relatione alla Rationale AB, ſono commenſurabili in lunghezza, e potenza; ma, comparati alla Rationale AB, ſi dicono Rationali ſolamente in potenza, ed irrationali in lunghezza: auuertendo ſempre, che queſta voce di Rationale, ed Irrationale, hà ſempre relatione alla comparatione, riſpetto la Rationale propoſta; cioè, riſpetto alle vnità determinate nella Rationale AB; e non hà relatione alla comparatione frà di loro; perche, quando ſi fà la comparatione frà di loro, e non riſpetto alla Rationale, le loro relationi ſi eſprimono con le voci di Commenſurabili, ed Incommenſurabili.

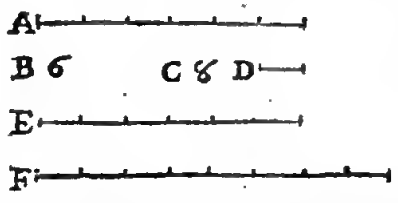
SCOLIO IL

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che le rette commenſurabili in lunghezza frà di loro, ò ſono commenſurabili in lunghezza alla propoſta Rationale, come ſono le notate FG, GH, KL, LM, le quali ſono commenſurabili in lunghezza frà di loro, e ſono ancora commenſurabili in lunghezza alla Rationale AB; ouero ſono alla Rationale commenſurabili ſolamente in potenza, come ſono i lati PQ, RT, i quali ſono commenſurabili in lunghezza frà di loro, e ſono ſolamente commenſurabili in potenza alla Rationale AB; e queſte ſempre ſi chiamano Rationali; cioè, ſe ſono commenſurabili in lunghezza alla Rationale, ſi dicono Rationali in lunghezza, e ſe ſono commenſurabili ſolamente in potenza alla Rationale, ſi dicono Rationali in potenza. E perche due rette, Rationali in lunghezza, poſſono eſſere ambedue ineguali alla eſpoſta Rationale; e può eſſere, che vna di quelle due ſia vguale alla Rationale; perciò le dette Rationali ſi poſſono diuidere in tre generi. Il primo de' quali è, quando vna di due rette, commenſurabili in lunghezza frà di loro, e commenſurabili in lunghezza alla Rationale, è vguale alla medeſima Rationale. Il ſecondo genere è quando di due rette, commenſurabili in lunghezza frà di loro, e commenſurabili in lunghezza alla Rationale, niſſuna è vguale alla detta Rationale. Ed il terzo genere è, quando due rette ſono commenſurabili in lunghezza frà di loro, e ſono alla Rationale ſolamente commenſurabili in potenza. E queſti tre generi di Rationali ſi poſſono trouare, come fà il P. Clauio nel ſeguente modo.

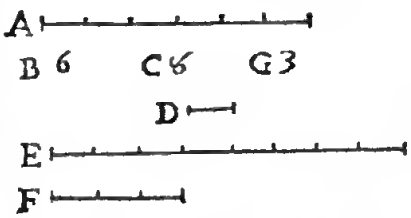
Siano preſi due qualunque numeri ineguali B, & C, e ſia eſpoſta la Rationale A; diuiſa in tante vguali parti, per quante vnità ſono nel numero B. Si eſponga poi la retta D, vguale ad vna delle parti, che ſono nella Rationale A; e ſi prenda E, multiplice di D,



come la Rationale A è multiplice della medeſima D ; e ſi prenda la retta F , in modo , che ſia miſurata da D tante volte , per quante vnità ſono nel numero C . Perche A , ed E ſono vguali multiplici di D , ſaranno in E tante parti vguali à D , per quante ne ſono in A ; e perciò le due A , ed E ſono frà di loro vguali ; ma la retta D , per coſtruttione , è commune miſura delle tre A , E , F ; le tre rette dunque A , E , F ſono commenſurabili in lunghezza , e perciò le due E , ed F ſono commenſurabili in lunghezza frà di loro , e ſono commenſurabili in lunghezza alla Rationale A ; e per la 6. definitione , ſono Rationali . Si è dimoſtrata la Rationale E , vguale alla eſpoſta Rationale A ; ſi ſaranno dunque ritrouate le due Rationali E , ed F , commenſurabili in lunghezza frà di loro , e commenſurabili in lunghezza alla Rationale A ; & vna di eſſe , come E , ſarà vguale alla Rationale A . E queſte ſono quelle Rationali , che habbiamo chiamate del primo genere .



Siano di nuouo eſpoſti tre numeri ineguali , come B , C , G , e ſia la Rationale A diuiſa in tante parti vguali , per quante vnità ſono in B ; e ſia D vna di quelle parti . Si prendano poi le rette E , F , in modo , che E ſia miſurata da D tante volte , per quante vnità ſono nel numero C ; e la retta F ſia miſurata da D tante volte , per quante vnità ſono nel numero G ; ſaranno le rette E , F ineguali alla Rationale A . E perche D è commune miſura delle rette A , E , F , ſaranno le rette A , E , F , commenſurabili in lunghezza ; e perciò le rette E , F ſono commenſurabili in lunghezza alla Rationale A , e per la 6. definitione , le rette E , F ſono Rationali . Si ſaranno dunque ritrouate le Rationali E , F , commenſurabili in lunghezza frà di loro , e commenſurabili in lunghezza alla Rationale A ; e niſſuna delle due E , F , è vguale alla eſpoſta Rationale A . E queſte ſono le Rationali del ſecondo genere .



Finalmente ſia eſpoſta la Rationale A , alla quale , per l'vndecima di queſto , ſi troui la retta B , commenſurabile ſolamente in potenza ; ſi diuida la retta B in quante parti vguali ſi vuole , ed vna di quelle parti ſia D ; ſi prenda C , multiplice di D , ſecondo qualunque multiplicatione , ſarà D commune miſura delle due B , & C ; e perciò le due B , & C ſono frà loro commenſurabili in lunghezza ; e per la 9. propoſitione d. queſto , ſono ancora frà loro commenſurabili in potenza ; cioè i loro quadrati ſono frà loro commenſurabili . Dico che le due B , & C ſono alla Rationale A commenſurabili ſolamente in

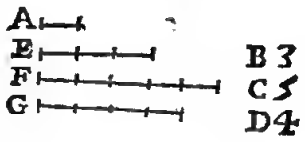
poten-

potenza. Perche il quadrato di B, per coſtruttione, è commenſurabile al quadrato di A; ſarà il quadrato di C [a] *commenſurabile al quadrato di A; dal che C ſarà Rationale in potenza ad A. In oltre perche le rette C, & B ſono commenſurabili in lunghezza, e la retta B, per coſtruttione, è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale A; ſarà* [b] *ancora la retta C incommenſurabile in lunghezza alla Rationale A; ed haueremo ritrouate le due Rationali C, & B, frà di loro commenſurabili in lunghezza, e commenſurabili ſolamente in potenza alla Rationale A. E queſte ſono le Rationali del terzo genere, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.*

a 12. del 10.

b 14. del 10.

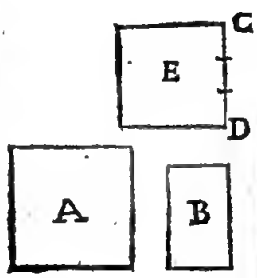
Volendoſi ritrouare quante ſi voglia linee Rationali commenſurabili frà loro in lunghezza, ſi operi in queſto modo. Si eſpongano tanti numeri B, C, D, per quante ſono le Rationali da trouarſi, e ſi prendano altrettante rette E, F, G, multiplici di A, in modo, che la retta E contenga tante volte A, per quante vnità ſono nel numero B, ſi faccia ſimilmente che la retta F contenga tante volte A, per quante vnità ſono nel numero C, e che la retta G contenga tante volte A, per quante vnità ſono nel numero D; eſſendo A commune miſura delle rette E, F, G, ſaranno le rette E, F, G, commenſurabili frà loro in lunghezza, e ſaranno Rationali, ſtante che ſono commenſurabili alla Rationale A.



LEMMA.

Quello ſpatio, ch'è commenſurabile allo ſpatio Rationale, è ancora Rationale.

Sia lo ſpatio A Rationale, al quale ſia commenſurabile lo ſpatio B. Dico che lo ſpatio B è Rationale. S'intenda CD la Rationale, alla quale deuono eſſere comparate le altre grandezze, il di cui quadrato ſia E; per l'ottaua definitione di queſto, ſarà il quadrato E quello, che chiamiamo Rationale, al quale deuono eſſere comparati gli altri piani. Perche lo ſpatio B è ſuppoſto Rationale, ſarà dunque B [a] *Rationale riſpetto al Rationale E, e perciò i due B, & E, ſono commenſurabili. In oltre, perche gli ſpatij E, ed A ſono commenſurabili al medeſimo ſpatio B, ſarà A* [b] *commenſurabile al Rationale E; e, per la 6. definitione di queſto, lo ſpatio A ſarà Rationale, ch'era da dimoſtrarſi.*



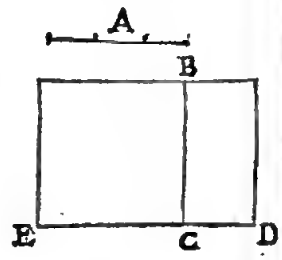
a 9. defin. del 10.

b 12. del 10.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XX.

Il rettangolo, contenuto da linee rette Rationali in lunghezza, e commenſurabili ſecondo qualch'vno de i modi ſopradetti, ſarà Rationale.

Sia eſpoſta la Rationale A, e lo ſpatio rettangolo BD, il quale ſia contenuto dalle rette Rationali in lunghezza BC, CD, e commenſurabili ſecondo vno de i tre predetti modi, ſpiegati nel ſecondo de gli antecedenti Scolij; cioè, che l'vno, ò l'altro de i lati, BC, CD, ſia vguale all' eſpoſta Rationale A; ò che niſſuno di eſſi ſia vguale alla Rationale A; mà che ambidue ò ſiano commenſurabili in lunghezza, ò commenſurabili ſolamente in potenza alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD ſarà Rationale. Sopra vno de i lati BC, CD, per eſſempio, ſopra al lato BC, [a] ſi deſcriua il quadrato EB. Perche la retta BC, per ipoteſi, è Rationale, ſarà BC commenſurabile, ò in lunghezza, ò ſolamente in potenza all' eſpoſta Rationale A: per la qual coſa il quadrato di BC, cioè il quadrato EB, [b] ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale A: mà il quadrato della Rationale A [c] è quel Rationale, riſpetto al quale, tutti gli altri ſpatij, che gli ſono commenſurabili, ſono Rationali; eſſendo il piano EB, commenſurabile al quadrato della Rationale A, ſarà il quadrato EB [d] Rationale. In oltre, perche BC, come lato del quadrato BE, è vguale ad EC, e la retta BC, per ipoteſi, è commenſurabile in lunghezza al lato CD, ſarà EC commenſurabile in lunghezza al medeſimo lato CD. Si conſiderino i rettangoli EB, BD, i quali hanno la medeſima altezza BC; ſarà il rettangolo EB al rettangolo BD, [e] come la baſe EC alla baſe CD, mà EC è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza al lato CD, ſarà il piano EB [f] commenſurabile al piano BD. E perche il quadrato EB è dimoſtrato Rationale, il rettangolo BD, ch'è commenſurabile allo ſpatio Rationale EB, per l'antecedente Lemma, ſarà Rationale, il che era da dimoſtrarſi.



a 46. del 1.
b 3. defin. del 10.
c 8. defin. del 10.
d 9. defin. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.

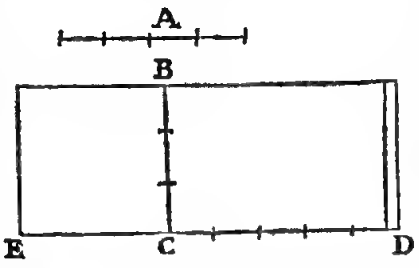
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXI.

Se vn rettangolo Rationale ſarà applicato ad vna retta Rationale; l'altro lato ſarà Rationale, e ſarà ancora commenſurabile in lunghezza à quel lato, al quale è fatta l'applicatione.

Sia eſpoſta la Rationale A, alla quale tutte le altre ſi comparano; e ſia data la retta BC Rationale, ſecondo vno de i tre detti modi, ſpie-

gati

gati nello Scolio secõdo alla 19. propositione di questo; cioè che ò BC sia vguale, ò non vguale alla Rationale A, sia però ò commensurabile in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, alla esposta Rationale A, e si applichi alla rationale BC il rettangolo Rationale BD, e ne risulti il lato CD. Dico che il lato CD è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza al lato BC. Sopra al lato BC [a] si descriua il quadrato EB. Essendo BC, per ipotesi, Rationale, dimostraremo, come nell'antecedente propositione si fece, che il quadrato EB è Rationale. Hor essendo BD, per ipotesi, Rationale, ed il quadrato EB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; saranno gli spatij BE, BD [b] commensurabili al quadrato della Rationale A; e perciò i rettangoli EB, BD, [c] sono commensurabili frà loro. In oltre perche i rettangoli EB, BD, hanno la medesima altezza BC, sarà il quadrato EB al rettangolo BD, come la base EC, ouero BC, alla base CD: mà il quadrato EB è dimostrato commensurabile al rettangolo BD; sarà BC [d] commensurabile alla retta CD; dal che le rette BC, CD sono frà loro commensurabili in lunghezza. E perche le Rationali CB, ed A, sono commensurabili ò in lunghezza, ouero commensurabili solamente in potenza; essendo CB commensurabile à CD, sarà ancora A [e] commensurabile à CD ò in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza. Hor essendo CD commensurabile alla rationale A ò in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, per la sesta definitione di questo, sarà CD Rationale. Per la qual cosa, applicato il piano Rationale BD al lato Rationale BC, ne risulta il lato CD Rationale, e commensurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimostrarsi.

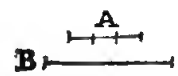


a 46. del 1.
b 9. defin. del 10.
c 12. del 10.
d 10. del 10.
e 18. del 10.

LEMMA I.

Il lato di qualunque quadrato, vguale à qualche spatio Irrationale, è Irrationale.

Sia il quadrato di qualche retta linea B vguale à qualche spatio Irrationale, cioè, che sia Irrationale. Dico che la retta linea B è ancora Irrationale. Si esponga la Rationale A. Se la retta linea B non è Irrationale, quella necessariamente sarà Rationale, e per la sesta definitione, sarà commensurabile ad A ò in lunghezza, ouero solamente in potenza, e perciò il quadrato della retta B sarà commensurabile al quadrato della Rationale A; e per la



nona definitione, il quadrato di B sarà Rationale, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque la retta linea B è Rationale, mà sarà Irrationale, ch'era da dimostrarsi.

Il medesimo si caua dalla definitione vndecima di questo, doue si disse, che le rette linee, i di cui quadrati sono Irrationali, si chiamano Irrationali.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto nell'antecedente Lemma, e da quel, che si disse nella dimostratione alla 20. propositione, si caua, che il quadrato d'vna retta Rationale è Rationale.

LEMMA II.

Ritrouare due, ò più rette, Rationali, commensurabili solamente in potenza.

Le rette Rationali, che sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, sono di due generi; cioè, ò vna di quelle è vguale all'esposta Rationale, ò ambedue sono ineguali alla detta Rationale. Habbiansi prima da trouare quelle del primo genere; cioè quelle, delle quali vna è vguale all'esposta Rationale. Sia dunque l'esposta Rationale A, e sia la retta B vguale ad A. Poi si troui la retta C, [a] *commensurabile solamente in potenza alla retta B; sarà ancora C commensurabile solamente in potenza alla Rationale A; e per la sesta definitione di questo, sarà la retta C Rationale: mà B, per essere vguale ad A, è ancora Rationale; le due dunque B, C, sono Rationali, e sono commensurabili solamente in potenza, delle quali B è vguale alla Rationale A, ch'era da farsi nel primo luogo.*

a 11.del 10.

Per trouare quelle del secondo genere; cioè, che nissuna delle due sia vguale all'esposta Rationale. Sia di nuouo esposta la Rationale A, e si troui la retta B, [b] *commensurabile solamente in potenza alla Rationale A, per la sesta definitione di questo, B sarà Rationale. Similmente si troui la retta C,* [c] *commensurabile solamente in potenza alla retta B. Perche A, & B,*

b 11.del 10.

c 11.del 10.

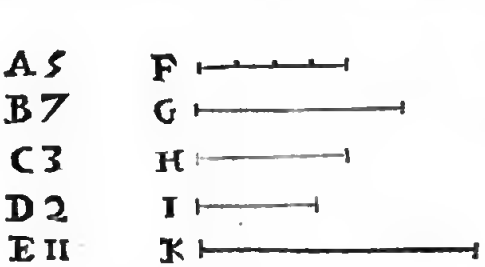
sono

ſono commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, e la retta B, per coſtruttione, è commenſurabile à C ſolamente in potenza; ſarà A [d] *commenſurabile à C ſolamente in potenza. Hor eſſendo C commenſurabile ad A, ſolamente in potenza, per la ſeſta definitione, C ſarà Rationale. Per la qual coſa le due B, & C ſono Rationali, e ſono commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, delle quali niſſuna è vguale alla Rationale A, come fù propoſto ritrouare.*

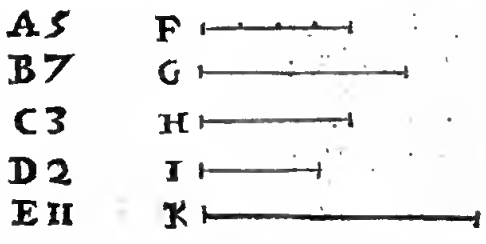
d Scol. alla 12. propoſ. del 7.

Biſognando poi ritrouare quante rette Rationali ſi vogliano, commenſurabili ſolamente in potenza, ſi operi nel ſeguente modo.

Si eſpongano tanti numeri primi, per quante rette Rationali ſi vogliano, come ſono i numeri A, B, C, D, E; poi ſi prenda la Rationale F, e ſi faccia come il numero A al numero B, così il quadrato di F al quadrato di vn altra rètta, che ſia G, come ſi diſſe nel Corollario alla ſeſta propoſitione di queſto. Di nuouo ſi faccia come il numero B al numero C, così il quadrato di G al quadrato d'vn altra retta, che ſia H. E ſimilmente, ſi faccia come il numero C al numero D, così il quadrato di H al quadrato di I, e come il numero D al numero E, così il quadrato di I al quadrato di K; e con queſt'ordine in infinito. Dico che le rette F, G, H, I, K ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza. Perche il quadrato di F al quadrato di G è come A à B; ed il quadrato di G al quadrato di H è come B à C; ed ancora il quadrato di H al quadrato di I è come C à D; ed il quadrato di I al quadrato di K è come D ad E; ſarà per l'egualità, il quadrato di F al quadrato di K come A ad E; e ſimilmente il quadrato di F al quadrato di I ſarà come A à D, il quadrato di F al quadrato di H, come A à C; il quadrato di G al quadrato di K, come B ad E; il quadrato di G al quadrato di I, come B à D; ed il quadrato di H al quadrato di K, come C ad E. Per la qual coſa i quadrati delle rette F, G, H, I, K ſono come i numeri A, B, C, D, E, e per la ſeſta propoſitione di queſto, i quadrati delle rette F, G, H, I, K ſono frà di loro commenſurabili; dal che le rette F, G, H, I, K ſono commenſurabili in potenza. Dico che le rette F, G, H, I, K ſono incommenſurabili in lunghezza. Perche i quadrati delle rette F, G, H, I, K, ſono come i numeri primi A, B, C, D, E; ed i numeri



meri primi, per il Corollario all'vltimo Scolio dell'ottauo Libro non ſono come i numeri quadrati; in conſeguenza i quadrati delle rette F, G, H, I, K, non ſono come i numeri quadrati; e per la nona propoſitione di queſto, le rette F, G, H, I, K ſono incommenſurabili in lunghezza; furono dimoſtrate commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette F, G, H, I, K, commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente, perche F, per ipoteſi, è Rationale, ed i quadrati delle rette G, H, I, K ſono comparati al quadrato della Rationale F; perciò le rette F, G, H, I, K ſono Rationali. E coſi ſarà manifeſto il modò da trouare quante ſi voglia rette Rationali, commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.



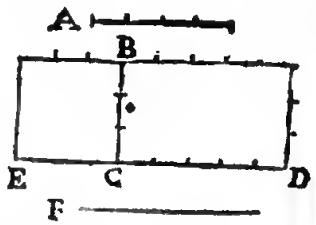
Se ſaranno propoſte quante ſi voglia rette Rationali commenſurabili ſolamente in potenza, e ſe ne vogliano ritrouare delle altre, che con le propoſte ſiano commenſurabili ſolamente in potenza, ſi operi in queſto modo. Siano propoſte le due Rationali A, B, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato di A al quadrato di B ſia come il numero C al numero D, ſi prenda qualunque altro numero E, non quadrato, che ſia primo à ciaſcuno de numeri C, & D, poi ſi faccia per il Corollario alla ſeſta propoſitione di queſto, come il numero D al numero E coſi il quadrato della retta B al quadrato d'vn altra retta come F. Dico che la retta F è Rationale commenſurabile ſolamente in potenza alle due A, & B, perche il quadrato della retta B al quadrato della retta F è come il numero D al numero E: perciò i quadrati delle rette B, ed F ſono commenſurabili, e le rette B, ed F ſono commenſurabili almeno in potenza; mà la retta B è ſuppoſta Rationale, la retta dunque F, che gl'è commenſurabile, ſarà Rationale. In oltre perche D ad E ſono numeri primi, per quel, che ſi diſſe nel fine dell'ottauo Elemento non ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, mà per coſtruttione il numero D al numero E è come il quadrato della retta B al quadrato della retta F, il quadrato dunque della retta B al quadrato della retta F non è come numero quadrato à numero quadrato, e per la nona propoſitione di queſto, le rette B, ed F ſono incommenſurabili in lunghezza, e perciò ſono commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente eſſendo il quadrato di A al quadrato di B come il numero C al numero D, ed il quadrato di B al quadrato di F è come il numero D al numero E; per l'egualità il quadrato di A al quadrato di F ſarà come il numero C al numero E; mà li numeri C ed E per eſſere numeri primi nõ ſono come numero quadrato à numero quadrato, in conſeguenza il quadrato di A al quadrato di F non ſarà come numero quadrato à numero quadrato,

e per la 9. propoſitione di queſto, le rette A, ed F, ſono incommenſurabili in lunghezza, mà ſono commenſurabili in potenza, ſtante che li loro quadrati ſono come i numeri C & E; ſaranno dunque le rette A, & F, Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, come fù propoſto fare, e dimoſtrare. Nell'iſteſſo modo ſe ne poſſono trouare quante ſi voglia altre.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXII.

Il rettangolo, contenuto da due rette linee Rationali, e commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, è Irrationale: e la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è parimente Irrationale; e queſta retta linea ſi chiamerà Media.

Sia eſpoſta la Rationale A, ed il propoſto rettangolo ſia BD, il quale ſia contenuto da i lati BC, CD, Rationali, e frà di loro commenſurabili ſolamente in potenza, ſecondo vno de gli antedetti modi, ſpiegati nel ſecondo de gli antecedenti Lemma; cioè ò che vno de i lati BC, CD ſia vguale alla rationale A, ouero ambidue ſiano ineguali alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD è Irrationale, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo BD, ſarà ancora Irrationale, e ſi chiamerà Media. Sopra ad vno de i lati BC, CD, per eſſempio, ſopra al lato BC, [a] ſi deſcriua il quadrato BE. Perche BC, per ipoteſi, è Rationale, per il Corollario dopo la vigeſima propoſitione, ſarà il quadrato EB Rationale, e perciò [b] ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale A. In oltre, perche i due rettangoli EB, BD, hanno la medeſima altezza BC, ſarà il quadrato EB al rettangolo BD [c] come la baſe EC, ouero BC, alla baſe CD: mà BC (per eſſere commenſurabile ſolamente in potenza à CD) è incommenſurale in lunghezza alla medeſima CD; ſarà il quadrato EB [d] incommenſurabile al rettangolo BD. Finalmente perche il quadrato EB è commenſurabile al quadrato della Rationale A, e ſi è dimoſtrato il quadrato EB eſſere incommenſurabile al rettangolo BD, ſarà il quadrato di A [e] incommenſurabile al rettangolo BD. Hor eſſendo il rettangolo BD incommenſurabile al quadrato della Rationale A, per la definitione decima, il rettangolo BD ſarà Irrationale. Frà li due lati BC, CD, [f] ſi troui vna media proportionale, che ſia F; il quadrato della retta F [g] ſarà vguale al rettangolo BD: mà il rettangolo BD è irrationale, ſarà il quadrato della retta F irrationale, e per il primo de gli antecedenti Lem-



a 46. del 1.

b 9. defin. del 10.

c 1. del 6.

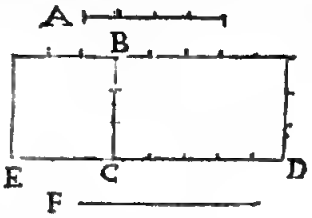
d Scol. alla prop. 10. del 10.

e 14. del 10.

f 13. del 6.

g 17. del 6.

ma, sarà la retta F irrationale; la quale, essendo media proportionale frà i due lati BC, CD, commensurabili solamente in potenza, si chiamerà Media. Per la qual cosa il rettangolo, contenuto da i lati BC, CD, commensurabili solamente in potenza, è irrationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale allo irrationale BD, è parimente irrationale; la quale si chiamerà Media, come fù proposto dimostrare.



SCOLIO.

Deuesi però auuertire, che non tutte le rette, che sono medie proportionali frà due lati, che contengono vn rettangolo, si deuono chiamare Medie, mà quando si dirà Media, s'intenderà quella retta, ch'è media proportionale frà le due rette Rationali, e frà di loro commensurabili solamente in potenza.

Fù dimostrato dopo la prima propositione del sesto Libro, che, se saranno due qualunque rette linee, come BC, CD, il quadrato dell'vna al rettangolo, contenuto dalle due, è come il medesimo rettangolo al quadrato dell'altra; cioè, il quadrato di BC al rettangolo BD, è come il medesimo rettangolo BD al quadrato di CD; dal che il rettangolo BD è medio proportionale frà il quadrato del lato BC, ed il quadrato del lato CD; e perciò vuole il Campano, che non solo la retta F debba chiamarsi media, mà il rettangolo ancora BD, ed il quadrato della retta F, che gli è vguale, si debba chiamare Medio. E qui ancora si deue auuertire, che, quando vn rettangolo si chiamerà con questa voce, Medio, dobbiamo intendere quello, ch'è contenuto da i lati commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato della sudetta media F, ch'è vguale al medio BD, sarà quello, che si chiamerà ancora Medio.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIII.

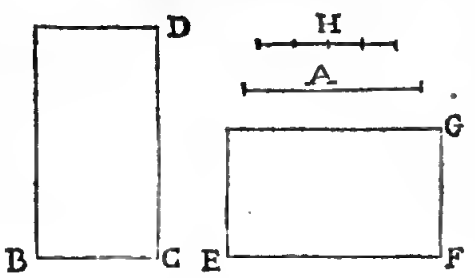
Se à qualche retta Rationale è applicato vn rettangolo, vguale al quadrato della media; l'altro lato del rettangolo sarà Rationale, e sarà incommensurabile in lunghezza à quella Rationale, alla quale fù fatta l'applicatione.

Sia la media A, e qualunque retta Rationale BC, alla quale sia applicato il rettangolo BD, [a] vguale al quadrato della media A. Dico che il lato CD è Rationale, ed è incommensurabile in lunghezza al lato BC. Perche la retta A, per ipotesi, è media, il suo quadrato sarà vguale à quel rettangolo, ch'è contenuto da due rette Rationali, e frà di loro commensurabili solamente in potenza; altrimente, per lo Scolio ante-

a 45. del 1.

ceden-

cedente, la retta A non ſarebbe quella, che chiamiamo Media. Sia quel rettangolo il notato EG, contenuto da i due lati Rationali EF, FG, commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza. Eſſendo il rettangolo BD, per coſtruttione, vguale al quadrato della Media A, ed il rettangolo EG vguale al medeſimo quadrato di A; ſarà il rettangolo BD vguale al rettangolo EG: per la qual coſa i rettangoli BD, EG [b] hanno i lati reciprochi intorno à gli angoli vguali; e ſarà come BC ad EF, coſi FG al lato CD; ed il quadrato di BC al quadrato di EF [c] ſarà come il quadrato di FG al quadrato di CD: ma il quadrato di BC è commenſurabile al quadrato di EF (ſtante che le rette BC, EF, ſono ſuppoſte Rationali) in conſeguenza il quadrato di FG [d] ſarà commenſurabile al quadrato di CD; e perciò le rette FG, CD ſono commenſurabili almeno in potenza. E perche BC è ſuppoſta Rationale, ſe BC ſarà quella Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, eſſendo DC commenſurabile almeno in potenza alla Rationale BC; ſarà DC [e] Rationale; e ſe BC non è quella Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, ſia quella la retta H. Perche BC è ſuppoſta Rationale, ſarà BC [f] commenſurabile, almeno in potenza, alla eſpoſta Rationale H: ma CD è commenſurabile, almeno in potenza, alla retta BC; ſarà ancora DC [g] commenſurabile, almeno in potenza, all' eſpoſta Rationale H: per la qual coſa la retta CD [h] ſarà Rationale. Dico finalmente, che CD è incommenſurabile in lunghezza alla retta BC. Si prendano i due lati EF, FG come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia EF; ſarà il quadrato di EF al rettangolo, contenuto dalle due EF, FG, [k] come la baſe EF alla baſe FG. Nell'iſteſſo modo, preſe DC, & CB, come baſi di due rettangoli, e ſia DC l'altezza commune, ſarà il quadrato di DC al rettangolo DCB, come DC à CB. In oltre, perche i lati EF, FG ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſaranno dunque incommenſurabili frà di loro in lunghezza; e perche il quadrato di EF al rettangolo EFG, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come EF ad FG; eſſendo EF incommenſurabile in lunghezza ad FG, ſarà il quadrato di EF [l] incommenſurabile al rettangolo EFG: fù moſtrato il rettangolo EFG vguale al rettangolo BCD; ſarà il quadrato di EF incommenſurabile al rettangolo BCD. Di più, perche le rette EF, CD ſono Rationali, ſaranno almeno commenſurabili frà di loro in potenza; e perciò il quadrato di EF ſarà commenſurabile al quadrato di CD: ma il quadrato di EF è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo DCB; ſarà il quadrato di DC [m] incommenſurabile al rettangolo DCB: ma il quadrato di DC al rettangolo DCB, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come DC à CB; eſſendo il quadrato di DC incommenſurabile

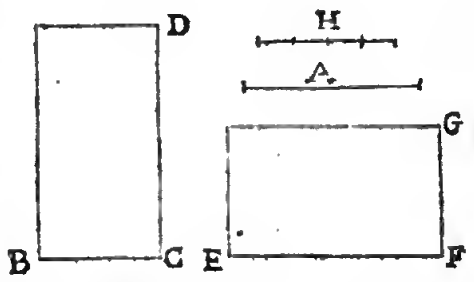


b 14. del 6.
c 22. del 6.
d 10. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 6 defin. del 10.
g 12. del 10.
h 6. defin. del 10.
K 1. del 6.
l 10. del 6.
m 13. del 10.

bile al rettangolo DCB, ſarà il lato DC [n] incommenſurabile al lato BC. Per la qual coſa il lato DC è incommenſurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimoſtrarſi.

n 13. del 10.

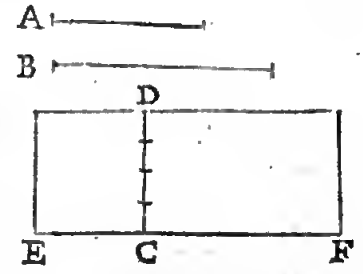
SCOLIO.



Perche il quadrato della media A è vguale al rettangolo BD, applicato alla Rationale BC; ſarà A media proportionale frà i lati BC, CD; e perciò applicando à qualche Rationale BC il quadrato della media A, ne riſulterà la terza proportionale CD. Si che, nelle coſe à venire, douendoſi applicare à qualche Rationale BC il quadrato della media A, per facilità, ſi faccia come la Rationale BC alla media A, così A ad vn altra, che ne riſulterà il terzo lato CD; ed in queſto modo ſaremo liberi dalla lunga operatione, che biſognarebbe fare, operandoſi come nella 45. propoſ. del primo lib.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

La retta linea, commenſurabile alla Media, è Media.



Sia la retta linea B, commenſurabile alla media A, ò che ſia commenſurabile in lunghezza, e potenza, ò ſia commenſurabile in potenza ſolamente. Dico che la retta B ſarà Media. Sia eſpoſta la Rationale DC, alla quale ſia applicato il rettangolo DE, [a] vguale al quadrato della media A, per lo Scolio alla propoſ. 22, ſarà il rettangolo ED medio, il quale, applicato alla Rationale DC, fà il lato EC [b] Rationale, ed incommenſurabile al lato DC in lunghezza. Di nouo ſi applichi alla Rationale DC [c] il rettangolo DF, vguale al quadrato della retta B; e perche le rette A, & B, per ipoteſi, ſono commenſurabili, i loro quadrati [d] ſaranno frà loro commenſurabili, ed i rettangoli DF, DE, che ſono vguali à i loro quadrati, ſaranno frà di loro commenſurabili: ma il rettangolo DE al rettangolo DF [e] è come la baſe EC alla baſe CF; eſſendo il rettangolo ED commenſurabile al rettangolo DF, ſarà EC [f] commenſurabile alla retta CF: ma EC è dimoſtrata incommenſurabile alla Rationale CD, ſarà CF [g] incommenſurabile alla Rationale CD. In oltre perche EC è

a Scol. antecedente.

b 23. del 10.

c Scol. antecedente.

d 9. del 10.

e 1. del 6.

f 10. del 10.

g 14. del 10.

dimo-

dimoſtrata Rationale, non eſſendo commenſurabile alla Rationale CD in lunghezza, ſarà neceſſariamente [h] alla Rationale CD commenſurabile in potenza; perche, ſe fuſſe altrimente, CD non ſarebbe Rationale. Hor eſſendo le due EC, CF, commenſurabili in lunghezza, ſaranno ancora [K] commenſurabili frà loro in potenza: ma EC è commenſurabile in potenza alla Rationale CD, ſarà ancora CF commenſurabile in potenza alla Rationale CD; e perciò CF [l] ſarà Rationale: per la qual coſa le due DC, CF ſono Rationali, e commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza; e per lo Scolio alla propoſ. 22, il rettangolo DF è medio. Finalmente, perche il quadrato della retta B è vguale al rettangolo DF, contenuto da i lati DC, CF, Rationali, e commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, perciò la retta B [m] ſarà Media. Per la qual coſa la retta, ch'è commenſurabile alla Media, è Media, ch'era da dimoſtrarſi.

[h] 6. defin. del 10.
[K] 9. del 10.
[l] 6. defin. del 10.
[m] 22 del 10.

COROLLARIO I.

Da quel, che ſi è detto, appare, che il rettangolo, il quale è commenſurabile al Medio, è ancora Medio; mentre ſi è dimoſtrato, che il rettangolo DF, commenſurabile al medio DE, è Medio.

COROLLARIO II.

Le rette linee frà di loro commenſurabili, per la nona propoſitione, ò ſono commenſurabili in lunghezza, e potenza, ouero ſono commenſurabili ſolamente in potenza. E perche la retta, ch'è commenſurabile alla Media, per l'antecedente propoſitione, è Media; ſarà manifeſto, che due Medie, frà di loro commenſurabili, ò ſaranno commenſurabili in lunghezza, e potenza, ouero ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza; ſe ſaranno commenſurabili in lunghezza, e potenza; ſi chiameranno Medie commenſurabili in lunghezza; ed in queſta voce vi ſi comprende ancora commenſurabili in potenza: e ſe ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza, ſi chiameranno Medie commenſurabili ſolamente in potenza.

LEMMA.

Ritrouare quattro Medie, cioè due commenſurabili in lunghezza, e due altre commenſurabili ſolamente in potenza.

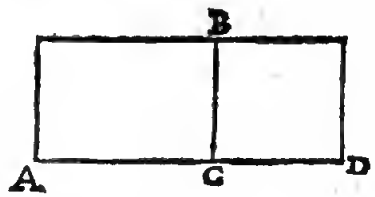
Sia eſpoſta qualunque Media A, e ſi troui la retta B, cõmenſurabile in lunghezza alla media A; che ſi fà col diuiderla in quante parti vguali ſi vogliano, ed vna di quelle parti ſia D; poi ſi prenda la retta B, multiplice di D, ſecondo qualunque multiplicatione; ſarà D commune miſura delle due A, & B, e percio le due A, & B, ſono commenſurabili in lunghezza. In oltre, per l'vndecima di queſto, ſi troui la retta C, commenſurabile ſolamente in potenza alla retta A, cioè che ſia ſolamente incommenſurabile in lunghezza, e per l'antecedente propoſitione, eſſendo le due B, & C, commenſurabili ad A, cioè vna commenſurabile in lunghezza, e l'altra ſolamente in potenza, quelle ſaranno Medie; ed in queſto modo ſaranno ritrouate le due Medie A, & B, commenſurabili in lunghezza, e ſaranno ritrouate ancora le due Medie A, & C, commenſurabili ſolamente in potenza, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Il rettangolo, contenuto da due rette Medie, commenſurabili in lunghezza, è Medio.

Sia il rettangolo AB, contenuto dalle due rette AC, BC, le quali ſiano Medie, commenſurabili frà di loro in lunghezza. Dico che il rettangolo AB è Medio.

Sopra la media BC [a] ſi deſcriua il quadrato BD; per lo Scolio alla propoſitione 22. il quadrato BD ſarà Medio. Si conſiderino i rettangoli AB, BD, che hanno la medeſima altezza BC; ſarà il rettangolo AB al rettangolo BD, [b] come la baſe AC alla baſe CD, ouero CB: ma AC, per ipoteſi, è commenſurabile in lunghezza à CB, ouero CD; ſarà il rettangolo AB, [c] commenſurabile al Medio BD, e per il Corollario 1. all'anteeedente propoſitione, ſarà il rettangolo AB Medio. Per la qual coſa il rettangolo, contenuto dalle medie, commenſurabili in lunghezza, è Medio, ch'era da dimoſtrarſi.



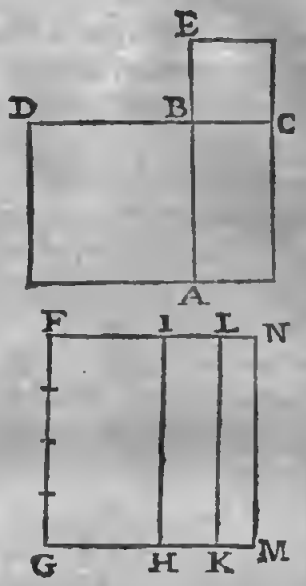
a 46. del 1.
b 1. del 6.
c 10. del 10.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

Il rettangolo contenuto dalle rette, che ſono Medie,

com-

commensurabili solamente in potenza,ò è Rationale,ouero è Medio.



Sia il rettangolo AC, contenuto dalle rette AB, BC, che siano medie, commensurabili solamente in potenza. Dico che il rettangolo AC, ò è Rationale, ouero è Medio. Sopra i lati AB, BC si descriuano i quadrati AD, CE. Perche le due AB, BC, per ipotesi, sono Medie, per lo Scolio alla 22. propositione, i loro quadrati AD, CE, sono Medij. Si esponga la Rationale FG, alla quale si applichi il rettangolo FH, vguale al quadrato AD; al lato IH si applichi il rettangolo IK, vguale al rettangolo AC; ed al lato KL si applichi il rettangolo LM, vguale al quadrato CE. Perche gli angoli in H,K,I,L sono retti, le rette GH, HK, KM [b] costituiscono vna sola retta linea; e le rette FI, IL, LN costituiscono similmente vna sola retta linea; dal che tutto il quadrilatero FGMN sarà vn solo parallelogrammo. E perche le rette FG, IH, LK, NM [c] sono frà di loro vguali, essendo FG Rationale, sarà ancora IH, ouero LK, Rationale. E perche i quadrati AD, CE sono Medij, i rettangoli ancora FH, LM, che sono vguali à quei quadrati, saranno Medij; i quali, applicati alle Rationali FG, LK, ne risultano i lati GH, KM [d] Rationali, ed incommensurabili alle Rationali FG, LK; ed essendo le rette AB, BC, commensurabili in potenza, i loro quadrati AD, CE saranno commensurabili, ed i rettangoli FH, LM, che sono vguali à i medesimi quadrati, saranno frà di loro commensurabili. In oltre, essendo i rettangoli FH, LM, sotto vguali altezze, sarà il rettangolo FH al rettangolo LM, [e] come la base GH alla base KM: ma il rettangolo FH è dimostrato commensurabile al rettangolo LM, sarà GH [f] commensurabile ad MK; e perciò le rette GH, KM sono commensurabili in lunghezza. E perche le rette GH, KM sono state dimostrate Rationali, in conseguenza [g] saranno commensurabili alle Rationali FG, LK: ma si disse, che le rette GH, KM sono incommensurabili in lunghezza alle Rationali FG, LK; saranno dunque le rette GH, KM, commensurabili solamente in potenza alle Rationali FG, LK, e commensurabili frà di loro in lunghezza; e per la 20. propositione di questo, il rettangolo contenuto dalle due GH, KM, sarà Rationale. Di più, essendo AB vguale à DB, ed il lato BC vguale ad EB, sarà AB à BE, [h] come DB à BC, cioè [K] come DA ad AC: ma AB à BE è come AC à CE, sarà DA ad AC, [l] come AC à CE; dal che i tre AD, AC, CE sono continui proportionali; ma i tre DA, AC, CE sono vguali à i tre FH, IK, LM; saranno i tre FH, IK, LM continui proportionali. E perche i tre

a 45. del 1.
b 14. del 1.
c 34. del 1.
d 32. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.
g 6. defin. del 10.
h Corol. alla 7. del 5.
K 1. del 6.
l 11. del 5.

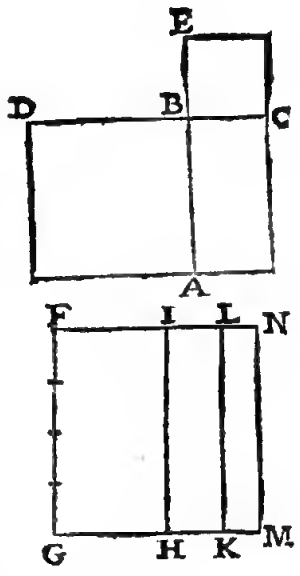
rettan-

m 1.del 6. rettangoli FH,IK, LM [m] ſono come le baſi GH,HK,KM,ſaranno le rette GH,HK,KM,continue proportionali,ed il rettangolo delle eſtreme GH,

n 17.del 6. KM, [n] ſarà vguale al quadrato della media HK: ma il rettangolo contenuto dalle due GH, KM, fù dimoſtrato Rationale; il quadrato dunque di HK ſarà Rationale; e per la 9. definitione di queſto, il quadrato di HK ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale IH, ouero FG;

o 6.defin. del 6. dal che HK [o] ſarà Rationale, e ſarà commenſurabile alla Rationale HI, ouero FG, ò in lunghezza,ouero ſolamente in potenza. Se la Rationale HK è commenſurabile in lunghezza alla Rationale HI, ſarà il rettangolo IK, contenuto dalle rationali IH,HK

p 20.del 10. commenſurabili in lunghezza, [p] Rationale: ma il rettangolo IK è fatto vguale al rettangolo AC, ſarà, in tal caſo, AC Rationale. Se poi la Rationale HK ſarà commenſurabile alla Rationale IH ſolamente in potenza, il rettangolo IK, contenuto dalle Rationali IH, HK, commenſu-



q 22.del 10. rabili ſolamente in potenza, [q] ſarà Medio: ma il rettangolo IK è vguale al rettangolo AC; il rettangolo dunque AC, in queſto caſo, ſarà Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

CONSETTARIO.

a 20.del 10. Dalle coſe dette ſi conclude, che [a] il rettangolo, contenuto da due rette Rationali, e commenſurabili in lunghezza, è Rationale; che

b 22.del 10. [b] il rettangolo, contenuto da due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, è Irrationale, e ſi chiama Medio; ed il quadrato, che gli è vguale, ſi chiama Medio; il di cui lato ſi dice parimente Media; che

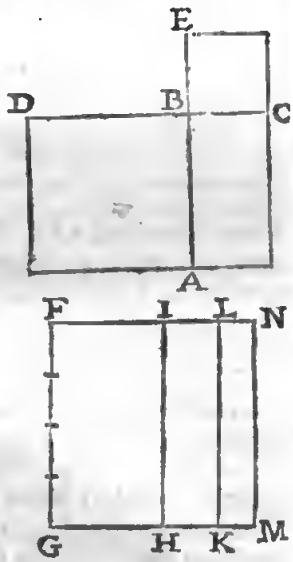
c 25.del 10. [c] il rettangolo, contenuto da due rette

d 26.del 10. Medie, commenſurabili in lunghezza, è Medio; e che [d] il rettangolo, contenuto da due rette Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, ò è Rationale, ouero è Medio.

SCOLIO.

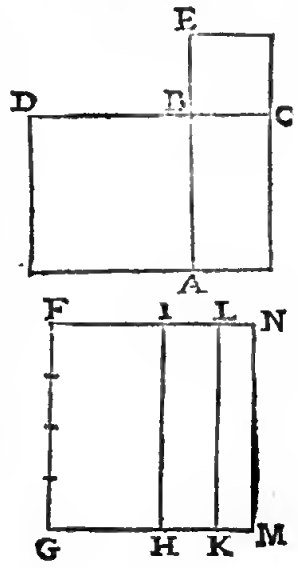
Perche due rette Rationali non possono in altri modi essere commensurabili, se non che ò in lunghezza, ò solamente in potenza, è manifesto dall'antecedente Confettario, ch' Euclide fin qui hà spiegato la natura de i rettangoli contenuti da quelle Rationali secondo i due predetti modi; poiche, nella 20. propositione hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due Rationali, commensurabili in lunghezza, è Rationale; e quello, contenuto da due rationali, commensurabili solamente in potenza, è Medio; e quella retta, il di cui quadrato è vguale all'antedetto Medio, la chiama Media. E perche le medie ancora, ò sono commensurabili in lunghezza, ouero solamente in potenza, hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due medie, commensurabili in lunghezza, è ancora Medio; e che il rettangolo, contenuto da due medie, commensurabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è medio. Resta solo d'inuestigare, qual rettangolo sia quello, ch'è contenuto da due Medie incommensurabili in lunghezza, e potenza; al che suppliſce il P. Clauio, col dimostrare, che quello non è Rationale, ne Medio; mà che costituisce vn terzo genere; stante che è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e da quella retta, che si chiama Media; e la dimostratione è la seguente.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalle due Medie AB, BC, incõmensurabili in lunghezza, e potenza. Dico che il rettangolo AC non è Rationale, ne meno è Medio, &c. s'intenda fatta la costruttione del antecedente Theorema, e si dimostri, come iui si fece, che le rette GH, KM sono Rationali; e che sono alla Rationale FG, ouero LK, incommensurabili in lunghezza. E perche le medie AB, BC, per ipotesi, sono incommensurabili in lunghezza, e potenza, perciò i loro quadrati AD, CE, [a] ed i rettangoli FH, LM, che sono vguali à quei quadrati, saranno incommensurabili: mà FH ad LM [b] è come GH à KM; saranno le rette GH, KM, [c] incommensurabili in lunghezza. E perche le rette GH, KM, sono state dimostrate Rationali, perciò sono frà di loro commensurabili solamente in potenza; ed il rettangolo, contenuto da esse rette GH, KM, [d] sarà Irrationale, e sarà quello, che si chiama Medio. Ed essendo il rettangolo, contenuto dalle due GH, KM, [e] per le cose dimostrate nell'antecedente propositione, vguale al quadrato di HK, sarà il quadrato di HK Medio, ed il lato HK sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Media. Per la qual cosa il rettangolo IK, ouero AC, non è Rationale; perche se fosse rationale, applicato alla Rationale IH, l'altro lato HK [f] sarebbe rationale, ch'è contro à quel, che si è dimostrato. Dico che ne meno IK è medio, perche, se fos-



a 9. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 22. del 10.
e 17. del 6.
f 21. del 10.

g 23. del 10 *ſe Medio, applicato alla Rationale HI, ne riſultarebbe g il lato HK Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale HI: mà HK fù dimoſtrata irrationale, ſarebbe Rationale, ed irrationale, ch'è impoſſibile. Non dunque il rettangolo IK, ouero AC, che gli è vguale, è Medio, ne meno, per quel, che ſi è dimoſtrato, è Rationale; in conſeguenza il rettangolo AC è d'vn altro genere, vguale à quello, che è contenuto dalla Rationale, come IH, e dalla Media, per eſſempio HK. Donde ne segue, che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto da due Medie incommenſurabili in lunghezza, e potenza, come (per l'vltima ſuppoſitione) ſono le due AB, BC, non è Media, mà è di quel genere di linee, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla media, come ſono le rette IH, HK, ch'è il noſtro propoſito.*



THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

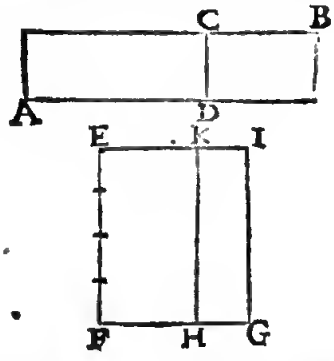
Il Medio non ſupera il Medio per vno ſpatio Rationale.

Siano i due Medij AB, AC, ed il Medio AB ſuperi il medio AC, per quanto è il rettangolo DB. Dico che DB non è Rationale. Sia DB, ſe è poſſibile, Rationale. Si eſponga la Rationale EF, alla quale ſi aplichi il rettangolo EG, a vguale al Medio AB; ad alla medeſima Rationale EF ſia applicato il rettangolo EH, vguale al medio AC, il rimanente KG ſarà vguale al Rationale DB, e perciò KG ſarà Rationale. Perche i Medij AB, AC, cioè i rettangoli EG, EH, ſono applicati alla Rationale EF, i lati FG, FH b ſaranno Rationali, ed ogn'vno incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo perche il Rationale KG è applicato alla Rationale KH, ouero EF, l'altro lato HG c ſarà Rationale, commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Hor perche le due EF, HG ſono commenſurabili in

a 45. del 1.

b 23. del 10

c 21. del 10



lunghez-

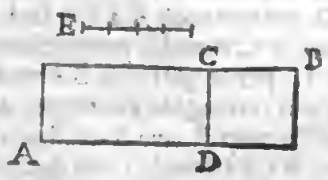
lunghezza, e la retta EF è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad FH, sarà HG [d] incommensurabile in lunghezza alla medesima FH. Prese FH, ed HG come basi di due rettangoli, ed FH sia altezza commune, sarà il quadrato di FH al rettangolo delle due FH, HG, [e] come FH ad HG: mà FH è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad HG; sarà il quadrato di FH [f] incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG. In oltre perche le rette FH, HG, per quel, che si è dimostrato, sono Rationali, perciò i loro quadrati sono commensurabili, e l'aggregato de i quadrati di FH, HG, [g] sarà commensurabile al quadrato di FH; mà il quadrato di FH è Rationale; perciò l'aggregato de' quadrati di FH, HG, che gl'è commensurabile per il Lemma, che antecede alla 20. propos. di questo è Rationale. Similmente il doppio rettangolo, contenuto dalle due FH, HG, è cõmensurabile al semplice rettangolo delle medesime FH, HG (stante che il doppio rettangolo contiene il semplice due volte.) Hor perche i quadrati di FH, HG, giunti insieme, sono commensurabili al quadrato di FH, ed il quadrato di FH è incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG; l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [h] sarà incommensurabile al rettangolo delle due FH, HG: mà il doppio rettangolo delle due FH, HG, è commensurabile al semplice rettangolo delle due FH, HG; sarà l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [k] incommensurabile al doppio rettangolo delle due FH, HG; e per la 17. di questo, il Composto de i quadrati delle due FH, HG, col doppio rettangolo delle due FH, HG, sarà incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG: mà il Composto de i due quadrati FH, HG, col doppio rettangolo delle due FH, HG, [l] è vguale al quadrato di FG; sarà il quadrato di FG incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG: Mà l'aggregato de i quadrati di FH, HG, per essere commensurabile al quadrato di FH, è Rationale, essendo il quadrato di FG incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG, ch'è Rationale; per la decima definitione di questo, il quadrato di FG sarà irrationale; ed il lato FG [m] sarà irrationale, ch'è impossibile, mentre fù dimostrato, che la retta FG è Rationale, incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Non dunque il rettangolo DB, ch'è la differenza di quanto il medio AB supera il medio AC, è Rationale, che era da dimostrarsi.

d 14. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.
g 16. del 10.
h 14. del 10.
K 14. del 10.
l 4. del 2.
m 11. defin. del 10.

SCOLIO.

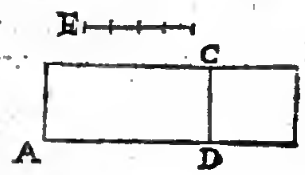
Il Rationale supera il Rationale per vno spatio Rationale.

Sia il Rationale AB, il quale superi il Rationale AC, per il rettangolo DB. Dico che il rettangolo DB è Rationale. Si esponga la Rationale E, rispetto alla quale si compārano tutte le altre. Perche i rettangoli AB, AC sono Rationali, ogn'vno [a] sarà commensurabile al quadrato



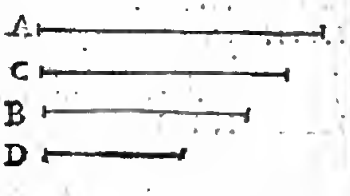
a 9. defin. del 10.

b 12. del 10. *della Rationale E; e perciò* [b] *saranno frà di loro commensurabili. Hor essendo tutto il rettangolo AB, ch'è composto de i due AC, DB, commensurabile ad AC, sarà, per il Corollario alla 16. propos., il medesimo rettangolo AB commensurabile al rettangolo DB: ma AB, per ipotesi, è Rationale; sarà DB, per il Lemma, che antecede la 20. propos. Rationale, il che era da dimostrarsi.*



PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ritrouare due Medie, commensurabili frà di loro solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale.



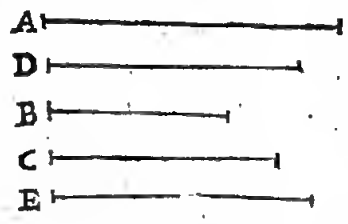
Si trouino, per il 2. Lem. dopo la 21. propos., due rette Rationali, e commensurabili solamente in potenza, che siano le notate A, & B; si troui frà le due A, & B, [a] vna media proportionale, che sia C; e si faccia si come A à B, così C [b] ad vn'altra, che sia D. Dico che le due C, & D sono le Medie, commensurabili solamente in potenza, e contengono vn rettangolo Rationale. Perche le due A, & B sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto da esse, [c] Irrationale, che si chiama Medio: ma il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, [d] è vguale al quadrato di C (stante che C è media proportionale frà le due A, & B) sarà il quadrato di C [e] Medio, e la retta C sarà quella, che si chiama Media. E perche la proportione di A à B è come quella di C à D, e le due A, & B sono commensurabili solamente in potenza, saranno le due C, & D, [f] commensurabili solamente in potenza: ma la retta C è dimostrata Media, sarà la retta D, [g] che gli è commensurabile, Media, e saranno ritrouate le due Medie C, & D, commensurabili solamente in potenza. Dico finalmente, che il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, è Rationale. Per costruttione A à B è come C à D, permutando A à C [h] sarà come B à D; ma A à C è come C à B (stante che C è media proportionale frà le due A, & B) sarà C à B [K] come B à D; per la qual cosa B è media proportionale frà le due C, & D; e perciò il rettangolo contenuto dalle due C, & D, [l] è vguale al quadrato della retta B: ma il quadrato di B è Rationale, (mentre per costruttione B è Rationale) sarà il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, Rationale, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 13. del 6.
b 12. del 6.
c 22. del 10.
d 17. del 6.
e Scol. alla propos. 22. del 10.
f Scol. alla propos. 10. del 10.
g 14. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 17. del 6.

PROBLE-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXIX.

Ritrouare due Medie commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano quel Rettangolo, che ſi chiama Medio.



Per lo Scolio alla propoſ. 21. di queſto, ſi trouino tre rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, che ſiano le notate A,B,C; frà le due A,& B, [a] ſi troui la media proportionale D; ſarà il rettangolo contenuto dalle due A, & B, [b] vguale al quadrato di D. Poi ſi faccia ſi come B à C, [c] così D ad vn altra, che ſia E. Dico che le due D, ed E ſono le medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che ſi chiama Medio. Perche le due A, & B ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, Irrationale, cioè [d] quello, che ſi chiama Medio: ma il rettangolo delle due A, & B è vguale al quadrato di D; ſarà il quadrato di D Medio, e la retta D [e] ſarà Media. In oltre, perche B à C è come D ad E, e le due B, & C, per coſtruttione, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; ſaranno le due D, ed E, [f] commenſurabili ſolamente in potenza: ma D è dimoſtrata Media, ſarà E, [g] che gli è commenſurabile ſolamente in potenza, Media; e perciò le due D, ed E ſono Medie, commenſurabili ſolamente in potenza. Dico che le Medie D, ed E, contengono quel rettangolo, che ſi dice Medio. Perche B à C è come D ad E, permutando, B à D [h] ſarà come C ad E; ma B à D è come D ad A (ſtante che le tre B, D, A ſono continue proportionali) ſarà D ad A [K] come C ad E; ed il rettangolo, contenuto dalle eſtreme D, ed E, [l] ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle Medie A, & C: ma il rettangolo contenuto dalle due Rationali A, & C, commenſurabili ſolamente in potenza, [m] è Medio; il rettangolo dunque, contenuto dalle Medie D, ed E, ſarà Medio, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 13. del 6.
b 17. del 6.
c 12. del 6.
d 22. del 10.
e Scol. alla 22. del 10.
f Scol. alla 10. del 10.
g 24. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 16. del 6.
m 22. del 10.

LEMMA I.

Ritrouare due numeri piani ſimili.

Si eſpongano quattro numeri proportionali A, B, C, D, talmente, che A à B ſia come C à D; ed A, multiplicando B, produca il numero E; come ancora C, multiplicando D, produca F; i numeri E, ed F, che hanno i lati proportionali, per la 21. defin. del 7, ſono numeri piani ſimili, che era da farſi.

A 3		6 C
B 5		10 D
E 15		60 F

Nel

a 28. e 29. prop. del 9.

Nel 9. lib. si è dimostrato, che [a] *se il numero disparo, ouero il numero paro, multiplica vn numero paro, produce numero paro; ed il numero disparo multiplica il numero disparo, produce numero disparo; sarà manifesto di quali numeri dobbiamo valerci, per trouare due numeri piani simili, che ambidue siano numeri pari, ò ambidue numeri dispari. E perche per trouare due numeri piani simili, si deuono prendere quattro numeri proportionali, come antecedentemente si è fatto, pigliandoli ò tutti quattro numeri pari, ouero il primo, e terzo sia numero paro, ed il secondo, e quarto numero disparo, sempre i piani simili, che ne verranno, saranno numeri pari; e se tutti quattro saranno numeri dispari, i piani simili, che ne verranno, saranno ambidue numeri dispari; e se il primo, e secondo, sarà disparo, ed il terzo, e quarto sarà numero paro, vno de' piani simili sarà numero paro, e l'altro disparo.*

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, in modo, che il loro aggregato sia numero quadrato.

Per l'antecedente Lemma si trouino due numeri piani, simili, come AB, & C, i quali siano ambidue ò numeri pari, ouero ambidue numeri dispari; e dal numero AB se ne detragga il numero DB, vguale al numero C: perche da vn numero paro, detratto vn numero paro, resta numero paro; e similmente dal numero disparo, detratto il numero disparo, resta numero paro, ò che i due AB, BD siano pari, ò pure siano ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro. Si diuida il numero paro AD in due parti vguali, che siano AE, ED. Dico che il prodotto, fatto dall a multiplicatione di AB in BD, sarà vno de i numeri quadrati; e l'altro sarà al quadrato di ED i quali gionti insieme comporranno vn numero quadrato. Perche i numeri AB, BD sono piani simili, per la prima propositione del nono Libro, il prodotto, fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, sarà numero quadrato. Inoltre, perche il numero AD è diuiso in due parti vguali in E, ed à quello se gli è aggiunto il numero DB, per il sesto Theorema dopo la 14. propositione del Libro nono, il prodotto fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, col quadrato del numero ED, è vguale al quadrato del numero EB. Per la qual cosa i numeri quadrati so-

A . . . . . E . . . . . D . . . . . B
C . . . . . .

no,

no, vno il prodotto di AB in BD; e l'altro il quadrato di ED, i quali, giunti insieme, fanno il numero quadrato EB, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

COROLLARIO.

Perche il prodotto, fatto da AB in BD, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di EB, la differenza frà il quadrato di EB, ed il quadrato di DE, sarà il prodotto, fatto da i due AB, BD: Si che, se i due AB, BD, sono numeri piani, simili, sarà noto il modo di trouare due numeri quadrati, che la loro differenza sia numero quadrato; poiche, detratto da AB il numero DB, vguale al numero C, e l'auanzo AD, sia diuiso in due parti vguali, vno di quelli numeri quadrati, sarà il quadrato di EB, e l'altro il quadrato di ED.

Se poi i numeri presi AB, & C, ouero AB, & BD, non sono piani simili, ma ambidue siano numeri pari, ò ambidue dispari, nell'istesso modo si troueranno i due numeri quadrati EB, ED, la di cui differenza sarà il prodotto de i due AB, BD, il quale non sarà numero quadrato; perche, se il prodotto, fatto da i due AB, BD, fusse numero quadrato, i due AB, BD, sarebbero piani simili, ch'è contro all'ipotesi.

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, che il loro aggregato non sia numero quadrato.

Siano esposti i due numeri piani simili AB, & C, ambidue pari, ouero ambidue dispari; e, detratto dal numero AB il numero DB, vguale al numero C, saranno i numeri AB, BD piani simili; e perche sono ambidue pari, ouero ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro; il quale, diuiso ne i due numeri vguali AE, ED, per l'antecedente Lemma, il prodotto, fatto da i due AB, BD, è numero quadrato; al quale si aggiunga il quadrato di ED, l'aggregato sarà numero quadrato, cioè sarà il quadrato del

A.....E.F....D.....B
C.....

nu-

numero EB; da ED ſe ne leui l'vnita EF, ſarà il quadrato di DF minore del quadrato di DE. Dico che il prodotto, fatto da AB in BD, ch'è numero quadrato, col quadrato del numero FD, non fà numero quadrato. Se l'aggregato del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è numero quadrato, quel numero quadrato, ò ſarà maggiore, ò vguale, ò minore del quadrato di FB. Sia prima, ſe è poſſibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, maggiore del quadrato di FB; ſarà il ſuo lato, ò radice, maggiore di FB. Hor ſe quel lato è maggiore di FB, ò ſarà vguale ad EB, ò ſarà maggiore di EB, non potendo

A.....E.F....D.....B
C.....

eſſere minore di EB, ſtante che EB ſupera FB per vna ſola vnità; ſi che, eſſendo quel lato maggiore di FB, e minore di EB, biſognarebbe diuidere l'vnità EF, ch'è impoſſibile, nella quantità diſcreta. Non dunque quel lato è minore di EB, ma ſarà ò vguale ad EB, ouero maggiore. Sia prima vguale ad EB, in tal caſo, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, ſarà vguale al quadrato di EB: ma, per il Lemma antecedente, il prodotto di AB, in BD, col quadrato di ED, è vguale al medeſimo quadrato di EB: ſarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED: ſe ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, reſta il quadrato di FD vguale al quadrato di ED, ed il lato FD vguale al lato ED, la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il lato del quadrato compoſto del prodotto di AB, in BD, col quadrato di DF, è vguale ad EB. Sia di nuouo quel lato maggiore di EB, ſarà il ſuo quadrato maggiore del quadrato di EB; cioè il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, ſarà maggiore del quadrato di EB: fù dimoſtrato, nel Lemma antecedente, il quadrato di EB vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; ſarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, maggiore del prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; ſe ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, reſta il quadrato di FD maggiore del quadrato di ED; ed il numero FD ſarà maggiore del numero ED; la parte maggiore del tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il lato del quadrato, compoſto del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è maggiore di EB, ne meno, per quel che ſi è dimoſtrato, è vguale, ne minore di EB. Per la qual coſa il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, non è maggiore del quadrato di FB.

Di nuouo ſia, ſe è poſſibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, vguale al quadrato di FB. Dal numero AE ſe ne detraggano le due vnità AH, ſarà AH il doppio dell'vnità EF.

A..H...E.F....D.....B
C.....

Perche il tutto AD, per coſtruttione, è il doppio di ED, e la parte AH è il doppio di EF, per la 7. propoſitione del 7, il rimanente HD ſarà il doppio del rimanente FD; e percio HD è diuiſo ne i due numeri vguali HF, FD, à i quali aggiunto il numero DB, per il 6. Theorema dopo la propoſitione 14. del 9, il prodotto di HB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB: ma, per la ſuppoſitione fatta, il medeſimo quadrato di FB è vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di FD; ſarà il prodotto di AB in BD col quadrato di DF, vguale al prodotto di HD in DB, col quadrato di FD: ſe ne leui il commune quadrato di FD, reſta il prodotto di AB in BD vguale al prodotto di HB in BD: dal che DB, multiplicando HB, e multiplicando AB, produce numeri vguali, e, per la 17. del 7, il prodotto al prodotto è come il numero multiplicato BH al numero multiplicato AB: ma i prodotti ſono ſtati dimoſtrati vguali; perciò i numeri AB, HB ſono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB.

Sia finalmente, s'è poſſibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del quadrato di FB. Perche il prodotto di HB in BD, col quadrato di DF, per quel, che ſi è dimoſtrato, è vguale al quadrato di FB; ed il prodotto di AB in BD, col quadrato FD, per la fatta ſuppoſitione, è minore del quadrato di FB; ſarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del prodotto di HB in BD, col quadrato di FD: ſe ne leui il commune quadrato di FD, reſta il prodotto di AB in BD, minore del prodotto di HB in BD. Hor perche i numeri AB, HB, multiplicano il medeſimo numero DB, il prodotto di AB in BD al prodotto di HB in BD, per la 18. del 7, ſarà come il multiplicante AB al multiplicante HB: ma il prodotto di HB in BD è dimoſtrato minore del prodotto di HB in BD; ſarà il numero AB minore del numero HB; il tutto minore della parte, ch'è impoſſibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è minore del quadrato di FB; non è maggiore, ne vguale, per quel, che ſi è dimoſtrato, in conſeguenza il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, non è numero quadrato, come fù propoſto dimoſtrare.

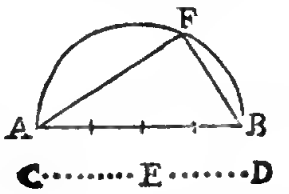
SCOLIO.

Dall'antecedente Lemma ſi caua il modo da trouare due numeri, il di cui aggregato non habbia à ciaſcuno di quelli la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: poiche, ſe per l'antecedente Lemma ſi trouano due numeri quadrati, che il loro compoſto non ſia numero quadrato, quel compoſto, che non è quadrato, à ciaſcuno de i due quadrati trouati, non ſarà come numero quadrato à numero quadrato. Ouero, ſe ſi diuiderà vn numero quadrato in due numeri non quadrati, quel quadrato à ciaſcuno de i non quadrati, non ſarà come numero quadrato à numero quadrato.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXX.

Ritrouare due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Sia eſpoſta la Rationale AB, e per la ſeconda parte all'antecedente Corollario, ſi trouino due numeri quadrati, la differenza de'quali non ſia quadrato; e ſiano quelli i numeri quadrati CD, CE, la di cui differenza DE non ſia numero quadrato; preſa la Rationale AB come diametro d'vn circolo, intorno al quale ſi deſcriua il mezzo circolo AFB; poi, per il Corollario alla 6. propoſ. di queſto, ſi faccia come il numero CD al numero non quadrato ED, così AB ad vn altra quantità BF, la quale ſia addattata nel mezzo circolo AFB; ſi tiri la retta AF, ſarà l'angolo AFB, [a] nel ſemicircolo, retto; ed il quadrato di AB [b] ſarà vguale à i quadrati de i due lati AF, FB; e perciò il quadrato di AB è maggiore del quadrato di AF, per quanto è il quadrato di FB. Dico che le rette AB, BF ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB ſupera il quadrato della minore FB, per il quadrato d'vna retta, come AF, commenſurabile in lunghezza alla maggiore AB. Perche il quadrato di AB al quadrato di FB, per coſtruttione, è come il numero CD al numero ED; ſaranno i quadrati di AB, FB, [c] commenſurabili: ma il quadrato della Rationale AB [d] è Rationale, ſarà il quadrato di FB [e] Rationale, ed il ſuo lato FB ſarà Rationale; per la qual coſa le rette AB, FB ſono Rationali. E perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come il numero CD al numero DE; ed il numero CD al numero DE nõ è come numero quadrato à numero quadrato, ſtante che ED non è numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di FB



a 31. del 3.
b 47. del 1.
c 6. del 10.
d 8. defin. del 10.
e 9. defin. del 10.

è co-

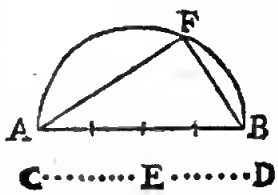
è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AB, FB [f] ſono incommenſurabili in lunghezza: ma furono dimoſtrate commenſurabili in potenza; ſaranno le Rationali AB, FB commenſurabili ſolamente in potenza. [f 9. del 10.]

Finalmente, perche il numero CD al numero DE è come il quadrato di AB al quadrato di FB, per la conuerſione della proportione, l'antecedente CD alla differenza CE [g] ſarà come l'antecedente, cioè il quadrato di AB, al quadrato di AF (che è la differenza frà li due quadrati AB, FB) cioè ſarà il quadrato di AB al quadrato di AF, come il numero quadrato CD al numero quadrato AF: per la qual coſa le rette AF, AB, [h] ſono commenſurabili in lunghezza. Saranno dunque ritrouate le due rette AB, FB, Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB ſupera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, commenſurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. [g Corol. alla 19. del 5.] [h 9. del 10.]

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXXI.

Ritrouare due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Si eſponga la retta Rationale AB, e per il 2. Lemma dopo la 29. propoſitione di queſto, ſi trouino due numeri quadrati, come CE, ED, in modo, che il loro aggregato CD non ſia numero quadrato. Sopra la Rationale AB ſi deſcriua il mezzo circolo AFB; poi, per il Corollario alla 6. propoſ. di queſto, ſi faccia come il numero CD al numero DE, così il quadrato di AB al quadrato della retta FB, la quale [a] ſi addatti nel mezzo circolo AFB; ſi tiri la retta AF. Si moſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di AB ſupera il quadrato di FB, per quanto è il quadrato di AF; e ſi moſtri ancora, che le due AB, FB ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſtante che queſto ſi dimoſtra nell'iſteſſo modo, che ſi fece all'antecedente propoſitione. In oltre, perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come CD à DE, per la conuerſione della proportione, ſarà il numero DC al numero CE, [b] come il quadrato di AB al quadrato di AF: ma CD à CE [c] non è come numero quadrato à numero quadrato (ſtante che CD non è numero quadrato) ne meno il quadrato di AB al quadrato di AF è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AF, AB [d] ſono incommenſurabili in lunghezza. Per la qual coſa ſaranno ritrouate le due Rationali AB, BF, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato della maggiore AB



[a 1. del 4.] [b Corol. alla 19. del 5.] [c 24. del 8.] [d 9. del 10.]

ſupera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXXII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Si trouino, per la 30. propoſitione di queſto, due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, come A, & B, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore B, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſa maggiore A: frà le due A, & B, [a] ſi troui vna media proportionale, che ſia C, ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, vguale al quadrato della retta C. Poi ſi faccia ſi come A à B, [b] così C ad vn altra, che ſia D. Dico che le due rette C, & D ſono le medie, che ſi cercano. Perche le due A, B ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medeſime A, & B, [c] ſarà irrationale, che ſi chiama Medio; e la retta C, il di cui quadrato è vguale à quel rettangolo, ſarà quella retta, che ſi chiama Media. E perche A à B è come C à D, e le due A, & B ſono commenſurabili ſolamente in potenza; per lo Scolio alla 10. propoſitione di queſto, le due C, & D, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa D, ch'è commenſurabile alla media C, [d] ſarà Media; e ſaranno ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza. Dico che contengono vn rettangolo Rationale. Perche A à B è come C à D, permutando, A à C [e] ſarà come B à D; ma A à C è come C à B (ſtante che C è media proportionale frà le due A, & B) ſarà C à B, [f] come B à D; e perciò B è media proportionale frà le due C, & D. Per la qual coſa il rettangolo, contenuto dalle eſtreme C, & D, [g] è vguale al quadrato della retta B: ma la retta B è poſta Rationale, ſarà il quadrato di B [h] Rationale; cioè il rettangolo, contenuto dalle medie C, & D, è Rationale. Finalmente perche A à B è come C à D, ed il quadrato di A, per coſtruttione, ſupera il quadrato di B, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato ancora di C ſuperarà il quadrato di D, [K] per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore C; e ſaranno ritrouate le due Medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettan-

a 13. del 6.
b 12. del 6.
c 22. del 10.
d 24. del 10.
e 16. del 5.
f 11. del 5.
g 17. del 6.
h 8. defin. del 10.
K 15. del 10.

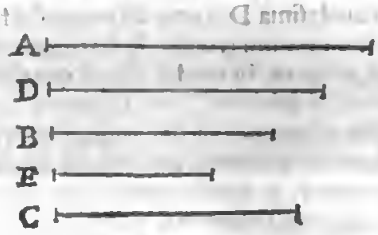
rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore C, ſupera il quadrato della minore D, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore C, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

Se ſaranno trouate le Rationali A, B, [1] commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore B, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla maggiore A; ed il rimanente ſi faccia come prima, haueremo ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore C ſuperarà il quadrato della minore D, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore C, il che tutto ſi dimoſtra, come ſopra ſi fece. [1] 31. del 10.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXXIII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano quel rettangolo, che ſi chiama Medio; ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

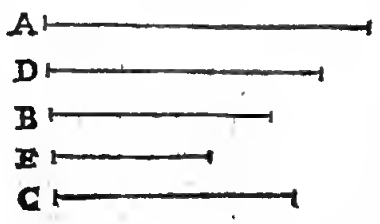
Si trouino due rette Rationali, come A, & C, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore C, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore A; poi, per lo Scolio alla propoſit. 21. di queſto, ſi troui la retta B Rationale, e commenſurabile alle due A, & C, ſolamente in potenza; Ciò fatto, ſi troui vna media proportionale, [b] frà le due A, & B, che ſia D; ſarà il quadrato della retta D [c] vguale al rettangolo, contenuto dalle due A, & B. Si faccia poi come D à B, [d] così C ad vn altra, che ſia E, ſarà il rettangolo delle eſtreme D, ed E, [e] vguale al rettangolo delle medie B, & C. Dico che le due D, ed E ſono le Medie, che ſi cercano. Si prendano le due A, & C, come baſi di due rettangoli, e ſia B altezza commune; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, al rettangolo contenuto dalle due B, & C, [f] come le baſe A alla baſe C: ma il rettangolo delle due A, & B, è vguale al quadrato della retta D; ed il rettangolo delle due B, & C, è vguale al rettangolo delle due D, ed E; ſarà il quadrato di D al rettangolo delle due D, ed E, come A à C. Preſe D, ed E, come baſi di due rettangoli, e ſia D altezza commune; ſarà il quadrato di D al rettangolo delle due D, ed E, [g] come la baſe D alla baſe E: ma il quadrato di D al rettangolo delle due D, ed E, fù moſtrato eſſere come A à C;



[a] 30. del 10.
[b] 13. del 6.
[c] 17. del 6.
[d] 22. del 6.
[e] 16 del 6.
[f] 1. del 6.
[g] 1. del 6.

ſarà

sarà dunque A à C, come D ad E; e perche le due A, & C sono, per costruttione, commensurabili solamente in potenza, saranno le due D, ed E, per lo Scolio alla 10. propositione di questo, commensurabili solamente in potenza. In oltre, perche il quadrato di D, è vguale al rettãgolo contenuto dalle due rationali A, & B, commensurabili solamente in potenza; sarà il quadrato dl D [h] irrationale, e la retta D sarà Media; ma si disse, che la retta E è cõmensurabile alla media D, perciò la retta E [K] sarà Media. Hor essendo le rette B, & C, Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle due B, & C, [l] sarà irrationale; cioè quello, che si chiama Medio: ma il rettangolo delle due B, & C, fù dimostrato vguale al rettangolo delle due D, ed E; il rettangolo dunque, contenuto dalle due D, ed E, sarà Medio; E saranno ritrouate le due Medie D, ed E, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che si chiama Medio. Dico finalmente, che il quadrato di D supera il quadrato di E, per il quadrato di vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore D. Perche fù dimostrato, che A à C è come D ad E, e, per costruttione, il quadrato di A supera il quadrato di C, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato di D [m] superarà il quadrato di E, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla medesima D, come fù proposto fare, e dimostrare.



h 22. del 10.
K 24. del 10.
l 22. del 10.
m 15. del 10.

Se saranno trouate le Rationali A, & C, [n] commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A superi il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore A; ed il rimanente si faceia come prima, saranno trouate le due Medie D, ed E, commensurabili solamente in potenza, le quali conterranno vno spatio Medio, ed il quadrato della maggiore D superarà il quadrato della minore E, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile alla maggiore D; e la dimostratione è la medesima, fatta di sopra.

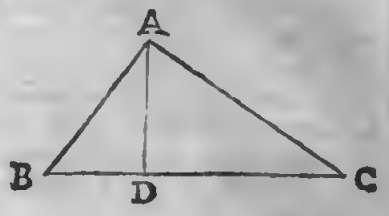
n 31. del 10.

LEMMA.

Se sia il triangolo rettangolo ABC, e l'angolo retto sia BAC, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato BC. Dico che il rettangolo, contenuto dalle due BC, CD è vguale al quadrato di AC; che il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, è vguale al quadrato di AB; che il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; e che il rettangolo, contenuto dalle due

AD,

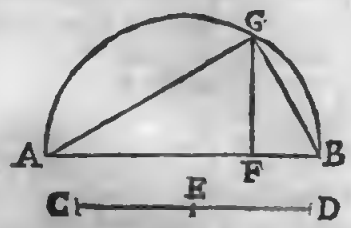
AD, BC, è vguale al rettangolo ; contenuto da i due lati BA, AC.



Perche AD diuide il triangolo ABC ne i due triangoli ADC, ADB, ſimili frà di loro, e ſimili à tutto il triangolo ABC, conſiderando i due ſimili triangoli ABC, ADC, ſarà BC à CA, come CA à CD ; ed il rettangolo, contenuto dalle due BC, CD, ſarà vguale al quadrato di AC. Similmente, conſiderando i ſimili triangoli ABC, ABD, ſarà CB ad AB, come AB à BD ; ed il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, ſarà vguale al quadrato di AB. Di nuouo, conſiderando i ſimili triangoli ADB, ADC, ſarà BD à DA, come DA à DC, ed il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, ſarà vguale al quadrato di AD. Finalmente, conſiderando i ſimili triangoli ABC, ADB, ſarà DC à CA, come BA ad AD ; ed il rettangolo contenuto dalle eſtreme BC, AD, ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BA, AC, come fù propoſto dimoſtrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXIV.

Ritrouare due rette linee, incommenſurabili in potenza, in modo, che il compoſto de i loro quadrati ſia Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio.



Si trouino due rette Rationali, come AB, CD, [a] commenſurabili ſolamente in potenza ; e che il quadrato della maggiore AB ſuperi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB: ſi diuida CD in due parti vguali in E ; poi per il ſecondo Lemma dopo la 17. propoſitione di queſto, ſi applichi ad AB vn rettangolo, vguale al quadrato di CE, in modo, che manchi à compire la retta AB, per vna figura quadrata ; per il Corollario al citato Lemma, ſarà diuiſa AB talmente in F, che il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, ſarà vguale al quadrato di CE ; cioè ſarà vguale alla quarta parte del quadrato di tutta CD. Intorno alla retta AB ſi deſcriua il mezzo circolo AGB ; nel punto F [b] ſi erigga la retta FG, perpendi-

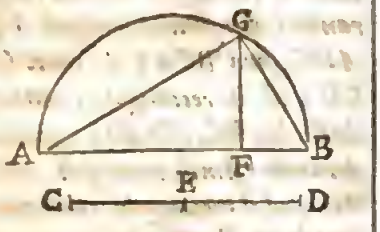
a 31. del 10.

b 11. del 1.

colare

colare ad AB, la quale, continuata, concorra con la circonferenza in qualche punto G: si tirino le rette AG, GB: l'angolo AGB [c] sarà retto; e, per l'antecedente Lemma, il rettangolo, contenuto dalle due AF, FB, sarà vguale al quadrato di FG: mà il rettangolo delle due AF, FB, è vguale, per costruttione, al quadrato di CE; sarà il quadrato di FG vguale al quadrato di CE; e la retta FG vguale alla retta CE; mà CD è il doppio di CE; sarà CD il doppio di FG. Supposto questo.

c 31. del 3.



Perche il quadrato di AB, per costruttione, supera il quadrato di CD, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad AB; e si è applicato ad AB il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, vguale alla quarta parte del quadrato della minore CD, che gli manchi à compire la linea, vna figura quadrata; per la decimanona propositione di questo, le parti AF, FB sono frà di loro incommensurabili in lunghezza. Prese AF, FB, come basi di due rettangoli, de' quali sia AB altezza commune; sarà il rettangolo, contenuto dalle rette BA, AF, al rettangolo, contenuto dalle rette AB, BF, [d] come le base AF alla base FB: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo delle due BA, AF, è vguale al quadrato di AG; ed il rettangolo delle due AB, BF, è vguale al quadrato di GB; il quadrato dunque di AG al quadrato di GB [e] sarà, come AF ad FB: fù dimostrata AF incommensurabile in lunghezza ad FB; sarà il quadrato di AG [f] incommensurabile al quadrato di GB; per la qual cosa le rette AG, GB, [g] sono incommensurabili in potenza. E perche il quadrato della Rationale AB [h] è Rationale, ed è vguale [K] à i quadrati delle due AG, GB, haueremo ritrouato due rette, come AG, GB, incommensurabili in potenza, che il loro composto fanno il quadrato di AB Rationale. Dico che il rettangolo contenuto dalle rette AG, GB è Medio. Prese CD DF, come basi di due rettangoli, e sia AB altezza commune; il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, al rettangolo, contenuto dalle due AB, DE, [l] sarà come la base CD alla base DE: mà CD è il doppio di DE, sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, ED, ouero dalle due AB, FG (stante che FG è vguale ad ED) e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, sarà commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, (à causa che il doppio è misurato da quello, che è sua metà). Hor essendo le due AB, CD, Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, [m] sarà irrationale, cioè quello, che si chiama Medio: essendo il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, commensurabile al Medio, cioè al rettangolo, contenuto dalle due AB, CD; il rettangolo ancora, contenuto dalle due AB, FG, [n] sarà Medio: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio. Per la qual

d 1. del 6.

e 22. del 5.

f 10. del 10.

g 4. defin. del 10.

h 8. de fin. del 10.

K 47. del 1.

l 1. del 6.

m 22. del 10.

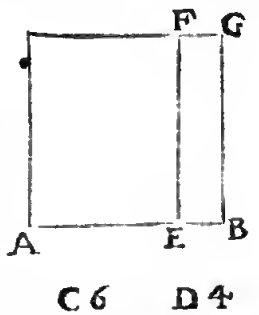
n Corol. alla 24. del 10.

cosa

cosa le rette AG, GB sono incommensurabili in potenza; i loro quadrati compongono il quadrato di AB, ch'è Rationale; e contengono quel rettangolo, che si chiama Medio, come fù proposto fare, e dimostrare.

SCOLIO.

Non sarà inutile dimostrare in questo luogo quel, che si dimostra in vn Scolio Antico, cioè. Se sia possibile, che due spatij irrationali compongano vno spatio Rationale. Si esponga la retta Rationale AB, e si prendano due numeri ineguali, come C maggiore, ed il minore sia D, che non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato: sopra la Rationale AB [a] *si descriua il quadrato AG; sarà il quadrato AG* [b] *Rationale. Si faccia poi sicome C à D, così il quadrato di AB al quadrato di AE; dal punto E* [c] *si tiri la retta EF, parallela al lato BG. Perche il quadrato di AB al quadrato di AE è come il numero C al numero D; non essendo il numero C al numero D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di AE sarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa i lati AB, AE* [d] *di quei quadrati sono incommensurabili in lunghezza. Hor essendo AB, composta delle due AE, EB, incommensurabili in lunghezza ad AE; la medesima AB* [e] *sarà incommensurabile in lunghezza al restante EB. In oltre, perche il quadrato di AB, cioè AG, al rettangolo AF,* [f] *è come AB ad AE, ed AB è incommensurabile in lunghezza ad AE; sarà il quadrato AG* [g] *incommensurabile al rettangolo AF: Mà il quadrato AG è Rationale, perciò il rettangolo AF sarà irrationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo EG è irrationale. Per la qual cosa i due irrationali, AF, EG, compongono lo spatio AG Rationale, ch' era da dimostrarsi.*



a 46. del 1.
b 8. defin. del 10.
c 31. del 1.
d 9. del 10.
e Cotol. alla 17. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.

Se poi i due Rettangoli AF, EG fossero Rationali, si dimostrerà, che tutto il composto AG è Rationale. Perche l'vno, e l'altro de i Rettangoli AF, EG, si suppone Rationale, perciò saranno frà di loro [h] *commensurabili, per la qual cosa tutto il Composto da loro, cioè AG,* [k] *sarà commensurabile ad ogn' vno di essi, ed in conseguenza tutto il Composto AG, essendo commensurabile à i Rationali AF, EG,* [l] *sarà Rationale; il che era da dimostrarsi.*

h 9. defin. del 10.
k 16. del 10.
l 9. defin. del 10.

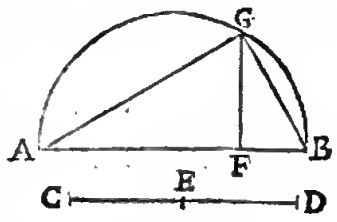
PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XXXV.

Ritrouare due rette linee, incommensurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti insieme, compongano vn' spatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, sia Rationale.

Si ritrouino due rette Medie, come AB, CD, [a] commensurabili sola-

a 32. del 10.

mente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale, in modo, che il quadrato della maggiore AB ſuperi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB. Si facciano le altre coſe, come nell'antecedente propoſitione, e ſi moſtri, come iui ſi fece, che le rette AG, GB ſono incommenſurabili in potenza; e perche il quadrato della media AB è Medio, eſſendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, i quadrati delle due AG, GB, giunti inſieme, comporranno vno ſpatio Medio. Si dimoſtri ancora, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; e perciò l'vno è commenſurabile all'altro. E perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, per coſtruttione, è Rationale, ſarà ancora il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, che gli è commenſurabile, [c] Rationale: mà per il Lemma dopo la 33. propoſitione, il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AG, GB; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Rationale: mà ſi è dimoſtrato, che il compoſto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio; ſi ſaranno dunque ritrouate le due rette AG, GB, incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati, giunti inſieme, compongono vn Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, è Rationale, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



b 47. del 1.

c 9. defin. del 10.

PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XXXVI.

Ritrouare due rette linee, incommenſurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vn' ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, ſia Medio; il quale ſia incommenſurabile al compoſto de i loro quadrati.

Si ritrouino due Medie AB, CD, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn' ſpatio Medio; ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB; e ſi facciano tutte le altre coſe, come fù fatto nella 34. propoſitione di queſto; e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le rette AG, GB, ſono incommenſurabili in potenza. E perche il quadrato della Media AB è Medio, eſſendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, il compoſto de i quadrati delle rette AG, GB, ſarà Medio. In oltre ſi dimoſtri, come ſi fece nella 34. propoſitione di queſto, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; per il che il rettangolo delle due AB, GF, è commenſurabile al rettangolo delle due AB, CD.

a 33. del 10.

b 47. del 1.

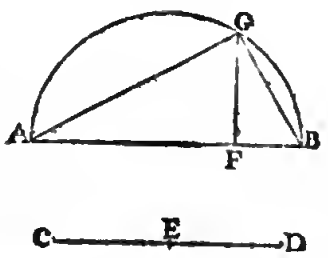
E per-

E perche il rettangolo delle due AB, CD, per costruttione, è Medio; il rettangolo delle due AB, GF, [c] che gli è commensurabile, sarà Medio: mà il rettangolo contenuto dalle due AB, GF, [d] è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio.

c Corol. alla 24. del 10.
d Lem. dopo la 33. del 10.

In oltre, perche AB, per costruttione, è incommensurabile in lunghezza alla retta CD, e la retta CD è commensurabile alla sua metà CE; sarà AB [e] incommensurabile alla retta CE. Prese AB, CE, come basi di due rettangoli, e sia AB altezza commune, sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AB, CE, [f] come le base AB alla base CE; mà il rettangolo delle due AB, CE, è vguale al rettangolo, conteto dalle due AB, GF (per essere GF vguale à CE) sarà il quadrato di AB al rettangolo delle due AB, GF, come AB à CE: il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, come AB ad EC: mà AB è dimostrata incommensurabile in lunghezza à CE; sarà il quadrato di AB [g] incommensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; cioè incommensurabile al Medio, contenuto dalle due AG, GB. Per la qual cosa haueremo trouate le due rette AG, GB, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, composti insieme, fanno vn' spatio Medio; come ancora il rettangolo contenuto dalle medesime è Medio, il quale è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, come fù proposto fare, e dimostrare.

e 13. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.



SCOLIO.

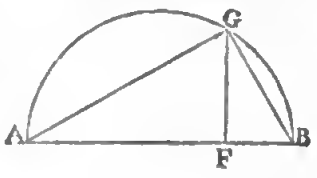
Da quel, che si è detto se ne caua il seguente problema.

Ritrouare due medie, incommensurabili in lunghezza, e potenza.

Essendosi dimostrato, che il quadrato di AB, cioè il composto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio, ed ancora il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, è Medio, e questo è incommensurabile al composto de i quadrati delle rette AG, GB; sarà il lato dell'aggregato de i quadrati di AG, GB Media; e sarà ancora Media il lato del rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, le quali saranno incommensurabili in lunghezza; perche, se non sono incommensurabili in lunghezza, i loro quadrati, [a] *cioè il rettangolo delle due AG, GB, e l'aggregato de i quadrati delle medesime AG, GB, saranno commensurabili,*

a 9. del 10.

ch'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato. Non dunque i detti lati ſono commenſurabili in lunghezza; mà ſono in lunghezza incommenſurabili, e perciò, ſe ſi prenda la retta AB, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle rette AG, GB, e ſi troua vna media proportionale frà le due AG, GB, il di cui quadrato è vguale al rettangolo delle due AG, GB, ſaranno la retta AB, e quella media proportionale trouata, due Medie incommenſurabili in lunghezza, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



PRINCIPIO DE' SENARII.

Per compoſitione.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXVII.

Il Compoſto di due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, è Irrationale; e ſi chiamerà Binomio.

Siano le due Rationali AB, BC, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali ſi aggiungano inſieme, in modo, che facciano la ſola retta linea AC. Dico che tutta la compoſta AC è Irrationale. Perche le Rationali AB, BC, ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſarà la retta AB incommenſurabile in lunghezza alla retta BC;

ed, eſſendo il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di BC, l'aggregato de i due quadrati di AB, e BC, [a] ſarà commenſurabile al quadrato di BC: preſe AB, BC, come baſi di due rettangoli, de' quali BC ſia altezza commune; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di BC, [b] come la baſe AB alla baſe BC: mà AB è incommenſurabile in lunghezza alla retta BC; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] incommenſurabile al quadrato di BC: mà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; ſarà il doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [d] incommenſurabile al quadrato di BC: mà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, è dimoſtrato commenſurabile al quadrato di BC; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, [e] incommenſurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [f] è vguale al quadrato di AC; eſſendo l'aggregato de i quadrati di AB, BC, incommenſurabile al dop-

a 16. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 14. del 10
e 14. del 10
f 4. del 2.

pio

pio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; sarà il quadrato di AC g incommensurabile, tanto all'aggregato de i quadrati di AB, BC, quanto al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. In oltre, per quel, che si è dimostrato, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, è commensurabile al quadrato di BC, ed il quadrato di BC h è Rationale, per essere BC Rationale; sarà l'aggregato de i quadrati di AB, BC, K Rationale: Mà il quadrato di AC, per quel, che si è dimostrato, è incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC: sarà il quadrato di AC l Irrationale. Per la qual cosa il suo lato AC m sarà Irrationale; e questa retta irrationale AC, composta delle due AB, BC, commensurabili solamente in potenza, si chiamerà Binomio, ch'era da dimostrarsi.

g 17. del 10.
h 8. defin. del 10.
K 9. defin. del 10.
l 10. defin. del 10.
m 11. defin. del 10.

COROLLARIO.

Appare da quel, che si è detto, che da due rette commensurabili solamente in potenza, se ne generano due rette Irrationali; cioè quella retta, che frà loro è media proportionale, è Irrationale, e si chiama Media; e quella, che nasce dal loro composto, è Irrationale, e si chiama Binomio.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se due di quelle Medie, commensurabili solamente in potenza, che contengono vn rettangolo Rationale, si compongono insieme; tutta la retta, composta di quelle due, è Irrationale; e si chiamerà Prima Bimediale.

Si compongano le due Medie AB, BC, commensurabili solamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, in modo, che facciano la sola retta linea AC. Dico che la composta AC è irrationale. Perche le Medie AB, BC sono commensurabili solamente in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di BC; e l'aggregato de i quadrati AB, BC, a sarà commensurabile al quadrato di BC. Prese le due AB, BC, come basi di due rettangoli, e l'altezza commune sia BC; sarà il rettangolo delle due AB, BC, al quadrato di BC, b come la base AB alla base BC: ma AB è incommensurabile in lunghezza alla retta BC; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, c incommensurabile al quadrato di BC: ma il rettangolo delle due AB, BC, è commensurabile al doppio rettangolo delle medesime AB, BC; sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, d incommensurabile al quadrato di BC. Fù dimostrato l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, essere commensurabile al quadrato di BC; sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB,

a 16. del 10.
b 1. del 6.
c 10. del 10.
d 14. del 10.

BC,

e 14.del 10. BC, [e] incommenſurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC, [f] è vguale al quadrato della retta AC; eſſendo l'aggregato de i quadrati di AB, BC, incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC; ſarà il quadrato di AC [g] incommenſurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC: ma il doppio rettangolo delle due è commenſurabile al ſemplice rettangolo delle medeſime AB, BC; ſarà il quadrato di AC [h] incommenſurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, BC: ſù ſuppoſto il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, Rationale; ſarà il quadrato di AC [k] Irrationale; ed in conſeguenza il ſuo lato AC [l] ſarà irrationale. La retta AC, compoſta delle due Medie AB, BC, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengono vno ſpatio Rationale, ſi chiamerà Prima Bimediale; il che era da dimoſtrarſi.

f 4.del 2.

g 17.del 10.

h 8.defin. del 10.

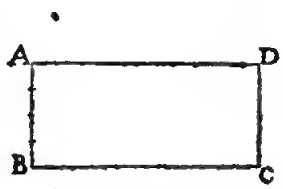
K 10 defin. del 10.

l 11. defin. del 10.

LEMMA.

Il Rettangolo, contenuto da vna retta Rationale, e da vn altra Irrationale, è Irrationale.

Sia il rettangolo ABCD, contenuto dalla Rationale AB, e dall'Irrationale BC. Dico che il rettangolo BD è Irrationale. Se non è Irrationale, ſarà, in conſeguenza, Rationale: applicato dunque il Rationale BD alla Rationale AB, [a] *produrrà il lato BC Rationale, ch'è contro all'ipoteſi, mentre il lato BC è ſuppoſto Irrationale. Non dunque il rettangolo ABCD è Rationale, ma ſarà Irrationale, ch'era da dimoſtrarſi.*



a 21.del 10.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXIX.

Se due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, contengono vn'ſpatio Medio; e quelle ſi compongano in modo, che coſtituiſcano vna ſola retta linea; la compoſta ſarà Irrationale, e ſi chiamerà Seconda Bimediale.

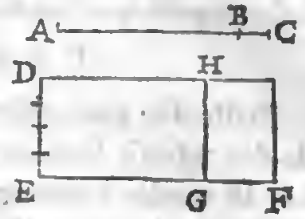
Si compongano le due Medie AB, BC, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano quel rettangolo, che ſi chiama Medio, in modo, che facciano la ſola retta linea AC. Dico che la retta AC è Irrationale. Si eſponga la Rationale DE, alla quale ſi applichi il rettangolo DF, [b] vguale al quadrato di tutta la retta AC; ed alla medeſima Ra-

a 29. del 10.

b 45.del 1.

tio-

tionale DE ſi applichi il rettangolo DG, vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC. Perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] è vguale al quadrato di AC, cioè vguale al rettangolo DF; detrattone l'aggregato de i quadrati di AB, BC, cioè il rettangolo DG, reſta il rettangolo HF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; e perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, per ipoteſi, è Medio; ed il rettangolo delle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC; ſarà il doppio rettangolo delle due AB, BC per il Coroll. alla 24. propoſitione di queſto, Medio: per la qual coſa il rettangolo HF, ch'è vguale al doppio rettangolo delle due AB, BC, ſarà Medio. In oltre perche le due rette AB, BC, per ipoteſi ſono Medie, i loro quadrati, cioè i quadrati di AB, BC, ſaranno Medij; ed eſſendo le rette AB, BC, commenſurabili in potenza, ſarà il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di BC; e l'aggregato de i quadrati di AB, BC, [d] ſarà commenſurabile à ciaſcuno di eſſi quadrati di AB, ouero BC, e, per il Coroll. alla 24. propoſ. di queſto, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, ſarà Medio: ma il rettangolo DG è vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC, ſarà il rettangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH, il lato DE [e] è vguale all'oppoſto HG: ma DE, per coſtruttione, è Rationale, ſarà HG ancora Rationale; alle quali ſono applicati i Medij DG, HF, ſaranno i lati EG, GF, [f] Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale DE. Preſe le rette AB, BC, come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia BC; ſarà il rettangolo delle due AB, BC al quadrato di BC, [g] come AB à BC: ma AB, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza à BC, ſarà il rettangolo delle due AB, BC, [h] incommenſurabile al quadrato di BC. E perche il rettangolo delle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AB, BC; ſarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, cioè il rettangolo HF, [K] incommenſurabile al quadrato di BC. Similmente, eſſendoſi dimoſtrato l'aggregato de i due quadrati AB, BC, commenſurabile al quadrato di BC; ed il quadrato di BC è dimoſtrato incommenſurabile ad HF; ſarà l'aggregato de i due quadrati di AB, BC, [l] cioè il rettangolo DG, incommenſurabile al rettangolo HF. Finalmente perche i rettangoli DG, HF, hanno vna medeſima altezza, il rettangolo DG al rettangolo HF, [m] ſarà come la baſe EG alla baſe GF; ma il rettangolo DG è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo HF; ſarà la retta EG [n] incommenſurabile alla retta GF: dal che le rette EG, GF ſono incommenſurabili in lunghezza: ma le medeſime rette EG, GF, furono dimoſtrate Rationali; ſaranno le Rationali EG, GF, commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 37. propoſ. di queſto, il loro compoſto, cioè la retta EF, ſarà Irrationale; e per l'antecedente Lemma, il rettangolo DF, contenuto



c 4. del 2.

d 16. del 10.

e 34. del 1.

f 23. del 10.

g 1. del 6.

h 10. del 10.

K 14. del 10.

l 14. del 10.

m 1. del 6.

n 10. del 10.

dalla

dalla Rationale DE, e dalla Irrationale EF, è Irrationale. Per la qual cosa il quadrato di AC, ch'è vguale al rettangolo DF, sarà Irrationale; ed il suo lato EF è Irrationale, ch'era da dimostrarsi. Si chiamerà la retta AC, composta delle due AB, BC, seconda Bimediale.

CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propositioni si caua, che, quando due Medie sono commensurabili solamente in potenza, se quelle contengono vn' spatio Rationale, il loro composto è irrationale, e si chiama prima Bimediale: ma se contengono vn' spatio Medio, il loro composto è irrationale, e si chiama seconda Bimediale.

LEMMA.

Se vna retta linea sarà diuisa in due parti ineguali, sarà l'aggregato de i quadrati delle parti maggiore del doppio rettangolo, contenuto dalle parti, per quanto è il quadrato della differenza delle medesime parti.

Sia la retta AB, diuisa in due parti ineguali, come AC, CB; da AC se ne tagli la parte CD, [a] *vguale à CB; sarà AD la differenza di quanto la maggior parte AC supera la minore CB. Dico che l'aggregato de i quadrati delle parti ineguali AC, CB, supera il doppio rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per quanto è il quadrato di AD. Perche la retta AC è diuisa in qualunque modo in D, i quadrati delle due AC, CD,* [b] *sono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CD, col quadrato del restante AD: ma DC è fatta vguale à CB; perciò i quadrati delle due AC, CB sono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CD, ouero dalle due AC, CB, col quadrato di AD. Hor se al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, bisogna aggiungere il quadrato di AD, acciòche sia vguale à i quadrati delle due AC, CB; saranno i quadrati delle due AC, CB, maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per quanto è il quadrato della differenza AD, come fù proposto dimostrare.*

[a] 3. del 1.

[b] 7. del 2.

Appare

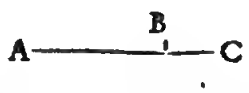
COROLLARIO.

Appare dunque, che ſe vna retta linea è diuiſa in due parti ineguali, i quadrati delle parti ineguali ſono maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti ineguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XL.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, ed i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio; il compoſto di queſte due rette linee ſarà Irrationale, e ſi chiamerà Maggiore.

Siano le due rette AB, BC, [a] incommenſurabili in potenza, che i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio, e queſti ſi aggiungano inſieme, in modo, che facciano la ſola retta AC. Dico che la compoſta AC è Irrationale.



Perche il rettangolo, contenuto dalle due A B, B C, è commenſurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime A B, B C; ed il rettangolo contenuto dalle due A B, B C, per ipoteſi, è Medio; il doppio rettangolo delle due AB, BC, che gli è commenſurabile, per il Corollario primo alla 24. propoſitione, ſarà ancora Medio, e perciò ſarà Irrationale; ma l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, per ipoteſi, è Rationale; ſarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, [b] incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo delle medeſime A B, BC, [c] è vguale al quadrato di AC; ſarà il quadrato di AC, [d] compoſto di quelle due grandezze incommenſurabili, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC: ma l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è Rationale; ſarà il quadrato di AC, [e] che gli è incommenſurabile, Irrationale. Per la qual coſa la retta AC [f] è Irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. E queſta ſi chiamerà Maggiore, ſtante che l'aggregato de i quadrati AB, BC, ch'è Rationale, per l'antecedente Lemma, ſupera il doppio rettangolo delle due AB, BC, ch'è ſtato dimoſtrato Medio, per il quadrato della loro differenza; pigliando Euclide la denominatione dalla maggioranza del Rationale ſopra il Medio.

a 34. del 10.

b 10. defin. del 10.

c 4. del 2.
d 17. del 10.

e 10. de fin. del 10.
f 11. defin. del 10.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XLI.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Rationale; il compoſto di queſte due rette linee ſarà Irrationale; e ſi chiamerà linea potente per lo ſpatio Rationale, e Medio.

a 35. del 10.

Siano le due rette AB, BC, [a] incommenſurabili in potenza, che i loro quadrati compongano vno ſpatio Medio, ed il rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC, ſia Rationale, e queſte giunte inſieme, compongano la retta AC. Dico che la retta AC è Irrationale. Perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; eſſendo il rettangolo delle due AB, BC, per ipoteſi, Rationale, ſarà il doppio rettangolo delle medeſime AB, BC, [b] Rationale: ma l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è Medio, e perciò Irrationale; il doppio rettangolo dunque delle due AB, BC, [c] ſarà incommenſurabile all'aggregato de i quadrati delle medeſime AB, BC. E perche il quadrato di AC ſi compone de i due incommenſurabili; cioè del doppio rettangolo delle due AB, BC, [d] e dell'aggregato de i quadrati delle medeſime AB, BC; ſarà il quadrato di AC [e] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC: ma, per quel, che ſi è dimoſtrato, il doppio rettangolo delle due AB, BC, è Rationale; perciò il quadrato di AC, che gli è incommenſurabile, [f] ſarà irrationale; ed il ſuo lato, cioè la retta AC, [g] ſarà Irrationale, che era da dimoſtrarſi. E queſta retta linea AC ſi chiamerà linea potente, per lo ſpatio Rationale, e Medio, cioè, che la potenza, ò quadrato, della linea AC, ſi compone del Rationale, ch'è il doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; e del Medio, ch'è l'aggregato de i quadrati delle medeſime AB, BC.

b 9. defin. del 10.

c 10. defin. del 10.

d 4. del 2.

e 17. del 10.

f 10. defin. del 10.

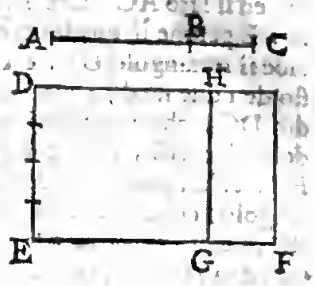
g 21. defin. del 10.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XLII.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro ſia Medio, incommenſurabile al compoſto de i loro quadrati; quelle rette linee, giunte inſieme, coſtituiſcono vna retta linea

Irra-

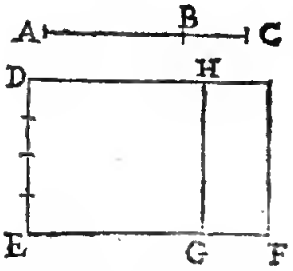
Irrationale; E ſi chiamerà linea potente, per due ſpatij Medij.



Siano le due rette AB, BC, [a] incommenſurabili in potenza, ed i due quadrati di AB, BC, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; come anco il rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC, ſia Medio, il quale ſia incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC. Dico che, compoſte le rette AB, BC, in modo, che facciano la ſola retta linea AC, la retta linea AC ſarà Irrationale. Si eſponga la Rationale DE, alla quale ſi applichi il rettangolo DF, [b] vguale al quadraro della retta AC; ed alla medeſima Rationale DE s'applichi il rettangolo DG, vguale all'aggregato de i quadrati delle rette AB, BC. Perche il quadrato della retta AC, cioè il rettangolo DF, [c] è vguale à i quadrati delle parti AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti AB, BC, ed i quadrati delle parti AB, BC, giunti inſieme, ſono vguali al rettangolo DG; ſarà il rimanente rettangolo HF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti AB, BC. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; ed il rettangolo delle due AB, BC, per ipoteſi, è Medio; ſarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, che gli è commenſurabile, per il Coroll. alla 24. propoſitione di queſto, Medio: mà il doppio rettangolo delle due AB, BC, è dimoſtrato vguale al rettangolo HF; ſarà il rettangolo HF Medio. Similmente l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è Medio; il rettangolo DG è fatto vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC; ſarà il rettangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH [d] i lati oppoſti DE, HG ſono frà di loro vguali: ma DE, per coſtruttione, è Rationale, ſarà ancora HG Rationale; alle quali, applicati i medij DG, HF, ne riſultano le rette EG, GF, [e] Rationali, & incommenſurabili in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è incommenſurabile al rettangolo delle medeſime AB, BC; ed il rettangolo delle due AB, BC, è commenſurabile al doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, [f] cioè il rettangolo DG, incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC, cioè al rettangolo HF; ma il rettangolo DG al rettangolo HF, [g] è come EG à GF; eſſendo il rettangolo DG incommenſurabile al rettangolo HF, ſarà EG [h] incommenſurabile à GF; per il che le due rette EG, GF ſono incommenſurabili in lunghezza. E perche le rette EG, GF ſono ſtate dimoſtrate Rationali; perciò ſono commenſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa tutta la retta EF, [K] compoſta di quelle due, ſarà irrationale; ed il rettangolo, contenuto dalla irrationale EF, e dalla Rationale DE, per il Lemma dopo la 38. propoſiti one

a 36. del 10.
b 45. del 1.
c 4. del 2.
d 34. del 1.
e 23. del 10.
f 13. e 14. del 10.
g 1. del 6.
h 10. del 10.
K 37. del 10.

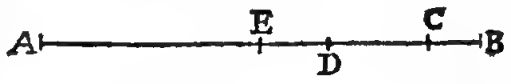
sitione di questo, sarà irrationale; ma il rettangolo DF, per costruttione, è vguale al quadrato di AC; sarà il quadrato di AC irrationale, ed il lato AC sarà irrationale. E perche il quadrato di AC, cioè il rettangolo DF, è composto de i due medij; cioè del medio DG, ch'è vguale à i quadrati delle due AB, BC, e del medio HF, ch'è vguale del doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, perciò la retta AC si chiama linea potente per due spatij Medij, il che era da dimostrarsi.



I 11. defin. del 10.

LEMMA I.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, e di nuouo sia diuisa in due altre parti ineguali; i quadrati delle parti più ineguali, sono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali.



Sia la retta linea AB diuisa prima in due parti ineguali in C, e di nuouo la medesima AB sia diuisa in due altre parti ineguali, come in D; e siano le due AC, CB più ineguali delle due AD, DB. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB sono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Si diuida la retta AB [a] *in due parti vguali in E; ò il punto D cade frà i punti E, & C, ouero cade frà i punti A, ed E; cada prima frà i punti E, & C. Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, sarà il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC,* [b] *vguale al quadrato di EB; e per l'istessa ragione, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di ED, è vguale al medesimo quadrato di EB; e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, col quadrato di EC, è vguale al rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di ED: se ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, & ED, resta il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, minore del rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, sarà minore del doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB. In oltre, perche la retta AB è diuisa in C, i quadrati delle parti AC, CB,*

a 10. del 1.

b 5. del 2.

col

col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti AC, CB, [c] *è vguale al quadrato di AB. Similmente, eſſendo AB diuiſa in D, i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti, è vguale al medeſimo quadrato di AB. Per la qual coſa i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle parti AC, CB, ſarà vguale à i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medeſime parti AD, DB. Da vna di queſte vgualità ſe ne leui il doppio rettangolo delle parti AC, CB; e dall'altra ſe ne leui il doppio rettangolo delle parti AD, DB; eſſendoſi dimoſtrato il doppio rettangolo delle due AC, CB, minore del doppio rettangolo delle due AD, DB, reſtano i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

[c] 4. del 2.

Cada il punto D frà i punti A, ed E. Perche AE è vguale ad EB,

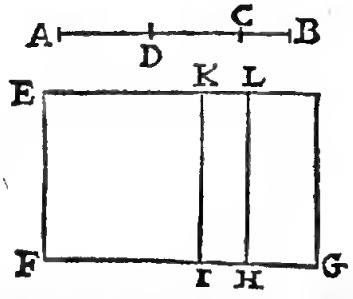
ſarà AD minore di DB; e, per l'iſteſſa ragione, CB ſarà minore di AC. E perche le parti AC, CB, ſi ſuppongono più ineguali delle due AD, DB, ſarà AD maggiore di CB: ma EB è vguale ad EA, il reſtante EC ſarà maggiore di ED. Hor perche la retta AB è diuiſa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, [d] *ſarà vguale al quadrato di EB. Similmente la retta AB è diuiſa in due parti ineguali in D, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di AE, cioè al quadrato di EB; per la qual coſa il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, ſarà vguale al rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE: ſe ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, e di DE, reſta il rettangolo delle parti AC, CB, minore del rettangolo delle parti AD, DB; e, procedendoſi, come prima ſi fece, ſi dimoſtrerà, che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, ſono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, come fù propoſto dimoſtrare.*

[d] 5. del 2.

LEMMA II.

Suppoſte le medeſime coſe. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, ſuperano i quadrati delle parti meno ineguali, AD, DB, per quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB, ſupera il doppio rettangolo delle parti più ineguali AC, CB.

a 45. del 1. *A qualunque retta EF,* [a] *ſi applichi il rettangolo EG, vguale al quadrato di AB; ed alla medeſima retta EF ſi applichi il rettangolo EH, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti più ineguali AC, CB; e ſimilmente ad EF ſi applichi il rettangolo EI, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Perche i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, per l'antecedente Lemma, ſuperano i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, perciò il rettangolo EH ſarà maggiore del rettangolo EI, la loro differenza ſia, per eſempio, il rettangolo KH. Dicoche*



il rettangolo KH è ancora la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti AD, DB, ſupera il doppio rettangolo delle parti AC, CB. Perche i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle me-

b 4. del 2. *deſime parti AC, CB,* [b] *è vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, per coſtruttione, è vguale al rettangolo EH; ſarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle parti AC, CB. Similmente, perche i quadrati delle*

c 4. del 2. *parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medeſime parti AD, DB,* [c] *è vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AD, DB, per coſtruttione, è vguale al rettangolo EI; ſarà il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; per la qual coſa il rettangolo KH ſarà la differenza di quanto il rettangolo KG ſupera il rettangolo LG: ma il rettangolo KG è vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; ed il rettangolo LG è vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti più ineguali AC, CB; ſarà KH la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali ſupera il doppio rettangolo delle parti più ineguali; ma fù dimoſtrato, che il medeſimo rettangolo KH è la differenza di quanto i quadrati delle parti più ineguali ſuperano i quadrati delle parti meno ineguali; la differenza dunque di quanto i quadrati delle parti più ineguali ſuperano i quadrati delle parti meno ineguali, è vguale alla differenza, di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali ſupera il doppio rettangolo delle parti più ineguali, ch'era da dimoſtrarſi.*

COROL-

COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che il doppio rettangolo delle parti AC, CB, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLIII.

La retta di due nomi, che ſi dice Binomio, ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſol punto.

Sia la retta compoſta di due nomi AB, diuiſa ne i ſuoi nomi, nel punto C; cioè, che le parti AC, CB, ſiano Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, come appare nella 37. propoſitione di queſto. Dico che la retta AB non ſi può diuidere in due altre Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, in altro punto, fuori del punto C. Diuidaſi, s'è poſſibile, in altri nomi ineguali à i due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le parti AD, DB ſiano Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza: è manifeſto che la retta AB non è diuiſa in C in due parti vguali; perche, ſe foſſe diuiſa in due parti vguali in C, le rette AC, CB ſarebbero commenſurabili in lunghezza, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che le rette AC, CB ſono commenſurabili ſolamente in potenza. Per l'iſteſſa ragione la retta AB non è diuiſa in D, in due parti vguali. In oltre, per ipoteſi, i nomi BD, DA non ſono i medeſimi, che i nomi AC, CB, cioè le parti BD, DA, non ſono vguali alle parti AC, CB; cioè la maggior parte BD non è vguale alla maggior parte AC; ne la minore AD è vguale alla minore CB; ſaranno le parti AC, CB, ò più ineguali, ò meno ineguali delle parti BD, DA; e per il primo de gli antecedenti Lemma, i quadrati delle parti AC, CB, ò ſono maggiori, ò minori de i quadrati delle parti AD, DB. Di più, perche le rette AC, CB, per ipoteſi, ſono Rationali, i loro quadrati, cioè i quadrati delle rette AC, CB [a] ſono Rationali, ed il compoſto de i quadrati delle rette AC, CB, per lo Scolio alla 34. propoſitione, ſarà Rationale. E perche le rette AD, DB, per la fatta ſuppoſitione, ſono Rationali, l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſarà Rationale: mà il Rationale ſupera il Rationale (per lo Scolio alla vigeſimaſettima di queſto) per vn Rationale; eſſendo l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ch'è Rationale, ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB, ch'è Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſara Rationale: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de quadrati di AD, DB (per il ſecondo de gli antecedenti Lemma) è vguale alla differenza, ch'è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo

[a] 8. defin. del 10.

golo delle parti AD, DB; ſarà la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti di AD, DB Rationale. Finalmente, perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle due Rationali AC, CB, commenſurabili ſolamente in potenza, [b] è Medio; il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commenſurabile, [c] ſarà medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. Di più, per l'antecedente Corollario, il doppio rettangolo delle parti AC, CB, che ſi diſſe eſſer Medio, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB, che ſimilmente è Medio, e perciò l'vno ſupera l'altro di qualche quantità: e perche il medio non ſupera il medio per ſpatio Rationale, [d] mà lo ſupera per vno ſpatio Medio; la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB ſarà Medio; fù antecedentemente dimoſtrata Rationale, ſarebbe medio, e ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque la retta AB, compoſta di due nomi, ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, che nel ſolo punto C, come fù propoſto dimoſtrare.

b 22. del 10.
c Corol. alla 24. del 10.
d 27. del 10.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIV.

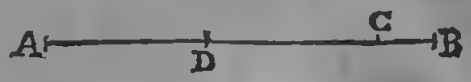
La retta, che ſi chiama prima Bimediale, ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſol punto.

Sia AB la prima Bimediale, diuiſa in C in due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale, come richiede la propoſitione 38. di queſto. Dico che AB non ſi diuide in due altre Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vno ſpatio Rationale, in altro punto, fuori del punto C. Diuidaſi, s'è poſſibile, in due altre medie, ineguali alle due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le Medie AD, DB ſiano commenſurabili ſolamente in potenza, e contengano vn rettangolo Rationale; ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le parti AC, CB, ò ſono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB, e che l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, è maggiore, ò minore dell'aggregato de i quadrati di AD, DB. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle medeſime parti AC, CB, per ipoteſi, è Rationale; il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, che gli è commenſurabile, [a] ſarà Rationale. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: mà vn Rationale ſupera vn Rationale, [b] per vno ſpatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB ſarà Rationale: mà, per il ſecondo Lemma dopo la 42. propoſitione, la differenza frà il doppio

a 9. defin. del 10.
b Scol. alla prop. 27. del 10.

rettan-

rettangolo delle due AC,CB,ed il doppio rettangolo delle due AD,DB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB,per la qual cosa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà spatio Rationale. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipotesi, sono Medie commensurabili solamente in potenza; saranno i quadrati delle rette AC, CB Medij, frà di loro commensurabili, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB [c] sarà commensurabile all'vno, ed all'altro quadrato: mà l'vno, e l'altro quadrato è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per il Corollario alla 24. propositione di questo, Medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è ancora Medio: e perche il Medio [d] per vno spatio Rationale, non sarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD,DB spatio Rationale: mà fù dimostrato antecedentemente, che questa differenza è spatio Rationale, sarebbe, e non sarebbe spatio Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la Bimediale AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, che nel punto C, come fù proposto dimostrare.



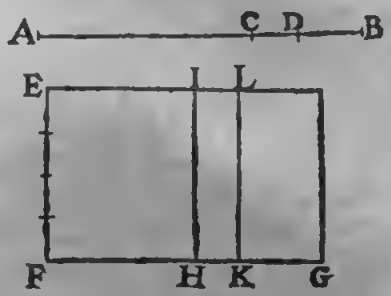
c 16.del 10.

d 27.del 10.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLV.

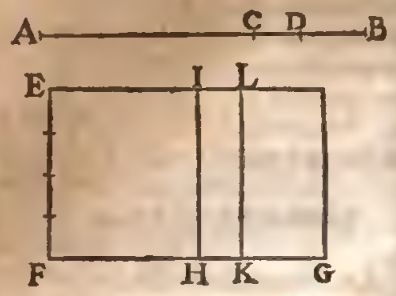
La seconda delle due Medie, cioè la Bimediale seconda, si diuide nelle sue Medie in vn sol punto.

Sia AB la seconda Bimediale, diuisa in C, nelle due Medie AC, CB, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Medio, come ricerca la 39. propositione di questo. Dico che AB non si diuide in due altre medie, commensurabili solamente in potenza, che contengano vno spatio Medio, in altro punto, fuor che nel punto C. Diuidasi, s'è possibile, in due Medie, diuerse dalle due AC, CB, cioè ineguali alle due AC, CB nel punto D, in modo, che le medie AD, DB siano cõmensurabili solamente in potenza, e contengano vno spatio Medio. Si dimostri, come si fece nella 43. propositione, che i quadrati delle rette AC, CD, ò sono maggiori, ouero minori de i quadrati delle rette AD, DB; si esponga la Rationale EF, alla quale si applichi il rettangolo EG, [a] vguale al quadrato di AB; ed alla medesima Rationale EF si applichi il rettangolo EH, vguale all'ag-



a 45. del 1.

gregato de i quadrati delle rette AC, CB; essendo i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [b] vguali al quadrato di AB, cioè vguali al rettangolo EG; ed i quadrati di AC, CB sono vguali al rettangolo EH, sarà il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo IG. Nell'istesso modo, se si applica alla Rationale EF [c] il rettangolo EK, vguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; sarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; perciò il rettangolo EK sarà ineguale al rettangolo EH; dal che le rette FK, FH [d] sono ineguali. In oltre, perche i quadrati di AC, CB, per il Lemma alla 39. propositione di questo, sono maggiori del doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà EH maggiore di IG: per la qual cosa EH [e] sarà maggiore della metà di EG; ed il lato FH sarà maggiore della metà di FG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che FK è maggiore della metà di FG, ed in conseguenza le parti FH, HG sono ò più ineguali, ò mene ineguali, delle parti FK, KG. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipotesi, sono Medie, commensurabili in potenza; i quadrati di AC, CB saranno Medij frà di loro commensurabili, ed il composto de i quadrati di AC, CB [f] sarà commensurabile tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato DC: si disse, che i quadrati di AC, & CB, sono Medij; l'aggregato de quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, ch'è commensurabile ad ogn'vno di loro, per il Corollario alla 24. propositione di questo, sarà ancora Medio. Nell'istessa maniera si prouerà, che il rettangolo EK è Medio; e perche i Medij EH, EK sono applicati alla Rationale EF, i lati FH, FK [g] saranno Rationali, incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Similmente, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime parti AC, CB, che gli è commensurabile, cioè il rettangolo IG, [h] sarà ancora Medio. E nell'istesso modo si dimostrerà, che LG è medio; applicati dunque i due rettangoli IG, LG alla rationale LK, cioè IH, ouero EF, gli altri lati HG, KG [k] saranno Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Si prendano le rette AC, CB, come basi di due rettangoli, ed AC sia altezza commune; sarà il quadrato di AC al rettangolo delle parti AC, CB, [l] come AC à CB: mà AC, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza à CB; sarà il quadrato di AC [m] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. Hor essendo le due AC, CB, per ipotesi, commensurabili solamente in potenza, sarà il quadrato di AC commensurabile al quadrato di CB; e l'aggregato de i due quadrati di AC, CB [n] sarà commensurabile al quadrato di AC: mà il quadrato di AC è incommensura-



bile

b 4. del 2.
c 45. del 1
d 1. del 6. & Scol. alla 16 del 5.
e 1. del 6. & Scol. alla 16. del 5.
f 16. del 10.
g 23. del 10.
h Corollario alla 24. del 16.
k 23. del 10.
l 1. del 6.
m 10. del 10
n 16. del 10.

bile al rettangolo delle due AC, CB, ſarà l'aggregato de i quadrati AC, CB [o] incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB; ſarà l'aggregato de i quadrati AC, CB, cioè EH, [p] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo IG. Et eſſendo EH ad IG, [q] come la baſe FH alla baſe HG; ſarà FH [r] incommenſurabile ad HG; dal che le due FH, HG ſono incommenſurabili in lunghezza: mà le rette FH, HG furono dimoſtrate Rationali, in conſeguenza ſarà FH commenſurabile ſolamente in potenza ad HG. Per la qual coſa tutta la retta FG [s] ſarà irrationale, e [t] ſarà quella linea, chiamata Binomio, diuiſa ne i ſuoi nomi nel punto H. Tutto quel, che ſi è fatto, conſiderando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG; ſi faccia conſiderando le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; e ſi dimoſtrerà, che tutta FG è quella retta, che chiamiamo Binomio, diuiſa ne i ſuoi nomi nel punto K. Per la qual coſa il medeſimo binomio ſarà diuiſo ne i ſuoi nomi nel punto H, ed ancora nel punto K, [u] ch'è contro alla 43. propoſitione. Non dunque la Bimediale ſeconda AB ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimoſtrarſi.

o Scol. alla 14. del 10.
p 14. del 10.
q 1. del 6.
r 10. del 10.
s 37. del 10.
u 43. del 10.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVI.

La Maggiore ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſolo punto.

Sia la Maggiore AB, diuiſa ne i ſuoi nomi nel punto C, in modo, che le parti AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Rationale; ed il rettangolo delle medeſime ſia Medio, come richiede la 40. propoſitione di queſto.

Dico che AB non ſi diuide in altro punto ne i nomi, che ritengano le medeſime conditioni. Si diuida, ſe è poſſibile, nel punto D, in modo, che le due AD, DB, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſia Rationale; ed il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, ſia Medio. Si dimoſtrerà, come ſi fece nella 43, che le parti AC, CB, ò ſono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB; e per il 2. Lemma dopo la propoſ. 42. di queſto, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'iſteſſa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CD, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre, eſſendo, per ipoteſi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, Rationale; e l'aggregato de i quadrati AD, DB, ſimilmente Rationale; ſarà [a] la loro differenza Rationale: ma ſi diſſe, che queſta differenza è vguale alla differenza, che è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB: la differenza dunque frà il doppio rettan-

a Scol. alla 27. del 10.

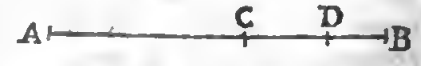
golo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, ſarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, il doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, che gli è commenſurabile, per il Corollario alla 24. propoſitione, ſarà Medio. E nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. E perche il Medio non ſupera il Medio [b] per vno ſpatio Rationale, la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, non ſarà Rationale: ma antecedentemente tal differenza fù moſtrata Rationale; ſarà, e non ſarà Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque la Maggiore AB ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimoſtrarſi.

b 27.del 10.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XLVII.

La linea Potente per il Rationale, e Medio, ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſol punto.

Sia AB la linea Potente per il Rationale, e Medio, diuiſa ne i ſuoi nomi nel punto C; cioè, che le rette AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati delle medeſime AC, CB, ſia Medio; ed il Rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Rationale, come ricerca la 41. propoſ. di queſto. Dico che AB non ſi diuide in altri nomi, che habbiano le medeſime conditioni, in altro punto. Diuidaſi, s'è poſſibile, nel punto D, in modo, che le rette AD, DB, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i loro quadrati ſia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, ſia Rationale. Si dimoſtri, come ſi fece nella 43. propoſ. di queſto, che le due AD, DB ſono più, ò meno ineguali, delle due AC, CB; e per il 2. Lemma dopo la 42. di queſto, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'iſteſſa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB: ma la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, per lo Scolio alla 27. propoſ. è Rationale (ſtante che ogn'vno di quei rettangoli, per ipoteſi, è Rationale) ſarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. E perche gli aggregati di quei quadrati, per ipoteſi, ſono Medij, ed il Medio non ſupera il Medio [a] per ſpatio Rationale; ſarebbe tal differenza Rationale, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque la retta AB ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, fuor che nel punto C, ch'era da dimoſtrarſi.



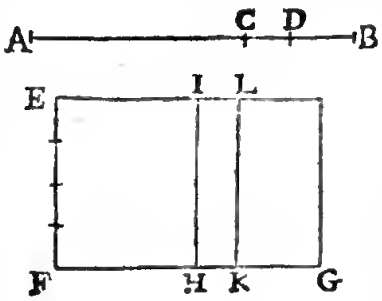
a 27.del 10.

THEO-

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIONE XLVIII.

La linea potente per due Medij, ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſol punto.

Sia la linea potente per due Medij AB, diuiſa ne i ſuoi nomi nel punto C, in modo, che le rette AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i loro quadrati ſia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati, come ricerca la propoſ. 42. di queſto. Dico che AB non ſi diuide in altri nomi, delle medeſime conditioni, in altro punto, fuori del punto C. Si diuida, s'è poſſibile nel punto D, in altri nomi, in modo, che le parti AD, DB, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medeſime parti AD, DB, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati. Si faccia la medeſima coſtruttione della 45. propoſ. e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le parti FH, HG, ò ſono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti FK, KG. Perche il rettangolo delle due AC, CB, per ipoteſi, è Medio, il ſuo doppio, cioè il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commenſurabile, per il Corollario alla 24. di queſto, ſarà Medio: ma, per coſtruttione, il rettangolo IG è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; ſarà il rettangolo IG Medio. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il rettangolo LG è Medio. In oltre, perche l'aggregato de i quadrati AC, CB, per ipoteſi, è Medio, il rettangolo EH, che, per coſtruttione, è vguale all'aggregato di quei quadrati, ſarà Medio. E nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il rettangolo EK è Medio. E perche i medij EH, IG, ſono applicati alla Rationale EF; i lati FH, HG, [a] ſaranno Rationali, e ſaranno incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF. E per ſimile ragione le rette FK, KG, ſono Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF. Di più, eſſendo, per ipoteſi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB, [b] ſarà ancora incommenſurabile al doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, cioè al rettangolo IG: ma il rettangolo EH al rettangolo IG [c] è come FH ad HG; ed EH è dimoſtrato incommenſurabile ad IG; ſarà FH [d] incommenſurabile ad HG. Dal che le due FH, HG ſono incommenſurabili in lunghezza: ma furono dimoſtrate Rationali; ſaranno le due FH, HG, [e] commenſurabili ſolamente in potenza. Per la



a 23. del 10.

b Corol. alla 24. del 10.

c 1. del 6.

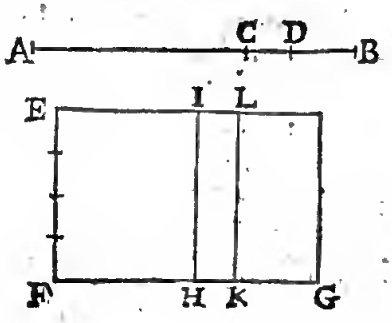
d 10. del 10.

e 10. defin. del 10.

qual

f 37. del 10. qual cosa tutta la retta FG f sarà irrationale, e sarà quella, che fù chiamata Binomio: la quale è diuisa ne i suoi nomi nel punto H. Tutto quello, che si è fatto, considerando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG, si farà ancora, col considerare le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; ed in tal modo si dimostrerà, che FG g è quella retta, che si chiama Binomio, e che si diuide ne i suoi nomi nel punto K. Per la qual cosa il Binomio FG si diuide ne i suoi nomi nel punto H, e si diuide ancora nel punto K, ch'è contro alla 43. propositione di questo. Non dunque la retta AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuor che nel punto D, come fù proposto dimostrare.

g 37. del 10.



DEFINITIONI SECONDE.

Proposte due rette linee, vna Rationale, e l'altra sia Binomio, diuisa ne i suoi nomi, in modo, che il quadrato del maggior nome superi il quadrato del minor nome d'vna retta linea, commensurabile in lunghezza al maggior nome.

I.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, la composta del maggiore, è minor nome, si chiamerà Primo Binomio.

I I.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si chiamerà Secondo Binomio.

I I I.

Se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si dirà Terzo Binomio.

Di nuouo, se il quadrato del maggior nome è maggiore del quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile al maggior nome.

IV.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si chiamerà Quarto Binomio.

V.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si dirà Quinto Binomio.

VI.

E se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, si chiamerà Sesto Binomio.

Procedendo Euclide col suo impareggiabil ordine, dalle cose semplici alle composte, e da queste alle più composte; dopo dimostrata la commensurabilità, ed incommensurabilità delle semplici grandezze frà di loro; fatta la comparatione di queste alla Rationale, e spiegato il nascimento, e natura delle Medie; passa alla generatione delle composte, e dimostra, che sono tutte Irrationali, disponendo sempre le cose con ordine accomodato alla nostra intelligenza; cioè, dal Rationale fà passaggio al Medio, e dal Medio all'Irrationale. E perche le rette Irrationali sono innumerabili, ne scieglie le più elementari, e le distribuisce in tredici classe; cioè, una semplice, sei per compositione, e sei per sottrattione. Quelle per compositione sono le sei seguenti, cioè. Quelle rette, che separatamente sono composte di due Rationali, commensurabili solamente in potenza, costituiscono il primo genere d'irrationali; ed ogn'una si chiama Binomio, come apparisce nella 37. propos. di questo. Quelle, che separatamente sono composte di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano uno spatio Rationale, costituiscono il secondo genere; ed ogn'una si chiama prima Bimediale, come nella propositione 38. Similmente quelle, che si compongono di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono uno spatio Medio, formano il terzo genere; ed ogn'una si chiama seconda Bimediale, come nella 39. propositione. Le rette linee poi, che separatamente sono composte da due linee rette, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, insieme giunti, compongano un Rationale, ed il rettangolo, contenuto da loro, è Medio; costituiscono il quarto genere, ed ogn'una si chiama Maggiore, come nella 40. propositione. Oltre à ciò, quelle rette linee, che separatamente sono composte di due linee rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano un Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio; costituiscono il quinto genere; ed ogn'una si chiama Potente per un Rationale, ed un Medio, come nella 41. propositione. E finalmente quelle rette linee, che separatamente sono composte di due rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano un Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, costituiscono il sesto genere, ed ogn'una si chiama

Poten-

Potente di due Medie, come nella 42. propoſitione. Spiegata la generatione di queſte ſei linee, e douendole comparare alla Rationale, diuide prima il genere de' Binomij in ſei linee di due nomi, cioè in ſei Binomij, con queſt' ordine.

Perche ogni Binomio è compoſto di due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, queſte due rette, che compongono il Binomio, non poſſono eſſere ambedue commenſurabili in lunghezza alla Rationale; perche ſe ciò foſſe, ſarebbero frà di loro commenſurabili in lunghezza, ed il loro aggregato ſarebbe vna linea Rationale, ch'è contro à quel, che ſi dimoſtrò nella generatione del Binomio alla propoſitione 37: perilche ò vna di quelle, ò l'altra, ò niſſuna, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale. E di queſti due nomi, che compongono il Binomio, vno ſarà maggiore dell'altro: perche, ſe foſſero vguali, ſarebbero commenſurabili frà di loro in lunghezza, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi ſuppongono commenſurabili ſolamente in potenza. Hor eſſendo ineguali i nomi, che compongono il Binomio, il quadrato del maggior nome ſuperarà il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome; Se il quadrato del maggior nome ſupera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome, ne naſcono trè Binomij in queſta forma. Se il maggior nome è commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiama primo Binomio. Se alla Rationale ſarà commenſurabile in lunghezza il minor nome, ſi dirà ſecondo Binomio. E ſe niſſuno de' nomi è commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ſi chiamerà terzo Binomio. In oltre quando il quadrato del maggior nome ſupera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza al maggior nome, ne naſcono tre altri Binomij, in queſto modo. Se il maggior nome ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiamerà quarto Binomio. Se poi alla Rationale ſarà commenſurabile in lunghezza il minor nome, ſi chiamerà quinto Binomio. E ſe niſſuno de i due nomi ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, quello ſi chiamerà ſeſto Binomio. E di queſti conſeguentemente ſe ne dimoſtra la loro generatione.

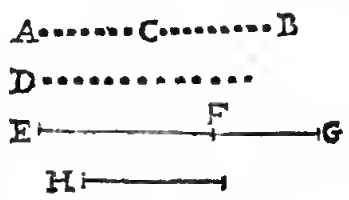
Quanto poi à gli altri cinque generi di linee ſopra nominati, come la prima Bimediale, la ſeconda Bimediale, la Maggiore &c. non ſi diuidono in altri generi di linee, come ſi è fatto del Binomio; ſtante che tutti i nomi, che compongono queſte linee, ſono incommenſurabili in lunghezza alla Rationale.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLIX.

Ritrouare il Primo Binomio.

Per la ſeconda parte del Corollario alla 29. propoſitione di queſto, ſi trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non ſia numero quadrato: ſarà la proportione di AB, à BC, come numero quadrato à numero quadrato; e la proportione di BA ad AC non ſara come numero quadrato à numero quadrato. Si eſponga poi qualche Rationale D, e ſi prenda EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D, ſarà EF Rationale. Si faccia poi, per il Corollario alla 6. propo-

ſitione di queſto, ſi come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG ſarà vna di quelle linee, che chiamiamo Primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, ſaranno i quadrati delle due EF, FG, [a] frà di loro commenſurabili; dalche le rette EF, FG ſono almeno commenſurabili in potenza; ma la retta EF fù dimoſtrata Rationale, ſarà FG, [b] che gli è commenſurabile in potenza, Rationale. E perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, ed il numero AB al numero AC, per coſtruttione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato; per la qual coſa le rette EF, FG, [c] ſono incommenſurabili in lunghezza: Ma le medeſime EF, FG, furono dimoſtrate Rationali, commenſurabili in potenza; il loro compoſto, cioè tutta la retta EG, [d] ſarà irrationale, e ſarà vna di quelle, che habbiamo chiamata Binomio. Dico che EG è primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, e, per coſtruttione, AB è maggiore di AC; ſarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG; dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di FG, per il Lemma alla propoſitione decima quarta, e quel, che reſta, ſia il quadrato della retta H; ſarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF ſupera il quadrato di FG. In oltre, perche il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuerſione della proportione, l'antecedente AB alla differenza frà l'antecedente AB, ed il conſeguente AC, cioè à BC, [e] ſarà come il quadrato di EF, ch'è antecedente, alla differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, ch'è conſeguente, cioè al quadrato di H. Hor eſſendo AB à BC, come il quadrato di EF al quadrato di H; e la proportione di AB à BC, per coſtruttione, è come numero quadrato à numero quadrato; ſarà il quadrato di EF al quadrato di H, come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette FE, & H, [f] ſono commenſurabili in lunghezza. Finalmente, perche il quadrato del maggior nome EF ſupera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome EF; ed il maggior nome EF, per coſtruttione, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D, per la prima delle antecedenti definitioni, ſarà EG quella retta, che ſi chiama primo Binomio, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

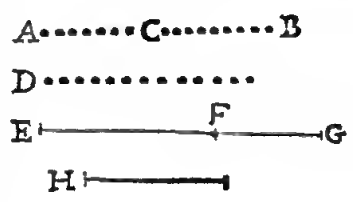


[a] 6. del 10.
[b] 6. defin. del 10.
[c] 9. del 10.
[d] 37. del 10.
[e] Corol. al. la 19. del 5.
[f] 9. del 10.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE L.

Ritrouare il ſecondo Binomio.

Si trouino, come si disse nell'antecedente propositione, due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC, non sia numero quadrato. Sia esposta la Rationale D, e sia presa la retta FG, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta GF [a] Rationale. Si faccia per il Corollario alla sesta propositione, si come il numero AC al numero AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG sarà il secondo Binomio, che si cerca. Perche il quadrato di GF al quadrato di FE è come il numero AC al numero AB, saranno i quadrati delle due GF, FE, [b] commensurabili; dal che le rette GF, FE sono commensurabili, almeno in potenza: ma la retta GF è dimostrata Rationale, sarà la retta FE, [c] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. Di nuouo, perche AC ad AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE; ed il numero AC al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di GF al quadrato di FE è come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette GF, FE, [d] sono incommensurabili in lunghezza: furono già dimostrate Rationali, in conseguenza le rette GF, FE, sono commensurabili solamente in potenza, ed il loro aggregato, cioè tutta la retta EG, [e] sarà irrationale, e sarà quella retta, che si chiama Binomio. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo secondo Binomio. Perche il numero AC al numero AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE, inuertendo, AB ad AC sarà come il quadrato di EF al quadrato di FG: ma BA, per costruttione, è maggiore di AC; sarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG. Dal quadrato di EF, per il Lem. alla 14. propos. di questo, se ne sottragga il quadrato di FG, e quel, che resta, sia il quadrato di H; sarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG. E procedendo come nell' antecedente propositione, si dimostrerà, che la retta H è commensurabile in lunghezza al maggior nome EF. E perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza al maggior nome EF; e, per costruttione, il minor nome FG è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà EG quella retta, che si chiama secondo Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.



a 6. defin. del 10.

b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

e 37. del 10.

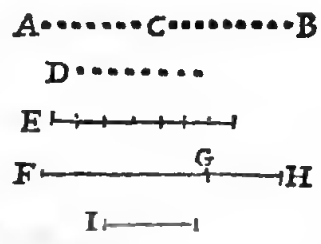
PROBLEMA XV. PROPOSITIONE LI.

Ritrouare il terzo Binomio.

Per la seconda parte del Corollario alla 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non sia numero quadrato; poi si prenda vn altro numero D non quadrato,

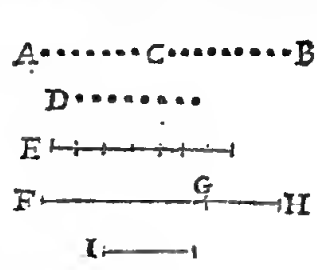
che

che non habbia ad AC la proportione di numero quadrato à numero quadrato, il che facilmente s'ottiene, ſe ſi fà il numero D maggiore di AC per vna vnità, ò due, al più; cioè ſe, facendoſi D maggiore di AC d'vna vnità, fuſſe numero quadrato, all' hora s'aggiungerà à D vn'altra vnità; mà ſe con l'aggiunta d'vna ſola vnità non fuſſe numero quadrato, non farà biſogno aggiungerui altra vnità, perche, in quel caſo, il numero D non ſarà piano, ſimile ad AC, e perciò non hauerà la proportione ad AC, come numero quadrato à numero quadrato; ed oltre à ciò, non eſſendo D numero quadrato, ne meno hauerà la proportione ad AB, come numero quadrato à numero quadrato. Si eſponga poi qualunque Rationale E, e, per il Corollario alla ſeſta propoſitione, ſi faccia ſi come il numero D al numero AB, coſi il quadrato della Rationale E al quadrato di FG. Eſſendo i quadrati di E, ed FG, come numero à numero, [a] ſaranno frà di loro commenſurabili, e perciò le rette E, & FG, ſono commenſurabili, al meno in potenza: mà la retta E è poſta Rationale, ſarà FG, [b] che gli è commenſurabile in potenza, Rationale. In oltre, perche il numero D al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il numero D al numero AB è come il quadrato di E al quadrato di FG; il quadrato di E al quadrato di FG non ſarà come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette E, & FG [c] ſono incommenſurabili in lunghezza. Di nuouo, per il Corollario alla ſeſta propoſitione, ſi faccia ſi come AB ad AC, coſi il quadrato di FG al quadrato di GH. Hauendo i quadrati di FG, & GH, la proportione del numero AB al numero AC, [d] ſaranno frà di loro commenſurabili, e le rette FG, GH ſaranno commenſurabili al meno in potenza: mà la retta FG è dimoſtrata Rationale, ſarà la retta GH [e] ancora Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il quadrato di FG al quadrato di GH è come AB ad AC, il quadrato di FG al quadrato di GH non ſarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual coſa le rette [f] FG, GH ſono incommenſurabili in lunghezza: mà furono dimoſtrate Rationali, in conſeguenza ſono commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 37. propoſitione di queſto, tutta la retta FH è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio. Dico che la retta FH è quella linea, che ſi chiama terzo Binomio. Perche D ad AB, per coſtruttione, è come il quadrato della retta E al quadrato di FG, e la proportione di AB ad AC è come quella del quadrato di FG al quadrato di GH; per l'vgualità, ſarà D ad AC, [g] come il quadrato di E al quadrato di GH; mà D ad AC non hà la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; ne meno il quadrato di E al quadrato di GH è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual coſa le rette E, & GH, [h] ſono incommenſurabili in lunghezza. Di più eſſendo AB ad AC come il quadrato di FG al quadrato di GH, ed il numero AB,



a 6. del 10.
b 6. defin. del 10.
c 9. del 10.
d 6. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 9. del 10.
g 22. del 5.
h 9. del 10.

per costruttione, è maggiore di AC; sarà il quadrato di FG maggiore del quadrato di GH. Sia il quadrato di I la differenza di quanto il quadrato di FG supera il quadrato di GH. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC [K] come il quadrato di FG alla differenza frà il quadrato di FG, ed il quadrato di GH; cioè al quadrato di I: mà AB à BC è come numero quadrato à numero quadrato; sarà il quadrato di FG al quadrato di I come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette FG, cd I [l] sono commensurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome FG, supera il quadrato del minor nome GH, per il quadrato della retta I, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome FG, e nissuna delle due FG, GH, è commensurabile in lunghezza alla Rationale E; sarà, per la terza delle antecedenti definitioni, la retta FH quella, che si chiama terzo Binomio ch'era da dimostrarsi.



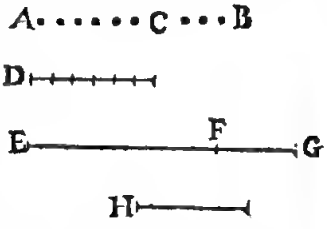
K Corol. al. la 19. del 5.

l 9. del 10.

PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE LII.

Ritrouare il quarto Binomio.

Per lo Scolio alla propositione 29. si trouino due numeri, come AC, CB in modo, che il loro aggregato AB à nissuno di loro sia come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga qualche Rationale D, e si prenda la retta EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta EF Rationale, e, procedendosi nel rimanente, come si fece alla 49 propositione di questo, si proverà, che tutta la retta EG è Binomio. Dico che EG è quella retta, che si chiama quarto Binomio. Sia il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, e si proui, come si fece nella 49. propositione, che, per la conuersione della proportione, AB à BC è come il quadrato di EF al quadrato di H: mà, per costruttione, AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: dal che [a] le rette EF, ed H, sono incommensurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il maggior nome EF è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la



a 9. del 10.

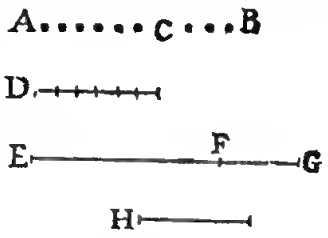
quar-

quarta delle antecedenti definitioni, la retta EG sarà quella, che si chiama quarto Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIONE LIII.

Ritrouare il quinto Binomio.

Si trouino i numeri AC, CB, come si disse nell'antecedente propositione, e del rimanente si faccia quanto si disse nella 50. propositione, ponendo FG commensurabile in lunghezza alla Rationale D; e come iui si fece, si dimostri la retta EG essere Binomio. Dico che EG è quella linea, che si chiama quinto Binomio. Si dimostri similmente, come si fece nella 50. propositione, che il quadrato di EF è maggiore del quadrato di FG; sia il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG; e proceedendosi, come nella 49. propositione, si proui, per la conuersione della proportione, AB à BC essere come il quadrato di EF al quadrato di H.

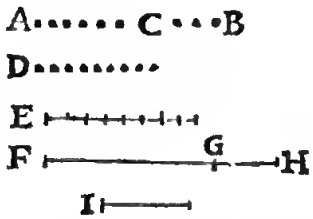


E perche AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato; dal che le rette EF, ed H, [a] sono incommensurabili in lunghezza: per la qual cosa il quadrato del maggior EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommensurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il minor nome EF è commensurabile in lunghezza alla Rationale D, e per la quinta delle antecedenti definitioni, sarà EG il quinto Binomio, che si cerca, come fù proposto fare, e dimostrare. [a] 9.del 10.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIONE LIV.

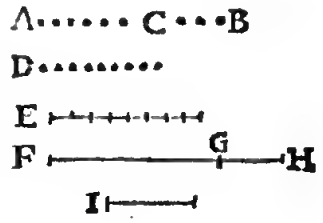
Ritrouare il sesto Binomio.

Si trouino due numeri, come AC, CB, che non siano piani simili, e nissuno sia numero quadrato; ed il loro composto, cioè AB, non sia numero quadrato, ne sia à ciascuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB à BC, ne meno AB ad AC, sia come numero quadrato à numero quadrato; il che si farà per il Corollario 2. all'vltima propositione del 9. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per essempio D, il quale non haurà ad AC, ne meno ad AB, la proportione,



che

che hà il numero quadrato al numero quadrato : ciò fatto, si esponga qualunque Rationale E, e si faccia si come il numero D al numero AB, [a] così il quadrato di E al quadrato di FG. Il rimanente si faccia come nella propositione 51, e si dimostri, come iui si fece, che le rette E, ed FG sono incommensurabili in lunghezza; e che tutta la retta FH è Binomio. Dico che FH è quella, che si chiama sesto Binomio. Si dimostri similmente, come si fece nella 51. propositione, che le rette E, & GH sono incommensurabili in lunghezza; e che il quadrato di FG è maggiore del quadrato di GH: sia dunque la differenza di quanto il quadrato di FG supera il quadrato di GH, il quadrato di I. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC, come il quadrato di FG al quadrato di I: ma AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di FG al quadrato di I è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette FG, ed I, [b] sono incommensurabili in lunghezza. E perche il maggior nome FG supera il minor nome GH, per il quadrato della retta I, incommensurabile in lunghezza al maggior nome FG; e nissuno de i nomi FG, GH, è commensurabile in lunghezza alla Rationale E, per la 6. definitione, la retta FG sarà quella, che si chiama sesto Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.



a Coroll. alla 6. del 10.

b 9. del 10.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIONE LV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal primo Binomio, è Irrationale; ed è quella, che chiamiamo Binomio.

Sia esposto il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal primo Binomio AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Irrationale, ed è quella, che chiamiamo Binomio. S'intenda diuiso il primo Binomio AD ne i suoi nomi, e sia il maggior nome AE; per la prima delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE: ed oltre à ciò la retta AE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, sarà il quadrato di EF [b] la quarta parte del quadrato di ED. Perche il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE; se alla retta AE, per il primo, ò secondo Lemma, dopo la 17. propositione di questo, si applichi il rettangolo GX, vguale al quadrato di EF, cioè

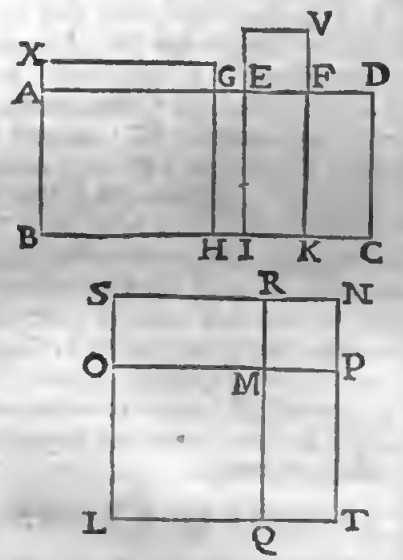
a 10. del 1.

b Scol. alla 4. del 2.

vgua-

vguale al quadrato EV, ch'è la quarta parte del quadrato di ED, in modo, che manchi à compire la retta AE d'vna figura quadrata; per la 18. propoſ. di queſto, la retta AE ſarà diuiſa in qualche punto G, e le parti AG,GE, ſaranno frà di loro commenſurabili in lunghezza, e per il Lemma 2. dopo la 17. propoſ. il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, ſarà vguale al quadrato di EF. Per li punti G, E, F, [c] ſi tirino le rette GH, EI, FK, parallele ad AB, ouero CD: poi ſi faccia il quadrato LM [d] vguale al rettangolo AH, e ſi faccia il quadrato MN vguale al rettangolo GI, e ſi diſpongano queſti due quadrati in modo, che i lati OM, MP, facciano vna ſola retta linea, come OP. Perche gli angoli OMQ, RMP ſono retti, vgualmente s'aggiunga l'angolo QMP, i due angoli OMQ, QMP, ſaranno vguali à i due angoli QMP, PMR: ma gli angoli OMQ, QMP, [e] ſono vguali à due angoli retti; ſaranno i due angoli QMP, PMR, vguali à due angoli retti; e perciò le rette QM, MR, [f] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Si prolunghino le rette NP, NR, ſino che concorrano con le rette LO, LQ, continuate come in T, ed S. In oltre, perche OM, come lato del quadrato, è vguale ad MQ, ed il lato RM è vguale ad MP; ſarà tutta OP vguale ad RQ: ma OP è vguale ad SN, e la retta RQ è vguale ad NT; ſarà SN vguale ad NT, per la qual coſa il rettangolo ST ſarà quadrato.

c 31. del 1.
d 14. del 2.
e 13. del 1.
f 14. del 1.



Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, per coſtruttione, è vguale al quadrato di EF; ſarà AG ad EF, [g] come EF ad EG: ma AG ad EF è come il rettangolo AH [h] al rettangolo EK; e la proportione di FE ad EG [K] è come il rettangolo EK al rettangolo GI; ſarà il rettangolo AH al rettangolo EK, [l] come il medeſimo rettangolo EK al rettangolo GI; per la qual coſa il rettangolo EK ſarà Medio proportionale frà i due rettangoli AH, GI, cioè frà i due quadrati LM, MN: ma frà i due quadrati LM, MN, per il Theor. 5. nello Scolio dopo la prima del 6. libro, è Medio proportionale il rettangolo MT; ſarà il rettangolo MT vguale al rettangolo EK; e perche il rettangolo MT [m] è vguale al rettangolo MS, ed il rettangolo EK [n] è vguale al rettangolo FC, ſarà il rettangolo MS vguale al rettangolo FC. Hor eſſendo il rettangolo AH vguale al quadrato ML, il rettangolo GI vguale al quadrato RP, ed i rettangoli EK, FC, vguali à i rettangoli TM, MS, ſarà tutto il quadrato ST vguale à tutto il rettangolo AC.

g 17. del 6.
h 1. del 6.
K 1. del 6.
l 11. del 5.
m 43. del 1.
n 36. del 1.

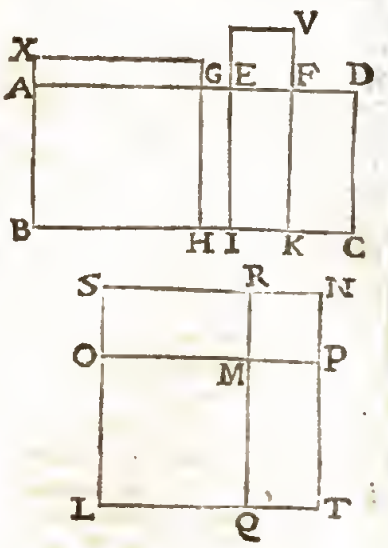
Eſſendoſi dimoſtrato, che le due AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza, ſarà tutta AE [o] commenſurabile in lunghezza tanto ad AG,

o 16. del 10.

quan-

quanto ad EG : ma nel primo Binomio AD il maggior nome AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ſaranno le due AG, GE, p commenſurabili in lunghezza alla medeſima Rationale AB : per la qual coſa le due AG, GE, q ſono Rationali, ed i rettangoli AH, GI, contenuti dalle Rationali GA, AB, & EG, GH, per la 20. propoſitione di queſto, ſono Rationali ; dal che i quadrati LM, MN, che gli ſono vguali, ſono ancora Rationali, e perciò i loro lati OM, MP ſono Rationali. In oltre, perche le due AE, AG ſono commenſurabili in lunghezza, e la retta AE è incommenſurabile in lunghezza ad ED ; ſarà AG r incommenſurabile in lunghezza ad ED : ma la retta ED è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà EF ; ſarà AG t incommenſurabile in lunghezza ad EF. Finalmente, perche il rettangolo AH al rettangolo EK, u è come la baſe AG alla baſe EF ; eſſendo le due AG, EF, incommenſurabili in lunghezza, ſarà il rettangolo AH x incommenſurabile al rettangolo EK : ma AH è vguale al quadrato LM, ed il rettangolo EK è vguale ad MT, i rettangoli LM, MT, ſaranno frà di loro incommenſurabili. E perche LM ad MT y è come OM ad MP, le due OM, MP, z ſaranno incommenſurabili in lunghezza; furono dimoſtrate le due OM, MP, Rationali; in conſeguenza le due OM, MP, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa tutta la retta OP, ouero SN, a ſarà Irrationale, e ſarà quella retta, che chiamiamo Binomio. E perche il quadrato di SN, cioè ST ; è vguale al rettangolo AC; la retta dunque SN, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, contenuto dal primo Binomio AD, e dalla Rationale AB, è Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio, come fù propoſto dimoſtrare.

p Scol. alla 12. del 10.
q 6. defin. del 10.
r 14. del 10.
t 14. del 11.
u 1. del 6.
x 10. del 10.
y 1. del 6.
z 10. del 10.
a 37. del 10.



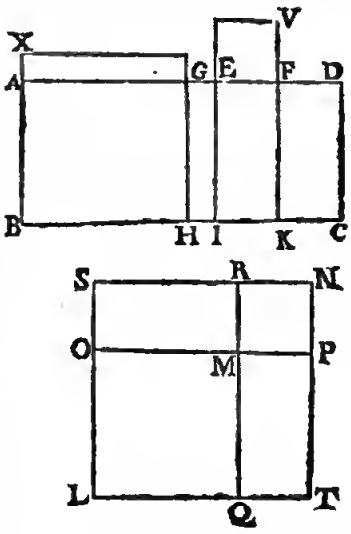
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIONE LVI.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal ſecondo Binomio, è Irrationale ; ed è quella, che ſi chiama prima Bimediale.

Sia il rettangolo AC contennto dalla Rationale AB, e dal ſecondo Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettan-

golo

golo AC, è Irrationale; ed è quella, che ſi chiama prima Bimediale. S'intenda diuiſo il ſecondo Binomio AD ne i ſuoi nomi AE, ED, e ſia AE il maggior nome, e per la ſeconda delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato di AE ſupera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, il maggior nome AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente ſi coſtruiſca, come nell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che la retta OP, ouero SN, è quella, il di cui quadrato LN è vguale al rettangolo AC. Dico che OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama prima Bimediale. a 10. del 1.



Perche il maggior nome AE è incommenſurabile in lunghezza ad ED, ed il minor nome ED è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ſarà AE [b] incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le due AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza; dal che tutta AE [c] ſarà cõmenſurabile in lunghezza tanto ad AG, quanto à GE. E perche il maggior nome AE è la Rationale del ſecondo Binomio AD, le due AG, GE, [d] che le ſono commenſurabili, ſaranno Rationali. Hor eſſendo le due AG, GE, commenſurabili in lunghezza ad AE, e la retta AE, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; le due AG, GE [e] ſaranno incommenſurabili in lunghezza alla medeſima Rationale AB; per la qual coſa, tanto le due AB, AG, quanto le due AB, GE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e perciò i rettangoli AH, GI [f] ſono Medij: Mà il quadrato LM è vguale al rettangolo AH, ed il quadrato MN è vguale al rettangolo GI; ſaranno i quadrati LM, MN Medij, ed i loro lati OM, MP [g] ſono Medie.

b 13. del 10.

c 16. del 10.

d 6. defin. del 10.

e 14. del 10.

f 22. del 10.

g 22. del 10.

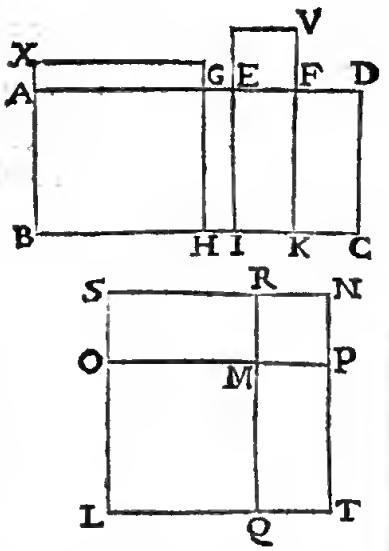
Di nuouo, perche il rettangolo AH al rettangolo GI [h] è come la baſe AG alla baſe GE, e le baſi AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza, ſaranno i rettangoli AH, GI [K] frà di loro commenſurabili, ed i quadrati LM, MN, che gli ſono vguali, ſaranno ancora frà di loro commenſurabili; per la qual coſa i loro lati OM, MP ſono commenſurabili, al meno in potenza. In oltre, eſſendo AE commenſurabile in lunghezza ad AG, e la medeſima AE è incommenſurabile in lunghezza al minor nome ED, ſarà AG [l] incommenſurabile in lunghezza ad ED: mà ED è commenſu-

h 1. del 6.

K 10. del 10

l 14. del 10.

m 14.del 10. rabile in lunghezza alla ſua metà EF, ſarà AG m incommenſurabile ad
n 1.del 6. EF. E perche il rettangolo AH al rettangolo EK n è come le baſe AG alla baſe EF, eſſendo AG incommenſurabile in lunghezza ad EF, ſarà il
o 10.del 10. rettangolo AH o incommenſurabile al rettangolo EK: mà EK, per quel, che ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, è vguale ad MT, & AH è vguale ad LM; ſarà LM incommenſurabile ad MT; e perche la
p 1.del 6. proportione di LM ad MT è come p O
q 10.del 10. M ad MP, in conſeguenza OM q ſarà incommenſurabile in lunghezza ad MP; furono dimoſtrate le due OM, MP, Medie, frà di loro commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le due OM, MP, Medie commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente, eſſendo ED il minor nome del ſecondo Binomio AD, ſarà ED per la ſeconda delle antecedenti definitioni, commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ouero EI, che gli è vguale:



r 12.del 10. mà ED è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà EF, ſarà EF r commenſurabile in lunghezza alla retta EI. E perche la retta EI è Rationale (ſtante che è vguale alla Rationale AB) perciò EF
t 6. defin. del 10. ſarà Rationale; ed il rettangolo EK, contenuto da due Rationali, ſarà t Rationale: fù dimoſtrato il rettangolo MT vguale al rettangolo EK, in conſeguenza il
u 20.del 10. rettangolo MT ſarà Rationale. Di più, eſſendo OM vguale ad MQ, il rettangolo contenuto dalle due QM, MP ſarà vguale al rettangolo contenuto dalle due OM, MP: mà il rettangolo contenuto dalle due QM, MP, cioè il rettangolo MT, è Rationale; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due OM, MP Rationale. Per la qual coſa le Medie OM, MP, commenſurabili ſolamente in potenza, contengono vn rettangolo Rationale, e per la 38. di queſto, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama prima Bimediale; come fù propoſto dimoſtrare.

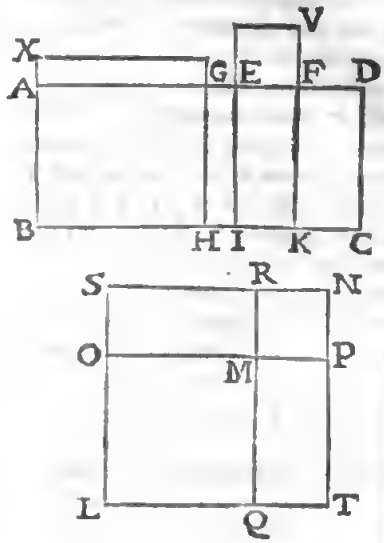
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIONE LVII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal terzo Binomio, è irrationale; ed è quella, che ſi chiama ſeconda Bimediale.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal terzo Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama ſeconda Bimediale. S'intenda diuiſo il terzo Binomio AD ne i ſuoi nomi AE, ED, e ſia AE

il

il maggior nome, per la terza delle antecedenti definitioni, le due AE, ED ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE ſarà maggiore del quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commenſurabili in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, niſſuna delle due AE, ED ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, e tutto il rimanente della coſtruttione ſi faccia come nella 55. propoſitione di queſto, e ſi dimoſtri come iui ſi fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC; e, procedendoſi come nell'antecedente propoſitione, ſi dimoſtrerà, che le rette OM, MP ſono Medie, commenſurabili ſolamente in potenza. In oltre, perche ED è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà EF, e, per ipoteſi, la medeſima ED è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ouero EI, ſarà EF [a] incommenſurabile in lunghezza ad AB, ouero EI: mà EF, per eſſere commenſurabile alla Rationale ED, è Rationale; le due dunque EF, EI ſaranno Rationali, e perciò ſono commenſurabili ſolamente in potenza; ed il rettangolo EK, contenuto dalle medeſime EF, EI [b] ſarà Medio, e perciò MT, ch'è vguale ad EK, ſarà ancora Medio. E perche il rettangolo MT è contenuto dalle Medie OM, MP (per eſſere OM vguale ad MQ) il rettangolo dunque contenuto dalle medie OM, MP ſarà Medio. Hor, eſſendo le due OM, MP Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, ſarà tutta OP, per la 39. di queſto, irrationale; e ſarà quella, che ſi chiama ſeconda Bimediale, ch'era da dimoſtrarſi.



[a] 74. del 10.

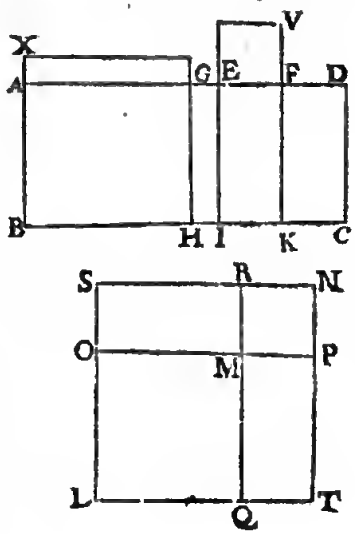
[b] 23. del 10.

THEOREMA XL. PROPOSITIONE LVIII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dal quarto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che ſi chiama Maggiore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quarto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Maggiore. Sia diuiſo il quarto Binomio AD ne i ſuoi nomi AE, ED, de'quali AE ſia il mag-

giore, e per la quarta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE ſarà maggiore del quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome AE; ed oltre à ciò, il maggior nome AE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, e ſi faccia tutto il reſtante della coſtruttione, come nella 55. propoſitione di queſto, e per la 19. di queſto, ſaranno le due AG, GE, incommenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come nella citata 55. propoſitione ſi fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Maggiore. Perche il rettangolo AH al rettangolo GI [a] è come AG à GE, eſſendo AG incommenſurabile in lunghezza ad EG, ſarà AH [b] incommenſurabile à GI, e perciò i due quadrati LM, MN, che ſono vguali à i rettangoli AH, GI, ſono ancora incommenſurabili; dal che i loro lati OM, MP ſono incommenſurabili in potenza. E perche il maggior nome AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ſarà dunque AE [c] Rationale, ed il rettangolo AI, contenuto dalle Rationali AE, AB, [d] ſarà ancora Rationale: ma il rettangolo AI è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN; ſarà l'aggregato de i quadrati delle rette OM, MP, Rationale.



In oltre, perche AD, per iporeſi, è quarto Binomio, il minor nome ED ſarà incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB: ma ED è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà EF; ſarà EF [e] incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. E perche EF, per eſſere commenſurabile alla Rationale ED, [f] è Rationale, ſarà EF commenſurabile ſolamente in potenza alla Rationale AB, ouero EI: per la qual coſa il rettangolo EK [g] è Medio; fù dimoſtrato, nella 55. propoſitione, il rettangolo MT vguale ad EK, in conſeguenza MT, ch'è contenuto dalle due OM, MP, è medio. Le due dunque OM, MP, ſono incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Rationale; ed il rettangolo, contenuto da eſſe, è Medio; e per la 40. propoſitione di queſto, tutta la retta OP è Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Maggiore, il che era da dimoſtrarſi.

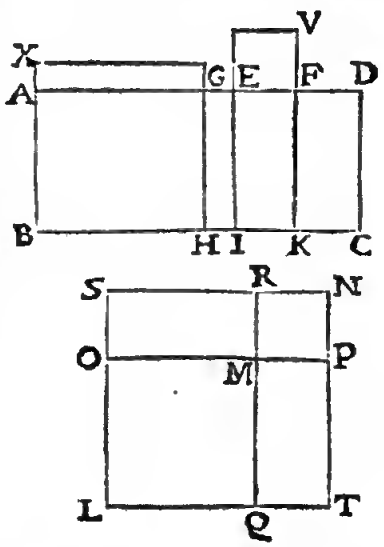
a 1. del 6.
b 10. del 10.
c 6. defin. del 10.
d 20. del 10.
e 14. del 10.
f 6. defin. del 10.
g 22. del 10.

THEO-

THEOREMA XLI. PROPOSITIONE LIX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal quinto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quinto Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. S'intenda diuiſo il quinto Binomio AD ne i ſuoi nomi AE, ED, de'quali AE ſia il maggiore, e per la 5. delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE ſupera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad AE; ed, oltre à ciò, il minor nome ED è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, ed il reſtante della coſtruttione ſi faccia come nella 55. propoſitione di queſto; per la 19. di queſto, ſaranno le due AE, GE incommenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come nella citata 55. propoſitione ſi fece, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le rette OM, MP ſono incommenſurabili in potenza; e perche il maggior nome AE è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, e la medeſima AE è Rationale, per eſſere vno de i nomi del quinto Binomio AD; perciò le due AE, AB ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ed il rettangolo AI, contenuto dalle due AE, AB, [a] commenſurabili ſolamente in potenza, è Medio. Ma il rettangolo AI, per coſtruttione, è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due OM, MP, Medio. In oltre, perche ED è il minor nome del quinto Binomio, perciò è commenſurabile alla Rationale AB, ed in conſeguenza è Rationale; ſarà la ſua metà EF, [b] che gli è commenſurabile, Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB: per la qual coſa il rettangolo EK, ch'è contenuto dalle



a 22. del 10.

b 6 defin. del 10.

Ratio-

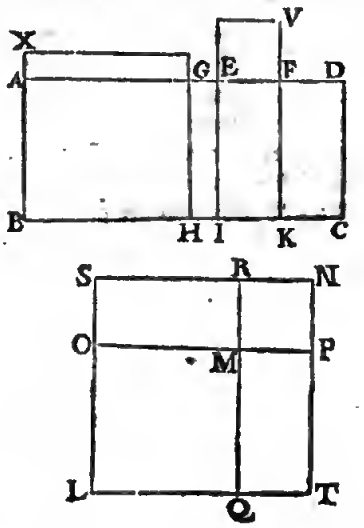
c 20.del 10. Rationali EF, EI, c commensurabili in lunghezza, sarà Rationale. Ma EK è vguale al rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP; sarà il rettangolo contenuto dalle due OM, MP, Rationale. Saranno dunque le rette OM, MP, incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati LM, NN, è Medio; ed il rettangolo, contenuto da esse, è Rationale; e per la 41. propositione di questo, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente per il Rationale, e Medio, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XLII. PROPOSITIONE LX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal sesto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama potente di due Medij.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal sesto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente di due Medij. S'intenda diuiso il sesto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE il maggior nome, per la sesta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE supera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, niuna delle due AE, ED, è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED a in due parti vguali in F, ed il rimanente della costruttione si faccia come nella 55. propositione di questo, e per la 19. propositione di questo, le due AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. Si dimostri poi, come nella citata 55. propositione, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per due Medij. Si dimostri, come si fece nella 58. propositione, che le rette OM, MP sono incommensurabili in potenza; e si dimostri, come nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati LM, MN, è Medio: similmente si dimostri, come nella 58. propositione, che il rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP, è Medio. Finalmente perche ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF,

a 10.del 1.



e la

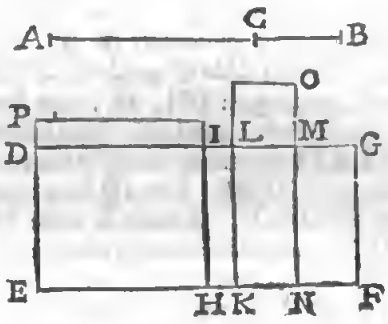
e la medeſima ED è incommenſurabile in lunghezza ad AE ; ſarà EF [b] incommenſurabile in lunghezza ad AE. E perche il rettangolo AI al rettangolo EK [c] è come AE ad EF, eſſendo le due AE, EF, incommenſurabili in lunghezza, ſarà AI [d] incommenſurabile ad EK; ma il rettangolo AI è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN, ed il rettangolo EK è vguale al rettangolo MT ; ſarà l'aggregato de i quadrati di OM, MP, incommenſurabile al rettangolo MT, ch'è contenuto dalle medeſime OM, MP. Le rette dunque OM, MP ſono commenſurabili ſolamente in potenza ; l'aggregato de i loro quadrati LM, MN, è Medio; ed il rettangolo MT, contenuto dalle medeſime rette OM, MP, è Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati LM, MN ; e per la 42. propoſitione di queſto, la retta OP è irrationale, ed è quella, che ſi chiama potente per due Medij, come fù propoſto dimoſtrare.

b 13. del 10.
c 1. del 6.
d 10. del 10.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIONE LXI.

Applicando il quadrato del Binomio alla Rationale, l'altro lato, che ne riſulta, è primo Binomio.

Sia il Binomio AB, diuiſo ne i ſuoi nomi AC, CB, e ſia AC il maggior nome : ſia eſpoſta la rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato del Binomio AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che ſi chiama primo Binomio. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato del maggior nome AC; & alla retta HI ſi applichi il rettangolo IK, vguale al quadrato del minor nome CB: e perche il quadrato di AB [c] è vguale à i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, eſſendo DK vguale à i quadrati delle due AC, CB, ſarà il rimanente LF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Si diuida LG [d] in due parti vguali in M, dal punto M [e] ſi tiri la retta MN, parallela ad ED, ouero GF ; i due rettangoli LN, MF, [f] ſaranno frà di loro vguali, ed ogn'vno ſarà vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche AB, per ipoteſi, è binomio, le parti AC, CB, [g] ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza: per il che i quadrati di AC, CB, ſono Rationali, e frà loro commenſurabili ; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] ſarà commenſurabile, tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato di CB : ma i quadrati di AC, & CB, ſono Rationali, ſarà il loro compoſto, cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [k] Rationale: ma l'aggregato de i detti quadrati è vguale al rettangolo DK ; ſarà il rettangolo DK Rationale; il quale, applicato alla Rationale DE, [l] produce



a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 4. del 2.
d 10. del 1.
e 31. del 1.
f 36. del 1.
g 37. del 10.
h 16. del 10.
k 9. defin. del 10.
l 21. del 10.

l'altro

l'altro lato DL Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche le due AC, CB, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſarà il rettangolo, contenuto da AC, CB, [m] Medio; ma queſto è commenſurabile al ſuo doppio, il doppio rettangolo dunque, contenuto dalle due AC, CB, cioè il rettangolo LF, [n] ſarà Medio; e perciò, applicato il Medio LF alla Rationale DE, ouero LK, fà l'altro lato LG [o] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE: fù dimoſtrata DL commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, le due DL, LG, [p] ſaranno incommenſurabili in lunghezza; ed haueremo le due DL, LG, Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 37. di queſto, tutta la retta DG ſarà Binomio. Dico che DG è primo Binomio.

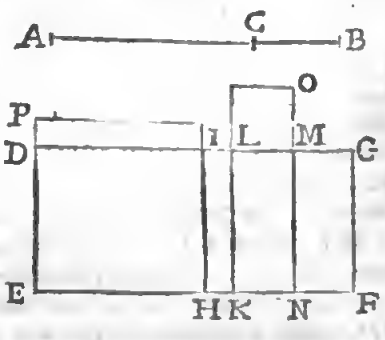
m 22. del 10

n Corol. alla 24. del 10.

o 23. del 10.

p 13. del 10.

Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per l'vltimo Coroll. alla 1. del ſeſto, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB; ed i quadrati delle medeſime AC, CB, ſono vguali, per coſtruttione, à i rettangoli DH, IK; ſarà il rettangolo delle due AC, CB, cioè il rettangolo LN, medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; dal che i rettangoli DH, LN, IK ſono continui proportionali: Ma i rettangoli DH, LN, IK [q] ſono come le baſi DI, LM, IL; ſaranno le rette DI, LM, IL, continue proportionali; e la retta LM ſarà media proportionale frà le due DI, IL: per la qual coſa il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, [r] è vguale al quadrato della media LM. In oltre, perche le rette AC, CB, ſono commenſurabili in potenza, il quadrato di AC ſarà commenſurabile al quadrato di CB; ed i rettangoli DH, IK, che ſono vguali à quei quadrati, ſono ancora frà di loro commenſurabili: ma i rettangoli DH, IK [t] ſono frà loro come le baſi DI, IL; ſaranno le rette DI, IL, [u] commenſurabili in lunghezza. Di nuouo, perche i quadrati delle due AC, CB, per il Lemma dopo la 39. propoſitione di queſto, ſono maggiori del doppio rettangolo, cõtenuto dalle medeſime AC, CB, ed i quadrati delle due AC, CB, ſono vguali al rettangolo DK, e ſimilmente il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo LF; in conſeguenza il rettangolo DK ſarà maggiore del rettangolo LF: Ma i rettangoli DK, LF, [x] ſono come le baſi DL, LG; ſarà la baſe DL maggiore della baſe LG. Hor eſſendo DL maggiore di LG, ed il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, per quel, che ſi è dimoſtrato, è vguale al quadrato di LM, cioè è vguale alla quarta parte del quadrato della minore LG; ſarà applicato alla maggiore LD il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la linea DL per vna figura quadrata, e la retta DL da tale applicatione è diuiſa in I, nelle parti DI, IL, le quali, per quel, che ſi è dimoſtrato, ſono commenſura-



q 1. del 6.

r 17. del 6.

t 1. del 6.

u 10. del 10

x 1. del 6.

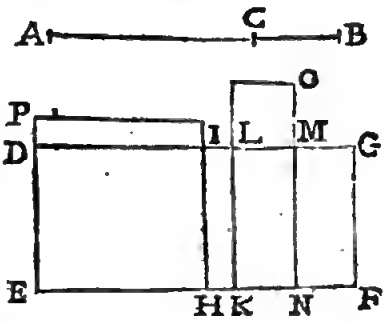
bili

bili in lunghezza; per la 18. di queſto, il quadrato della maggiore DL ſupera il quadrato della minore LG, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore DL: e perche la maggiore DL, per quel, che ſi è dimoſtrato nella prima parte, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la prima delle antecedenti definitioni, la retta DG ſarà primo Binomio, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XLIV. PROPOSITIONE LXII.

Applicando il quadrato della prima bimediale alla Rationale, il lato, che ne riſulta, è ſecondo Binomio.

Sia la prima Bimediale AB, diuiſa ne i ſuoi nomi, ed il maggior nome ſia AC; ſi applichi alla Rationale DE [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è ſecondo binomio. Si proſeguiſca la coſtruttione dell'antecedente propoſitione, in modo, che i due rettangoli DH, IK ſiano vguali à i quadrati delle rette AC, CB, ed ogn'vno de i rettangoli LN, MF, vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche le due AC, CB, ſono i nomi della prima bimediale AB, per la 38. di queſto, le rette AC, CB, ſono Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio; ſaranno i quadrati delle due AC, CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli ſono vguali, frà loro commenſurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK ſarà commenſurabile à ciaſcuno de i Medij DH, IK, e per il Corollario alla 24. propoſitione di queſto, ſarà DK Medio; il quale, eſſendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL, [b] ſarà Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, per ipoteſi, è Rationale, il ſuo doppio, che gli è commenſurabile, cioè il rettangolo LF, [c] ſarà Rationale; il quale, eſſendo applicato alla Rationale DE, cioè ad LK, che gli è vguale, ne riſulta il lato LG [d] Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Hor perche DL è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commenſurabile in lunghezza alla medeſima DE, ſarà DL [e] incommenſurabile in lunghezza ad LG: ma le due DL, LG ſono ſtate dimoſtrate Rationali, ſaranno dunque le due DL, LG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa tutta la retta DG [f] ſarà quella, che chiamiamo Binomio. Dico che la retta DG è ſecondo Binomio. Si dimoſtri, come ſi fece nella ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato di



a 45. del 10

b 23. del 10.

c 9. defin. del 10.

d 21. del 10.

e 13. del 10.

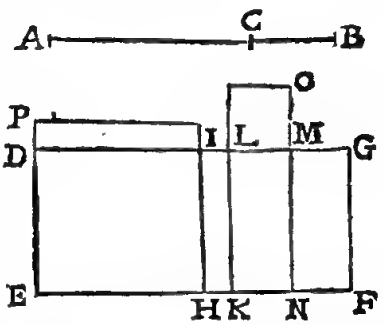
f 37. del 10.

vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minor nome LG, per il quadraro d'vna retta, cõmensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e si è dimostrato, che il minor nome LG è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà la retta DG quella, che si chiama secondo Binomio; il che era da dimostrarsi.

THEOREMA XLV. PROPOSITIONE LXIII.

Applicando il quadrato della seconda Bimediale alla Rationale, il lato, che ne risulta, è terzo Binomio.

Sia la seconda Bimediale AB, il di cui maggior nome AC, ed il minore CB; ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadraro di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama terzo Binomio. Sia fatta tutta la costruttione, come nella 61. propos. Perche i nomi AC,CB, [b] che compongono la seconda Bimediale, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, saranno i quadrati delle rette AC,CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, commensurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK [c] sarà commensurabile al medio DH, ed ancora al medio IK: per la qual cosa il rettangolo DK [d] sarà Medio, il quale, essendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [e] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [f] che gli è commensurabile, sarà Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC,CB, è vguale al retrangolo LF; sarà il rettangolo LF Medio; il quale, applicato alla Rationale LK, cioè DE, fà il lato LG [g] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Prese AC,CB, come basi di due rettangoli, e sia AC altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle parti AC,CB, [h] come AC à CB: ma AC è incommensurabile in lunghezza à CB, sarà il quadrato di AC [k] incommensurabile al rettangolo delle due AC,CB. Similmente perche i quadrati delle due AC,CB sono commensurabili, il loro aggregato [l] sarà commensurabile al quadraro di AC: ma il quadraro di AC è incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB, sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [m] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio, sarà l'aggregato de i



a 45. del 1.
b 39. del 10.
c 16. del 10.
d Corol. alla 24. del 10.
e 23. del 10.
f Corol. alla 24. del 10.
g 23. del 10.
h 1. del 6.
K 10. del 10.
l 15. del 10.
m 13. del 10

qua-

quadrati delle rette AC, CB, [n] incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB; fù fatto, per costruttione, il rettangolo DK vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il rettãgolo LF è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo LF; mà i rettangoli DK, LF [o] sono come le basi DL, LG; le rette dunque DL, LG [p] saranno incommensurabili in lunghezza; le quali essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 37. propositione di questo, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama Binomio. Dico che è il terzo Binomio. Si dimostri, come si fece nella propositione 61. di questo, che DL è il maggior nome, il di cui quadtato è maggiore del quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minore LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e nissuna di loro, per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà quella, che si chiama terzo Binomio, come fù proposto dimostrare.

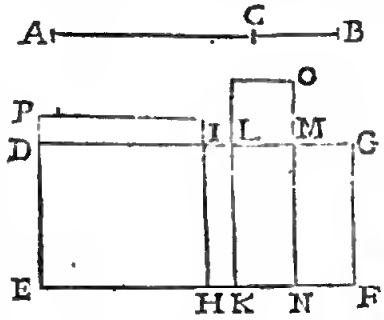
n 13. del 10.

o 1. del 6. p 10. del 10.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIONE LXIV.

Applicando il quadrato della Maggiore alla Rationale, il lato, che ne risulta, è quarto Binomio.

Sia quella retta, che si chiama Maggiore, AB, il di cui maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quarto Binomio. Sia fatta la medesima costruttione della propositione 61. di questo. Perche i nomi AC, CB, compongono la maggiore AB, per la 45. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle medesime AC, CB, è Rationale; ed il rettangolo delle due AC, CB, è Medio: ma il rettangolo DK, per costruttione, è vguale à i quadrati delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK Rationale. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle due AC, CB, sarà il rettangolo LN medio, & il doppio LF, ch'è commensurabile ad LN, [b] sarà ancora Medio. Hor essendo applicato il Rationale DK alla Rationale DE, l'altro lato DL è sarà Rationale, e sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, essendo il Medio LF applicato alla Rationale LK, ouero DE, l'altro lato LG [d] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK,



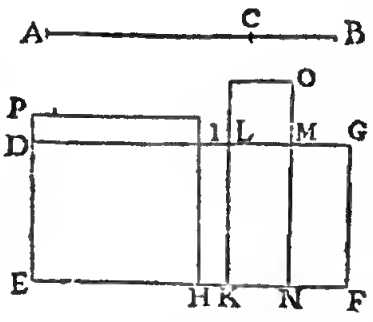
a 45. del 1.

b Corol. al. la 24. del 10. c 21. del 10. d 23. del 10.

ouero DE. Et essendo DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è incommensurabile in lunghezza alla medesima
e 13.del 10. DE, le due DL, LG e saranno incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, in conseguenza sono Rationali, e commensura-
f 37. del 10. bili solamente in potenza; e perciò tutta la retta DG f sarà Binomio. Dico che è il quarto Binomio. Si dimostri, come si fece nella 61. propos. di questo, che DL è maggiore di LG; e che il rettangolo contenuto dalle parti DI,IL, è vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG. Si considerino i nomi AC, CB, i quali sono incommensurabili in potenza, e perciò i loro quadrati sono incommensurabili frà di loro, ed i rettangoli DH, IK, che sono vguali à quei quadrati, saranno
g 1. del 6. frà di loro incommensurabili: ma i rettangoli DH,IK, g sono come le ba-
h 10.del 10 si DI,IL; saranno le rette DI, IL, h incommensurabili in lunghezza. Hor essendo il rettangolo delle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, sarà applicato ad LD il rettangolo delle due DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la retta DL, per vna figura quadrata, risultandone per tale applicatione le parti DI,IL, per quel, che si è dimostrato, incommensurabili in lunghezza, e per la 19. di questo, il quadrato di DL supera il quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome DL. E perche il maggior nome DL è stato dimostrato commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la 4. delle antecedenti definitioni, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama quarto Binomio, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIONE LXV.

Applicando il quadrato della potente d'vn Rationale, e Medio, alla Rationale, il lato, che ne risulta, è il quinto Binomio.



Sia la retta potente d'vn Rationale, e Medio, la notata AB, ed il maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE a sia applicato il retta-
a 45.del 1. golo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quinto Binomio. Sia fatta la medesima costruttione della propos. 61. Perche AB è supposta la linea potente per il Rationale, e Medio, per la 41. di questo, le rette AC,CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle rette AC,CB, è Medio; ed il rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, è Rationale: ma, per costruttione, il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC,CB; sarà il

rettan-

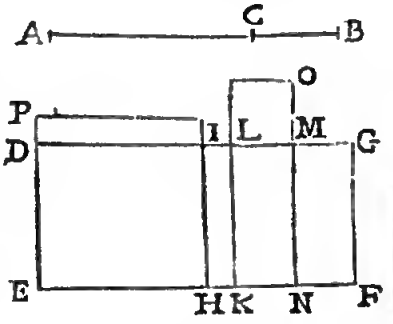
rettangolo DK Medio. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle medeſime AC, CB; ſarà il rettangolo LN Rationale, il di cui doppio LF ſarà Rationale. Hor eſſendo il medio DK applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] ſarà Rationale, e ſarà incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, eſſendo il Rationale LF applicato alla Rationale LK, cioè DE, l'altro lato LG [c] ſarà Rationale, commenſurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE; e perche DL è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commenſurabile in lunghezza alla medeſima DE; le due DL, IG [d] ſaranno incommenſurabili in lunghezza: ma le habbiamo dimoſtrate Rationali, ſaranno dunque le due DL, LG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 37. di queſto, la retta DG è Binomio. Dico che è quinto Binomio. Si dimoſtri, come ſi fece nella 61. propoſitione, che il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, è vguale alla quarta parte del quadrato di LG; e ſi moſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile al maggior nome DL: e perche il minor nome LG è dimoſtrato commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle antecedenti definitioni, la retta DG ſarà quella, che ſi chiama quinto Binomio, come fù propoſto dimoſtrare.

[b] 23. del 10.
[c] 22. del 10.
[d] 13. del 10.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIONE LXVI.

Applicando alla Rationale la potente per due Medij, il lato, che ne riſulta, è il ſeſto Binomio.

Sia AB la potente per due Medij, il di cui maggior nome ſia AC; alla Rationale DE [a] ſi applichi il rettangolo DF vguale al quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che ſi chiama ſeſto Binomio. Sia fatta la coſtruttione della 61. propoſitione di queſto. Perche AB è la potente per due Medij, per la 42. di queſto, le rette AC, CB ſono incommenſurabili in potenza, e l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, è Medio; ed il rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, è Medio, incommenſurabile all'aggregato de i detti quadrati: e perche il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſarà il rettangolo DK Medio. Similmente eſſendo il rettangolo LN vguale al rettangolo delle due AC, CB, ſarà il rertangolo LN Medio, ed il ſuo doppio LF [b] ſarà ancora Medio. Hor eſſendo i Medij DK, LF applicati alla Rationale DE, ouero LK, i lati DL, LG [c] ſaranno Rationali, e ſaranno in-

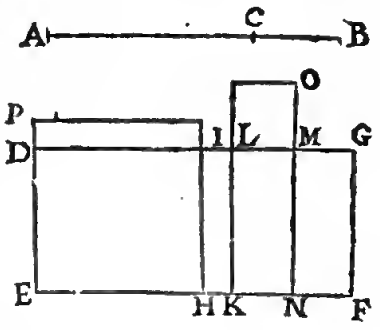


[a] 45. del 1.

[b] Coroll. al la 24. del 10
[c] 23. del 10

com-

commensurabili alla Rationale DE, ouero LK. In oltre, perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è incommensurabile al rettangolo delle medesime AC, CB, ed il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB,



d 13.del 10. cioè il rettangolo DK, [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo LF: c 1.del 6. mà i rettangoli DK, LF [c] sono come le basi DL, LG; le rette dunque DL, f 10.del 10. LG [f] saranno incommensurabili in lunghezza: furono le medesime rette DL, LG mostrate Rationali, in consegnenza le rette DL, LG saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e, per la 37. di questo, la retta DG sarà quella, che si chiama Binomio. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione che il maggior nome è DL, e che il quadrato di DL è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato della retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome DL. E perche nissuna delle rette DL, LG, per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la sesta delle antecedenti definitioni, la retta DG è quella, che si chiama sesto Binomio, il che era da dimostrarsi.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIONE LXVII.

La retta linea, ch'è commensurabile in lunghezza al Binomio, ancor essa è Binomio del medesimo ordine.

Sia qualunque Binomio AB, diuiso ne i suoi nomi AC, CB, e sia AC il maggior nome, ed il minore CB, e la retta DE sia commensurabile al Binomio AB. Dico che DE è Binomio del medesimo ordine; cioè se AB è primo Binomio, ancora DE sarà primo; se AB è secondo Binomio, sarà ancora DE secondo, &c. Si faccia [a] si come tutta AB à tutta DE, così la parte AC alla

a 12. d.16. parte DF; sarà l'auanzo CB [b] all'auanzo FE come tutta AB à tutta DE. b 19.del 5. Hor essendo AB à DE come AC à DF, inuertendo, DE ad AB [c] sarà come DF ad AC, ed il restante FE al rimanente CB [d] sarà come tutta DE à tutta AB; fù supposta DE commensurabile in lunghezza ad AB, sarà DF [e] commensurabile in lunghezza ad AC, e sarà FE commensurabile in lunghezza à CB: e perche i nomi AC, CB del Binomio AB, [f] sono Rationali, le rette ancora DF, FE, [g] che gli sono commensurabili, sono Rationali. Di nuouo perche AC à DF è come AB à DE, cioè AB à DE

c Coroll.alla 4.del 5. d 19. del 5. e 10.del 10. f 37.del 10. g 6. decim. del 10.

come

come CB ad FE, ſarà h AC à DF come CB ad FE; e permutando, AC à CB K ſarà come DF ad FE: mà le due AC, CB ſono commenſurabili ſolamente in potenza, le due DF, FE l ſaranno ancora commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa le due DF, FE m ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 37. propoſitione di queſto, la retta DE ſarà Binomio. Dico che DE è Binomio del medeſimo ordine del Binomio AB.

h 11.del 5. K 16. del 5. l 10. del 10. m 6. defin. del 10.

Perche AC è il maggior nome del Binomio AB, il quadrato di AC ſuperarà il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile, ò incommenſurabile in lunghezza ad AC. Sia nel primo luogo commenſurabile ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE, ed il quadrato di AC ſupera il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta cõmenſurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propoſitione di queſto, il quadrato di DF ſupetarà il quadrato di FE, per il quadtato d'vna retta commenſurabile in lunghezza alla retta DF: e perche le rette AC, DF ſono commenſurabili in lunghezza, ſe AC ſatà commenſurabile in lunghezza à qualche eſpoſta Rationale, in modo, che AB ſia primo Binomio, ſarà ancora DF n commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale, e per la prima delle ſeconde definitioni di queſto, la retta DE ſarà primo Binomio, e perciò del medeſimo ordine del Binomio AB. Sia poi CB commenſurabile in lunghezza all'eſpoſta Rationale, in modo, che AB ſia ſecondo Binomio. Perche FE è commenſurabile in lunghezza à CB, ſarà FE o commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale, e per la definitione del ſecondo Binomio, ſarà la retta DE ſecondo Binomio, cioè del medeſimo ordine del Binomio AB. Se finalmente ne AC, ne meno CB, è commenſurabile in lunghezza all'eſpoſta Rationale, in modo, che AB ſia terzo Binomio, eſſendo le due DF, FE commenſurabili in lunghezza alle due AC, CB, neſſuna delle due DF, FE p ſarà commenſurabile in lunghezza all'eſpoſta Rationale, e per la terza delle antecedenti definitioni, la retta DE ſarà terzo Binomio, cioè ſarà del medeſimo ordine del Binomio AB.

n 12.del 10. o 12.del 10. p 13.del 10.

In oltre ſe il quadrato di AC ſupera il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla retta AC, il quadrato di DF ſuperarà il quadrato di FE, q per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla retta DF; e, procedendoſi nel medeſimo modo di prima, ſi proverà, che DE è Binomio quarto, ò quinto, ò ſeſto, ſecondo che AB ſarà quarto, ò quinto, ò ſeſto Binomio. Per la qual coſa la retta, commenſurabile in lunghezza al Binomio, è Binomio del medeſimo ordine, come fù propoſto dimoſtrare.

q 15.del 10.

THEOREMA L. PROPOSITIONE LXVIII.

Quella retta, ch'è commenſurabile in lunghezza alla bimediale, è ancor eſſa Bimediale, & è del medeſimo ordine.

Sia AB qualunque delle Bimediali, diuiſa ne i ſuoi nomi AC, CB, ed

il

il maggior nome ſia AC; e ſia DE commenſurabile in lunghezza ad AB. Dico che la retta DE è ancora Bimediale, ed è del medeſimo ordine della Bimediale AB. Si faccia ſi come tutta AB à tutta DE, [a] così la parte AC alla parte DF, ed, inuertendo, ſarà tutta DE à tutta AB [b] come la parte DF alla parte AC; dal che il reſtante FE al rimanente CB [c] ſarà come tutta DE à tutta AB, cioè come DF ad AC: ma DE è poſta commenſurabile in lunghezza ad AB; ſarà FE [d] commenſurabile in in lunghezza à CB: ed ancora DF ſarà commenſurabile in lunghezza ad AC; ma le due AC, CB, ſono medie, ſaranno le due DF, FE, [e] che gli ſono commenſurabili, ancora Medie. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, permutando, AC à CB [f] ſarà come DF ad FE: ma le due AC, CB [g] ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſaranno ancora le due DF, FE, [h] commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa le rette DF, FE, ſono Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 38. propoſitione di queſto, la retta DE è quella, che ſi chiama Bimediale. Dico che la Bimediale DE è del medeſimo ordine della Bimediale AB. Preſe le due AC, CB, come baſi di due rettangoli, de'quali AC ſia altezza commune, ſarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [k] come la baſe AC alla baſe CB. E nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, [l] è come DF ad FE; ma AC à CB è come DF ad FE, ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [m] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e, permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [n] è come il rettangolo delle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE; ma il quadrato di AC [o] è commenſurabile al quadrato di DF (ſtante che le rette AC, DF ſono commenſurabili in lunghezza) ſarà il rettangolo delle due AC, CB, [p] commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, in modo, che AB ſia prima Bimediale; ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [q] Rationale, e la retta DE [r] ſarà prima Bimediale, cioè del medeſimo ordine della Bimediale AB. Se poi il rettangolo delle due AC, CB, ſarà Medio, in modo, che la retta AB ſia ſeconda Bimediale, ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [t] Medio, e la retta DE [u] ſarà ſeconda Bimediale, cioè del medeſimo ordine della Bimediale AB, ch'era da dimoſtrarſi.

a 12. del 6.
b Coroll. alla 4. del 5.
c 19. del 5.
d 10. del 10.
e 24. del 10.
f 16. del 5.
g 38. del 10.
h 10. del 10.
K 1. del 6.
l 1. del 6.
m 11. del 5.
n 16. del 10.
o 9. del 10.
p 10. del 10.
q Lem. dopo la 19. del 10.
r 18. del 10.
t 24. del 10.
u 39. del 10.

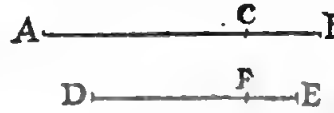
THEOREMA LI. PROPOSITIONE LXIX.

La retta, commenſurabile alla Maggiore, è Maggiore.

Sia quella retta, che chiamiamo Maggiore, AB, diuiſa ne i ſuoi nomi AC, CB; e ſia la retta DE commenſurabile ab AB, ò in lunghezza,

poten-

porenza, ouero in potenza ſolamente. Dico che DE ancor eſſa è Maggiore. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che AC à DF, e che CB ad FE, è come AB à DE. Perche DE è commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente, ad AB, [a] ſarà DF commenſurabile nell'iſteſſo modo ad AC, come ancora la retta FE à CB. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, il quadrato di AC [b] al quadrato di DF ſarà come il quadrato di CB al quadrato di FE, e per la 12. del 5. l'aggregato de i quadrati di AC, CB, all'aggregato de i quadrati di DF, FE, è come il quadrato di CB al quadrato di FE: ma il quadrato di CB è commenſurabile al quadrato di FE; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [c] commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [d] è Rationale (ſtante che le rette AC, CB ſono i nomi, che compongono la maggiore AB) in conſeguenza l'aggregato de i quadrati di DF, FE [e] ſarà Rationale.



a 10. del 10.
b 22. del 6.
c 10. del 10.
d 40. del 10.
e 9. defin. del 10.

Preſe AC, CB come baſi di due rettangoli, de'quali AC ſia l'altezza commune, ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [f] come la baſe AC alla baſe CB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, è come DF ad FE: ma DF ad FE è come AC à CB, ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE: e permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [h] ſarà come il rettangolo delle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commenſurabile al quadrato di DF [K] (ſtante che AC, & DF ſono ſtate dimoſtrate commenſurabili in lunghezza, e potenza, ò al meno in potenza) ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, [l] commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche il rettangolo delle due AC, CB, [m] per la natura della maggiore AB, è Medio; ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [n] che gli è commenſurabile, Medio. Di nuouo, perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB ſono incommenſurabili in potenza [o] (ſtante che compongono la maggiore AB) ſaranno le due DF, FE, [p] incommenſurabili in potenza. Hor eſſendo le due DF, FE, incommenſurabili in potenza, e l'aggregato de i loro quadrati, per quel che ſi è dimoſtrato, è Rationale, il rettangolo ancora, contenuto dalle medeſime DF, FE, è Medio; per la 40. di queſto, tutta la retta DE ſarà quella, che ſi chiama Maggiore, come fù propoſto dimoſtrare.

f 1. del 6.
g 11. del 5.
h 16. del 5.
K 9. del 10.
l 10. del 10.
m 40. del 10
n 24. del 10.
o 40. del 10.
p 10. del 10.

THEOREMA LII. PROPOSITIONE LXX.

La retta, commenſurabile alla potente per il Rationale, e Medio, è ancor eſſa potente per il Rationale, e Medio.

Sia AB la retta potente per il Rationale, e Medio, la quale ſia diuiſa ne i ſuoi nomi AC,CB, e ſia DE commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente, ad AB. Dico che DE ſarà quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio.

Si faccia la medeſima coſtruttione dell'altre antecedenti, e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC,CB, è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE: ma l'aggregato

a 41.del 10. de i quadrati di AC,CB, [a] per la natura della propoſta AB, è Medio; ſarà
b 24.del 10. l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [b] che gli è commenſurabile, Medio. Similmente ſi dimoſtri, come nell'antecedente propoſitione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al rettangolo contenuto dalle due DF, FE: ma il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è
c lem.° dopo la 19.del 10. Rationale, ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [c] che gli è commenſurabile, Rationale. Finalmente ſi dimoſtri, come nell'antecedente, che le rette DF, FE ſono incommenſurabili in potenza; ed haueremo le due DF, FE, incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Medio; e contengono vn rettangolo Rationale, e per la 41. propoſ. di queſto, ſarà la retta DE potente per il Rationale, e Medio, il che era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LIII. PROPOSITIONE LXXI.

La retta, commenſurabile alla potente per due Medij, è ancor eſſa potente per due Medij.

Sia la potente per due Medij AB, diuiſa ne i ſuoi nomi AC, CB, e ſia DE commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente ad AB. Dico che DE è potente per due Medij. Si dimoſtri come nella 69. propoſitione, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE, e che il rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB, è commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche

tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto il rettangolo delle
a 42.del 10. rette AC, CB, [a] (per la natura della linea AB) è Medio; ſarà tanto l'aggregato de i quadrati di DF, FE, quanto il rettangolo, contenuto dalle
b 24.del 10. medeſime DF, FE, [b] Medio; e ſarà, come nell'antecedente propoſitione fù dimoſtrato, DF incommenſurabile in potenza. Finalmente, eſſendo AB, per ipoteſi, la retta potente per due Medij, l'aggregato de i quadra-
c 42.del 10. ti di AC, CB, ſarà [c] incommenſurabile al rettangolo, contenuto dalle rette AC, CB: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è dimoſtrato

com-

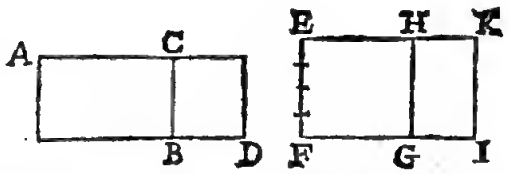
commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; ſarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [d] incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo di AC, CB, è dimoſtrato commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due DF,FE, [e] incommenſurabile al rettangolo delle medeſime DF, FE. Per la qual coſa le rette DF, FE ſono incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i quadrati di DF,FE,per quel che ſi è dimoſtrato,è Medio;come ancora il rettangolo, contenuto dalle medeſime DF, FE, è Medio, ed è incommenſurabile all'aggregato de i quadrati DF,FE;e,per la 42.propoſitione di queſto', la retta DE ſarà quella, che ſi chiama potente per due Medij, ch'era da dimoſtrarſi.

[d] 13.del 10.

[e] 13. del 10.

THEOREMA LIV. PROPOSITIONE LXXII.

La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato dello ſpatio Rationale, col Medio; ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio.



Sia il rettangolo Rationale AB, al quale ſia aggiunto il Medio CD. Dico che la retta,il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AD, ò è Binomio, ò prima Bimediale, ò Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio. Perche AB è Rationale, e lo ſpatio CD è Medio, ſarà AB, ò maggiore, ò minore di CD; perche ſe foſſero vguali ſarebbero commenſurabili, ed in tal caſo ò ambidue ſarebbero Rationali, ò pure ambidue Medij,ch'è contro all'ipoteſi; non dunque AB è vguale à CD. Suppoſto prima che AB ſia maggiore di CD. Si eſponga qualunque Rationale EF, alla quale [a] ſi applichi il rettangolo EG, vguale al Rationale AB; ſarà HG vguale ad EF, e perciò HG ſarà Rationale. Si applichi ad HG [b] il rettangolo HI,vguale al Medio CD; ſarà HI Medio, ed il rettangolo EG, ch'è vguale al Rationale AB, ſarà Rationale: per la qual coſa i due EG, HI, ſaranno incommenſurabili; perche ſe foſſero commenſurabili, ſarebbero ò tutti due Rationali, ò tutti due Medij. In oltre, eſſendo alla Rationale EF applicato il Rationale EG, l'altro lato EH [c] ſarà Rationale, e ſarà commenſutabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente eſſendo alla Rationale HG applicato il Medio HI, l'altro lato HK ſarà Rationale, [d] ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF; fù dimoſtrata EH commenſurabile in lunghezza alla medeſima EF, ſaranno le due EH, HK, [e] incommenſurabili in lunghezza: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono Rationali, in conſeguenza le rette EH,HK ſono Rationali, è commenſurabili ſolamente in potenza; per la qual coſa tutta la

[a] 45.del 10.

[b] 45. del 1.

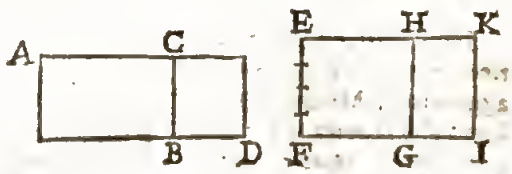
[c] 21.del 10.

[d] 23.del 10.

[e] 13.del 10.

f 37. del 1. g 1. del 6. retta EK f ſarà Binomio. E perche lo ſpatio AB è ſuppoſto maggiore di CD, cioè EG maggiore di GK, & EG à GK g è come EH ad HK, ſarà EH maggiore di HK, e perciò il quadrato del maggior nome EH ſuperarà il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, ò commenſurabile, ò incommenſurabile in lunghezza al maggior nome EH. Se il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza ad EH, per la prima delle proſſime antecedenti definitioni, ſarà EK primo Binomio; e per la 55. propoſitione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal primo Binomio EK, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio: ma il rettangolo EI, per coſtruttione, è vguale ad AD, percio la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio. Ma ſe il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad EH; eſſendo EH, per quel che ſi è dimoſtrato, commenſurabile in lunghezza ad EF; ſarà EK quarto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quarto Binomio EK, cioè al rettangolo AD, h ſarà irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama Maggiore.

h 28. del 10.



Di nuouo, ſuppoſto che AB ſia minore di CD, ſi faccia la coſtruttione di prima, e ſi dimoſtri nell'iſteſſo modo, che EK è Binomio, e che EH è commenſurabile in lunghezza ad EF. E perche AB è minore di CD, cioè EG minore di HI; ſarà EH minore di HK: per la qual coſa il quadrato di HK ſarà maggiore del quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza ad HK. Se il quadrato del maggior nome HK ſupera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad HK, ſarà EK, per la ſeconda delle precedenti definitioni, ſecondo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal ſecondo Binomio EK, ouero vguale ad AD, ſarà k irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama prima Bimediale.

k 56. del 10.

Finalmente ſe il quadrato di HK ſupera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza al maggior nome HK, eſſendo il minor nome EH commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, ſarà EK quinto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quinto Binomio EK, cioè vguale ad AD, ſarà irrationale; e ſarà l quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. Per la qual coſa la retta, il di cui quadrato è vguale al compoſto dello ſpatio Rationale, e Medio, ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è maggiore, ouero la potente per il Rationale, e Medio, ch'era da dimoſtrarſi.

l 59. del 10.

THEOREMA LV. PROPOSITIONE LXXIII.

La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato di due Medij incommenſurabili; ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente di due Medij.

Siano compoſti li due Medij incommenſurabili AB, CD in modo, che facciano il ſolo piano AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale ad AD, ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente per due Medij. Sia eſpoſta la Rationale EF. O il medio AB è maggiore, ouero è minore del Medio CD, non potendo eſſere vguale, ſtante che ſarebbero commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Sia nel primo luogo AB maggiore di CD. Si faccia la coſtruttione dell'antecedente propoſitione, ſarà EG maggiore di HI, e la retta EH maggiore di HK: e perche i Medij AB, CD, per ipoteſi, ſono incommenſurabili, ſarà EG incommenſurabile ad HI; mà EG ad HI [a] è come EH ad HK; ſarà EH [b] incommenſurabile in lunghezza ad HK. In oltre perche i due AB, CD ſono Medij, ſaranno i due EG, HI, che gli ſono vguali, ancora Medij. Hor eſſendo i Medij EG, HI applicati alle Rationali EF, HG, gli altri lati EH, HK ſono [c] Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF. Eſſendo dunque le due EH, HK Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 37. propoſitione di queſto, la retta EK ſarà Binomio. Di più eſſendoſi dimoſtrata EH maggiore di HK, il quadrato di EH ſarà maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza alla maggiore EH. Se il quadrato di EH è maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad EH, eſſendo per quel che ſi è dimoſtrato, ambidue i nomi EH, HK incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF; ſarà EK, per la terza delle precedenti definitioni, terzo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF; e dal terzo Binomio EK, cioè vguale al rettangolo AD, [d] ſarà irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama ſeconda Bimediale. Se poi il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile al maggior nome EH; per che i due EH, HK ſono incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF, per la ſeſta delle precedenti definitioni, ſarà EK ſeſto Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal ſeſto Binomio EK, cioè vguale ad AD, ſarà [e] irrationale, e ſarà quella che ſi chiama potente per due Medij.

Finalmente ſe il Medio AB ſarà minore del Medio CD, procedendoſi nell'iſteſſo modo, ſi proverà ſimilmente, che la retta EK ò è ſeconda

a 1. del 6.
b 10. del 10.
c 3. del 10.
d 57. del 10.
e 60. del 10.

da Bimediale, ouero è la potente per due Medij, il che era da dimoſtrarſi.

SCOLIO.

Sette ſono i Senarij, de' quali ha trattato ſin quì Euclide.

Nel primo dimoſtra la generatione di ſei linee Irrationali, che ſono. Il Binomio; la Prima Bimediale; la Seconda Bimediale; la Maggiore; la Potente per il Rationale, e Medio; e la Potente per due Medij.

Nel ſecondo tratta della diuiſione de i loro nomi, dimoſtrando che ciaſcuna ſi diuide ne i loro nomi in vn ſol punto.

Nel terzo ſpiega il modo da ritrouare il primo, ſecondo, terzo, quarto, quinto, e ſeſto Binomio.

Nel quarto dimoſtra qual differenza ſia frà le linee irrationali del primo Senario frà di loro.

Nel quinto, applicando i quadrati delle irrationali del primo Senario alla Rationale, dimoſtra l'altro lato, che naſce da tale applicatione, quale linea irrationale ſia.

Nel ſeſto dimoſtra, che ogni retta, commenſurabile à ciaſcuna delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medeſima ſpecie di quella, alla quale è commenſurabile.

E nel ſettimo, in due ſole propoſitioni, ſpiega manifeſtamente la differenza delle ſopradette irrationali.

Eſſendoſi dimoſtrato nel ſeſto Senario, che ogni retta, commenſurabile in lunghezza à qualunque delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medeſima ſpecie di quella, alla quale è commenſurabile; e perche ogni retta è commenſurabile alla ſua parte Aliquota, ſarà manifeſto, che non ſolo la metà, mà qualunque parte aliquota dell'irrationale, eſſendo commenſurabile al tutto, ſarà irrationale, e della medeſima ſpecie del ſuo tutto.

Dopo ch' Euclide hà dimoſtrato le paſſioni delle ſudette ſei linee irrationali generate per compoſitione, ſpiega ſuſſeguentemente le medeſime coſe in ſei altre linee irrationali, che ſi generano per ſottrattione; il che dimoſtra in ſette altri Senarij, come ſucceſſiuamente ſi può vedere.

PRIN-

PRINCIPIO DE' SENARII
PER DETRATTIONE.

THEOREMA LVI. PROPOSITIONE LXXIV.

Se da vna linea Rationale ſe ne detragga vna Rationale, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta, la rimanente ſarà Irrationale, e chiamaſi Apotome.

Dalla Rationale AB ſe ne detragga la Rationale AC, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza ad AB. Dico che il reſtante CB è irrationale. Preſe le rette AB, AC, come baſi di due rettangoli, de' quali AB ſia altezza commune; ſarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, AC, come AB ad AC: ma AB è incommenſurabile in lunghezza ad AC (ſtante che ſono commenſurabili ſolamente in potenza) ſarà il quadrato di AB [a] incommenſurabile al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. In oltre perche AB è commenſurabile ſolamente in potenza ad AC, ſarà il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] ſarà commenſurabile al quadrato di AB: ma il quadrato di AB è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo delle due BA, AC; ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [c] incommenſurabile al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. E perche il rettangolo delle due BA, AC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [d] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di più, perche i quadrati delle due BA, AC, [e] ſono vguali al doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC; e ſi è dimoſtrato, che i due quadrati di AB, AC, ſono incommenſurabili al doppio rettangolo delle due BA, AC; i quadrati delle medeſime BA, AC, per il Corollario alla 17. propoſitione di queſto, ſaranno incommenſurabili al quadrato di CB: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è Rationale (ſtante che è commenſurabile al quadrato della Rationale AB) eſſendo incommenſurabile al quadrato di CB, ſarà il quadrato di CB [f] irrationale, ed il ſuo lato BC [g] ſarà irrationale. Si chiami la retta BC Apotome. Se dunque dalla Rationale ſe ne detrae vna lunghezza Rationale, commenſurabile in potenza à tutta, quel che reſta è Irrationale, il che era da dimoſtrarſi.

[a] 10. del 10.
[b] 16. del 10.
[c] 13. del 10.
[d] 13. del 10.
[e] 7. del 2.
[f] 10. defin. del 10.
[g] 11. defin. del 10.

THEOREMA LVII. PROPOSITIONE LXXV.

Se da vna linea Media ſi detragga vna Media, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta, ed il rettangolo

conte-

contenuto da tutta, e dalla detratta ſia Rationale; la rimanente ſarà Irrationale, e ſi chiama prima Apotome della Media.

Dalla Media AB ne ſia detratta la Media AC, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la Media AB; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, ſia Rationale. Dico che il rimanente CB è Irrationale. Perche le rette AB, AC ſono commenſurabili ſolamente in potenza, il quadrato di AB ſarà commenſurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] ſarà commenſurabile al quadrato di AC. In oltre, perche le rette AB, AC ſono Medie, i loro quadrati [b] ſaranno ancora Medij, e perciò irrationali: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è dimoſtrato commenſurabile al quadrato di AC, ch'è Medio, l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC, [c] ſarà Medio, ed in cõſeguenza irrationale: fù ſuppoſto il rettangolo delle due BA, AC, Rationale; l'aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, ſarà incommenſurabile al rettangolo delle due BA, AC, ch'è Rationale. E perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, [d] è Rationale per eſſere commenſurabile alla ſua metà, ch'è Rationale; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC, incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [e] è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC; ſarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, [f] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Hor ſe l'aggregato del doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, è incommenſurabile alla parte, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; ſarà il quadrato di BC [g] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimoſtrato Rationale, in conſeguenza il quadrato di BC ſarà irrationale, ed il ſuo lato BC ſarà irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. Si chiami la retta BC prima Apotome della Media.

a 16. del 10.
b 22. del 10.
c 24. del 10.
d 9. defin. del 10.
e 7. del 2.
f 13. del 10.
g 17. del 10.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIONE LXXVI.

Se da vna linea Media ſe ne detragga vna Media, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta, ed il rettangolo, contenuto da tutta, e dalla media detratta, ſia Medio; la rimanente ſarà irrationale, e ſi chiama ſeconda Apotome della media.

Dalla Media AB ne ſia detratta la media AC, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta AB, ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, ſia Medio. Dico che la rimanente CB ſarà irrationale.

rationale. Perche le rette AB, AC ſono commenſurabili in potenza, ſara il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di AC; e l'aggregato de i quadrati di AB, AC,[a] ſarà commẽſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di AB: mà i quadrati di AB, AC ſono Medij (ſtante che le rette AB, AC ſono ſuppoſte Medie) ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] eh'è commenſurabile ad ogn'vno di loro, Medio. In oltre perche il rettangolo delle due BA, AC, per ipoteſi, è Medio; ſarà il ſuo doppio, cioè il doppio rettangolo di BA, AC,[c] che gli è commenſurabile, Medio. E perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, [d] col quadrato di BC; l'aggregato de i quadrati di AB, AC, eh'è Medio, ſuperarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, eh'è dimoſtrato Medio, per il quadrato di BC: ma il Medio non ſupera il Medio [e] per ſpatio Rationale; non ſarà dunque il quadrato di BC Rationale. Per la qual coſa il quadrato di BC è irrationale, ed il lato BC è ſimilmente irrationale, come fù propoſto dimoſtrare. Si chiami la retta BC ſeconda Apotome della Media.

a 16. del 10.
b 24. del 10.
c 24. del 10.
d 7. del 2.
e 27. del 10.

THEOREMA LIX. PROPOSITIONE LXXVII.

Se da vna retta linea ſe ne detragga vna retta linea, incommenſurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, ſia Rationale; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime ſia Medio; la rimanente ſarà irrationale, e ſi chiamerà Minore.

Dalla retta AB ſia detratta la retta AC, incommenſurabile in potenza ad AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC ſia Rationale; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime BA, AC ſia Medio.

Dico che la rimanente CB ſarà irrationale. Perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, [a] è irrationale, ſtante che, per ipoteſi, è Medio; e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Rationale; l'aggregato dunque de i quadrati di AB, AC ſarà incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di nuouo perche l'aggregato de i quadrati, AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC [b] col quadrato di BC; eſſendo l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC incommenſurabile alla parte, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; il medeſimo aggregato de i quadrati di AB, AC, per il Corollario alla 17. propoſitione di queſto, ſarà incommenſurabile al rimanente, cioè al quadrato di BC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Rationale; ſarà il quadrato di BC [c] irrationale, e la retta BC ſarà ancora irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. La retta BC ſarà quella, che ſi chiamerà Minore.

a 24. del 10.
b 7. del 2.
c 10. defin. del 10.

THEOREMA LX. PROPOSITIONE LXXVIII.

Se dalla retta linea ſe ne detrae vna retta linea, incommenſurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, ſia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Rationale; la rimanente ſarà irrationale, e ſi dirà eſſer quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dalla retta AB ſe ne detragga la retta AC, incommenſurabile in potenza à tutta AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AB, AC ſia Medio; ed il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime BA, AC ſia Rationale. Dico che la rimanente BC ſarà irrationale. Perche il doppio rettangolo, contenuto dalle due BA, AC, è rationale, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Medio, e pereiò irrationale, ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC [a] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC col quadrato di BC; ſarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, incommenſurabile al rettangolo delle due BA, AC. Per la qual coſa il doppio rettangolo delle due BA, AC [c] ſarà incommenſurabile al quadrato di BC. E perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimoſtrato Rationale; il quadrato dunque di BC [d] ſarà irrationale, ed il lato BC ſarà parimente irrationale. E queſta retta BC ſi dirà eſſer quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

a 10. defin. del 10.
b 7. del 2.
c 17. del 10.
d 10. defin. del 10.

THEOREMA LXI. PROPOSITIONE LXXIX.

Se dalla retta linea ſe ne detragga vna retta linea incommenſurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta ſia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia ancora Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati; la rimanente ſarà irrationale, e ſi dirà eſſer quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dalla retta AB ſe ne detragga la retta AC, incommenſurabile in potenza à tutta AB, in modo, che il compoſto de i quadrati di AB, AC ſia Medio, ed il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime BA, AC ſia

Medio,

Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, AC. Dico che la rimanente CB ſarà irrationale.

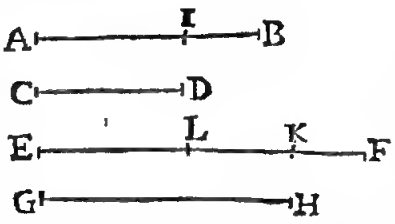
Perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] è vguale al doppio rettãgolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di BC; il medeſimo aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, ſuperarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, che ſimilmente è Medio, per la quantità del quadrato di BC: mà il Medio [b] non ſupera il Medio per lo ſpatio Rationale, in conſeguenza il quadrato di BC non è Rationale; mà ben ſi irrationale, ed il ſuo lato ſarà parimente irrationale, come fù propoſto dimoſtrare. La retta linea BC ſi chiamerà quella, che col Medio fà il tutto Medio.

a 7. del 2.

b 27. del 10

LEMMA.

Se ſaranno quattro quantità, e la differenza frà la prima, e ſeconda, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta; ſarà ancora la differenza frà la prima, e terza, vguale alla differenza frà la ſeconda, e quarta.



Siano le quattro grandezze AB, CD, EF, GH; e ſia IB la differenza frà AB, & CD, e la differenza frà EF, & GH ſia KF. Dico che ſe IB è vguale à KF, la differenza ancora frà AB, & EF, ſarà vguale alla differenza frà CD, & GH. Si prenda la differenza frà EK, & AI, che ſia LK, ſarà EL vguale ad AI; alle vguali EL, AI, s'aggiungano le vguali KF, IB; ſarà tutta AB vguale ad EL, inſieme con KF; dal che la differenza frà EF, & AB ſarà LK: mà, per coſtruttione, LK è la differenza frà EK, & AI; la differenza dunque frà EF, & AB, è vguale alla differenza frà EK, & AI. Inoltre perche IB è la differenza di quanto AB ſupera CD, ſarà AI vguale à CD. Similmente perche KF è la differenza di quanto EF ſupera GH, ſarà EK vguale à GH. Hor eſſendo AI vguale à CD, ed è ancora EK vguale à GH; la differenza frà EK, & AI ſarà vguale alla differenza frà GH, & CD; mà, per quel che ſi è dimoſtrato, la differenza frà EK, & AI, è vguale alla differenza frà EF, & AB; ſarà la differenza frà EF, & AB, vguale alla differenza frà GH, & CD, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA LXII. PROPOSITIONE LXXX.

All'Apotome si può aggiungere vna sola linea Rationale, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta.

Sia l'Apotome AB, alla quale sia aggionta la Rationale BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC. Dico che non si può aggiungere ad AB altra retta Rationale, come, per esempio BD, che sia commensurabile solamente in potenza ad AD. Sia aggiunta, s'è possibile, la Rationale BD, commensurabile solamente in potenza ad AD. Perche le due AC,CB, per ipotesi, sono commensurabili solamente in potenza, il quadrato di AC sarà commensurabile al quadrato di BC; dal che l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [a] sarà commensurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Rationale, stante che BC, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di AC, BC, che gli è commensurabile, [b] sara Rationale. Nell'istesso modo si proverà, che l'aggregato de i quadrati di AD,DB, è Rationale, e per lo Scolio alla 27. propos. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà spatio Rationale. Oltre à ciò, perche AC è commensurabile in potenza à BC, essendo BC Rationale, [c] sarà ancora AC Rationale, e commensurabile solamente in potenza à BC. Nell'istessa maniera si proverà, che AD è Rationale, e commensurabile solamente in potenza à BD.

a 16. del 10.

b 9. defin. del 10.

c 6. defin. del 10.

Di nuouo, perche AC è diuisa in B, i quadrati delle due AC, CB, [d] sono vguali al doppio rettangolo delle due, AC,CB, col quadrato di AB; dal che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, supera il doppio rettangolo delle due AC, CB, per il quadrato di AB. Similmente la retta AD è diuisa in B, [e] i quadrati delle due AD,DB sono vguali al doppio rettangolo delle due AD,DB, col quadrato di AB, e pereiò l'aggregato de i quadrati delle due AD, DB, supera il doppio rettangolo delle medesime AD,DB, per il quadrato di AB; per la qual cosa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC,CB, & il doppio rettangolo delle due AC,CB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AD, DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD,DB. Si considerino quattro quantità, la prima sia l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB; la seconda sia il doppio rettangolo delle medesime AC, CB; la terza sia l'aggregato de i quadrati di AD, DB; e la quarta il doppio rettangolo delle due AD,DB. E perche si è dimostrato, che la differenza frà la prima, e seconda, cioè frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD, DB; per il Lemma anteeedente, la differenza

d 7. del 2.

e 7. del 2.

renza frà la prima, e terza, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AC,CB, e l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, sarà vguale alla differenza frà la seconda, e quarta, cioè frà il doppio rettangolo delle due AC,CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB: ma la differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD,& DB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; la differenza dunque frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB, sarà Rationale.

Finalmente, perche le due AC, CB, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, f sarà Medio,& il doppio rettãgolo delle due AC,CB, che gli è commensurabile, sarà ancora Medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, è Medio. E perche il Medio non supera il Medio g per spatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ch'è Medio, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, che parimente è Medio, non sarà Rationale: ma questa differenza fù dimostrata Rationale, sarebbe, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque all'Apotome AB si può aggiungere altra Rationale BD, commensurabile solamente in potenza alla composta AD, fuor che la sola Rationale BC, ch'era da dimostrarsi.

f 22. del 10.

g 27. del 10.

THEOREMA LXIII. PROPOSITIONE LXXXI.

Alla prima Apotome della Media vna sola linea Media si può aggiungere, che sia commensurabile solamente in potenza alla composta, e che contenga con la composta vn rettangolo Rationale.

Sia AB la prima Apotome della Media, alla quale sia aggiunta la Media BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC, e che il rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta BC, sia Rationale. Dico che non è possibile aggiungerui altra Media, come BD, commensurabile solamente in potenza à tutta AD; e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, sia Rationale. Sia aggiunta, s'è possibile, qualche Media BD, commensurabile solamente in potenza ad AD, e che il rettangolo delle due AD,DB, sia Rationale. Perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale, il doppio rettangolo delle medesime AC,CB, che gli è commensurabile, a sarà Rationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: per la qual cosa la differenza frà il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, b sarà Rationale. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati

a 9. defin. del 10.

b Scol. alla 27. del 10.

di AC,

di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB; e perche la differenza di questi due doppij rettangoli è ſtata dimoſtrata Rationale, ſarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale.

Di nuouo, perche BC, per ipoteſi, è Media; ſarà AC, [c] che gli è commenſurabile in potenza, Media; e perciò le due AC, BC ſono Medie commenſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa i loro quadrati ſono Medij frà di loro commenſurabili. Hor eſſendo il quadrato di AC commenſurabile al quadrato di BC, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [d] ſarà commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Medio, ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [e] Medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Medio; e perche il Medio non ſupera il Medio [f] per ſpatio Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, non ſarà Rationale: ma l'iſteſſa differenza fù dimoſtrata Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla Media AB ſi può aggiungere altra Media, fuor che la Media BC, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza al tutto, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta ſia Rationale, come fù propoſto dimoſtrare.

c Cor. 1. alla 24. del 10.

d 10. del 10.

e 24. del 10.

f 27. del 10.

THEOREMA LXIV. PROPOSITIONE LXXXII.

Alla ſeconda Apotome della Media vna ſola linea Media ſi può aggiungere, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che contenga con la compoſta vn rettangolo Medio.

Sia AB la ſeconda Apotome della Media, alla quale ſia aggiunta la Media BC, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta AC, ed il rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta CB, ſia Medio. Dico che non è poſſibile aggiungere altra Media ad AB, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta, ſia Medio. S'aggiunga, s'è poſſibile, ad AB qualche altra Media BD, commenſurabile ſolamente in potenza ad AD, e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, ſia Medio.

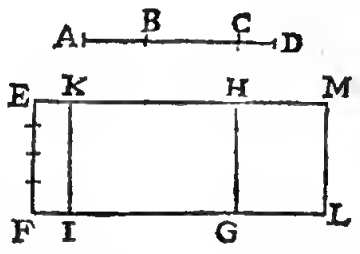
Si eſponga la Rationale EF, alla quale ſi applichi il rettangolo EG, [a] vguale all'aggregato de' quadrati di AC, CB; ed alla medeſima EF ſi applichi il rettangolo EI, vguale al quadrato di AB, e ſi applichi ancora il rettangolo EL. [b] vguale all'aggregato de i quadrati delle due AD,

a 45. del 1.

b 45. del 1.

DB.

DB. Perche i quadrati delle due AC, BC ſono vguali al doppio rettangolo delle medeſime AC, BC, [c] col quadrato di AB, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per coſtruttione, è vguale al rettangolo EG; ſarà il rettangolo EG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB, col quadrato di AB; ſe ne leuino gli vguali, cioè il rettangolo EI, ed il quadraro di AB, reſta il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il rettangolo KL è vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre perche BC, per ipoteſi, è Media, ſarà AC, [d] che gli è commenſurabile in potenza, Media; e perciò le due AC, BC ſono medie commenſurabili ſolamente in potenza, per la qual coſa i loro quadrati ſaranno ancora Medij frà di loro commenſurabili. Hor eſſendo i quadrati di AC, CB, commenſurabili, il loro aggregato [e] ſarà commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, BC ſono Medij, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, che à loro è commenſurabile, [f] ſarà ancora Medio; ed il rettangolo EG, ch'è vguale al detto aggregato, ſarà parimente Medio, il quale applicato alla Rationale EF farà l'altro lato EH [g] Rationale, & incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente eſſendo il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipoteſi, Medio, il doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, che gli è commenſurabile, [h] ſarà ancora Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è dimoſtrato vguale al rettangolo KG; il rettangolo dunque KG ſarà Medio, che applicato alla Rationale KI, ouero EF farà il lato KH [K] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale KI; ouero EF. In oltre, perche il quadrato di AC, per ipoteſi, è commenſurabile al quadrato di CB, ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [l] commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di CB. Si prendano le rette AC, CB, come baſi di due rettangoli, e ſia AC alrezza commune, ſarà il quadraro di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [m] come la baſe AC alla baſe CB: ma AC, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza à CB ſarà il quadrato di AC [n] incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB: ma il quadrato di AC è dimoſtraro commenſurabile all'aggregaro de i quadrati di AC, CB, l'aggregato dunque de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EG, [o] ſarà incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il doppio rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al rettangolo delle medeſime AC, CB; ſarà il rettangolo EG [p] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB: fù dimoſtrato il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo KG; ſarà il rettangolo EG incommenſurabile al rettangolo KG. Finalmenre perche i rettangoli [q] EG, KG ſono come le baſi EH, KH; ed i rettangoli EG, KG ſono incommenſurabili; ſarà EH [r] incommen-



c 7.del 2.

d 24.del 10.

e 16.del 10.

f Corell.alla 24.del 10.

g 23.del 10.

h Corell.al la 24.del 10.

K 23.del 10.

l 16.del 10.

m 1.del 6.

n 10. del 10.

o 13 del 10.

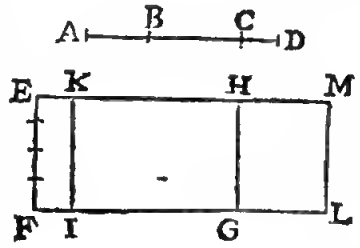
p 13.del 10.

q 1. del 6.

r 10. del 10.

men-

menſurabile in lunghezza à KH: mà furono moſtrate Rationali, in conſeguenza le rette EH, KH ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH ſe ne detrae la Rationale KH, commenſurabile ſolamente in potenza alla medeſima EH, per la 74 propoſitione di queſto, la rimanente EK ſarà Apotome, alla quale è aggiunta la Rationale KH, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta EH, ne all'Apotome EK, per l'80. propoſitione di queſto, ſi può aggiungere altra Rationale, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, fuor che KH. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che EK è Apotome, e che KM è Rationale, e commenſurabile in potenza à tutta EM; che è contro à quel che ſi è dimoſtrato, mentre neſſun' altra Rationale ſi può aggiungere ad EK, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, fuor che la Rationale KH. Non dunque alla ſeconda Apotome della media, notata AB, ſi può aggiungere altra media, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta, e che il rettangolo di tutta e dell'aggiunta ſia Rationale, fuor che la media BC, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA LXV. PROPOSITIONE LXXXIII.

Alla minore vna ſola retta linea ſi può aggiungere incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta la compoſta, e dell'aggiunta, ſia Rationale; e che il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Medio.

Sia la minore AB, alla quale ſia aggiunta la retta BC, incommenſurabile in potenza à tutta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB ſia Rationale, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB ſia Medio. Dico che neſſun' altra retta ſi può aggiungere ad AB, ſecondo le propoſte conditioni. Sia, ſe è poſſibile, aggiunta ad AB qualche altra retta BD, che ſia incommenſurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſia Rationale, e che il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AD, DB ſia Medio. Si dimoſtri, come ſi fece nella propoſitione 80. di queſto, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB ed il doppio rettan-

golo

golo delle due AD, DB: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Rationale (ſtante che l'vno, e l'altro aggregato è Rationale) ſarà la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto il doppio rettangolo delle due AC, CB, quanto il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio, non potendo il Medio [a] ſuperare il Medio per ſpatio Rationale; ne meno la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: fù dimoſtrata la medeſima differenza eſſere Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla minore AB ſi può aggiungere altra retta BD, incommenſurabile in potenza à tutta AD, in modo, che l'aggregato de i loro quadrati ſia Rationale, e che contengano vn rettangolo Medio, fuor che la retta BC, ch'era da dimoſtrarſi. a 27.del 10.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIONE LXXXIV.

A quella linea, che col Rationale fà il tutto Medio, vna ſola retta linea ſi può aggiungere, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta ſia Rationale.

Sia AB la retta linea, che col Rationale fà il tutto Medio, alla quale ſia aggiunta la retta BC, incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB ſia Rationale. Dico che non ſi può aggiungere ad AB altra retta, ſecondo le propoſte conditioni. S'aggiunga, s'è poſſibile, ad AB vn'altra retta, come DB, incommenſurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AD, DB ſia Rationale. Si dimoſtri, come ſi fece nell'80. propoſitione di queſto, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB. Perche la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale (ſtante che l'vno, e l'altro doppio rettangolo è ſuppoſto Rationale) ſarà la differẽza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto l'aggregato de i quadrati di AD, DB, per ipoteſi, è Medio, ed il Medio non ſupera il Medio [a] per

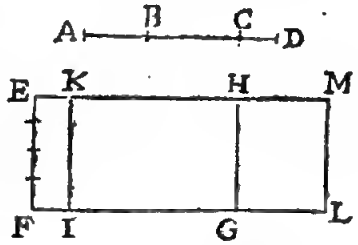
a 27. del 10.

per ſpatio Rationale, ne meno la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB ſarà Rationale: mà la medeſima differenza fù dimoſtrata Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla retta AB ſi può aggiungere altra retta, ſecondo le ſopra poſte conditioni, fuor che la retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIONE LXXXV.

A quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, vna ſola retta linea ſi può aggiungere incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i detti quadrati.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, alla quale ſia aggiunta la retta BC, incommenſurabile in potenza à tutta la compoſta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio, incommenſurabile all' aggregato de i quadrati di AC, CB. Dico che non ſi può aggiungere ad AB altra retta, ſecondo le medeſime conditioni. Si aggiunga, s'è poſſibile, qualche altra retta BD, incommenſurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AD, DB, ſia Medio, incommenſurabile all' aggregato de i quadrati di AD, DB. Sia fatta la medeſima coſtruttione dell'82. propoſitione. Perche l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è Medio, il rettangolo EG, che gli è vguale, ſarà ancora Medio, il quale, applicato alla Rationale EF, fà l'altro lato EH [a] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, BC, per ipoteſi, è Medio, ed è vguale, per quel che fù dimoſtrato nel 82. propoſitione, al rettangolo KG; ſarà il rettangolo KG Medio, il quale applicato alla Rationale KI, ouero EF, fà l'altro lato KH [b] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale KI, ouero EF. E perche il doppio rettangolo del-



a 23. del 10.

b 23. del 10.

le

le due AC, CB, è ſuppoſto incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB; ſarà il rettangolo KG incommenſurabile al rettangolo EG: ma il rettangolo KG al rettangolo EG [c] è come KH ad EH; eſſendo i rettangoli KG, EG, incommenſurabili, ſarà la retta KH [d] incommenſurabile in lunghezza alla retta EH: furono moſtrate le rette KH, EH, Rationali, in conſeguenza ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH ſe ne ſottrae la Rationale KH, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta EH, l'auanzo EK [e] ſarà Apotome, e la retta HK ſarà quella Rationale, che, aggiunta all'Apotome EK, è commenſurabile in potenza à tutta EH, ne altra Rationale ſi può aggiungere ad EK, che ſia commenſurabile in potenza à tutta la compoſta. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che EK è Apotome, e che MK è Rationale, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta EM: dal che altra Rationale ſi può aggiungere ad EK, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, che è contro à quello che ſi è dimoſtrato. Non dunque alla retta AB ſi può aggiungere altra retta, ſecondo le conditioni della retta BC, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 1. del 6.
[d] 10. del 10.
[e] 74. del 10.

ANNOTATIONE.

Nelle coſe ſeguenti la retta BC, aggiunta all'Apotome AB, ſecondo le conditioni eſpoſte nelle ſei antecedenti propoſitioni, la chiameremo linea congruente, in modo, che quando ſi dirà l'Apotome con la congruente, ſi douerà intendere tutta la retta AC.

DEFINITIONI TERZE.

Eſpoſta la Rationale, e l'Apotome, ſe il quadrato dell'Apotome, con la congruente, ſupera il quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta linea commenſurabile in lunghezza à tutta la compoſta dell'Apotome, e congruente.

I.

Se la compoſta dell'Apotome, e congruente ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà prima Apotome.

II.

Se la ſola congruente ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi dirà ſeconda Apotome.

III.

E ſe ne tutta la compoſta, ne la ſola congruente, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale; ſi dirà terza Apotome.

Di nuouo ſe il quadrato di tutta la compoſta è maggiore del quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza à tutta la compoſta dell'Apotome, e congruente.

IV.

Se la compoſta dell'Apotome, e congruente, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà quarta Apotome.

V.

Se la ſola congruente è commenſurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome ſi chiamerà quinta Apotome.

VI.

E ſe ne tutta la compoſta, ne la ſola congruente è commenſurabile in lunghezza alla Rationale; ſi dirà ſeſta Apotome.

SCOLIO.

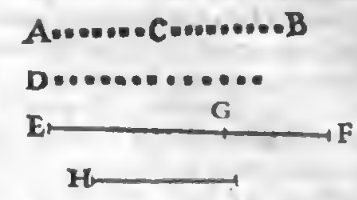
Queſte ſei linee, che ſi chiamano Apotome, prima, ſeconda, terza &c. ſono ſei linee irrationali, che reſtano dalle detrattioni fatte de i minori nomi da quelle ſei linee, che furono chiamate Binomij; ciuè il maggior nome d'ogni Binomio, leuatone il minor nome, ſi chiama Apotome.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIONE LXXXVI.

Ritrouare la prima Apotome.

Per la ſeconda parte al Corollario della 29. propoſitione di queſto, ſi trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non ſia numero quadrato; ſarà la proportione di AB à BC come numero quadrato

drato à numero quadrato; e la proportione di AB ad AC non ſarà come numero quadrato à numero quadrato. Si eſponga qualunque Rationale D, e ſi prenda la retta EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; ſarà la retta EF [a] Rationale, e per il Corollario alla 6. propoſitione di queſto, ſi faccia ſi come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo prima Apotome. Perche la proportione del quadrato di EF al quadrato di FG, per coſtruttione, è come il numero AB al numero AC, i quadrati delle due EF, FG [b] ſaranno commenſurabili, e le rette EF, FG, ſaranno commenſurabili, almeno in potenza: ma la retta EF è dimoſtrata Rationale; ſarà la retta FG, che gli è commenſurabile in potenza, [c] parimente Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato, e perciò i loro lati EF, FG, [d] ſono incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrate Rationali, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette EF, FG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, il rimanente EG ſarà quella, che ſi chiama Apotome, & FG ſarà la ſua congruente. Dico che EG è prima Apotome.



a 6. defin. del 10.

b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di FG, ed il rimanente ſia il quadrato della retta H, ſarà il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Perche AB ad AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC, cioè l'antecedente alla differenza frà l'antecedente, e conſeguente, come il quadrato di EF al quadrato di H, cioè come l'antecedente, ch'è il quadrato di EF, alla differenza, ch'è frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Hor eſſendo il quadrato di EF al quadrato di H come il numero quadrato AB al numero quadrato CB; le due EF, & H [e] ſono commenſurabili in lunghezza; ſi che il quadrato di EF, ch'è compoſta dell'Apotome, e della congruente, ſupera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; ed è la compoſta EF commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la prima delle terze definitioni, la retta EG è quella, che ſi chiama prima Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

e 9. del 10.

PROBLEMA XX. PROPOSITIONE LXXXVII.

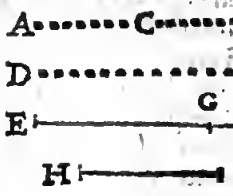
Ritrouare la ſeconda Apotome.

Si ritrouino due numeri quadrati AB, AC, come ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, cioè che la loro differenza AC non ſia numero quadrato. Si eſponga la Rationale D, e ſi prenda la retta GF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; ſarà la retta GF [a] Rationale: per il

a 6. defin. del 10.

Corol-

Corollario alla 6. propoſitione, ſi faccia ſi come AC ad AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome. Perche il quadrato di FG al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, i quadrati delle rette [b] GF, EF, ſaranno commenſurabili, e le rette GF, EF ſaranno commenſurabili, almeno in potenza; e perche GF è ſtata dimoſtrata Rationale, la retta ancora EF, [c] che gli è commenſurabile in potenza, ſarà Rationale. Similmente perche il quadrato di GF al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, ed i numeri AC, AB, per coſtruttione, non ſono come i numeri quadrati; ne meno il quadrato di FG al quadrato di EF ſarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual coſa le rette GF, EF [d] ſono incommenſurabili in lunghezza; ma furono dimoſtrate Rationali, in conſeguenza le rette GF, EF, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, ſarà la rimanente EG Apotome, la di cui congruente ſarà FG. Dico che EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome. Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di GF, ed il reſtante ſia il quadrato di H. Perche AC ad AB è come il quadrato di GF al quadrato di EF, inuertendo, AB ad AC [e] ſarà come il quadrato di EF al quadrato di FG; e per la conuerſione della proportione, ſarà il numero quadrato AB al numero quadrato BC, [f] come il quadrato di EF al quadrato di H: per la qual coſa le due EF, & H [g] ſono commenſurabili in lunghezza; e perciò il quadrato della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; ed è, per coſtruttione, la congruente GF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la ſeconda delle terze definitioni, la retta EG è quella, che ſi chiama ſeconda Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

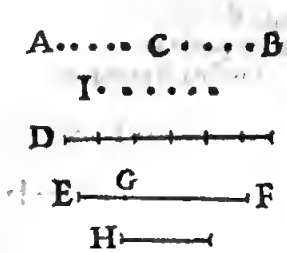


b 6. del 10.
c 6. defin. del 10.
d 9. del 10.
e Corol. alla 4. del 5.
f
g 9. del 10.

PROBLEMA XXI. PROPOSITIONE LXXXVIII.

Ritrouare la terza Apotome.

Si trouino i due numeri AB, BC, come ſi diſſe nella propoſ. 86; poi ſi troui vn altro numero, per eſempio I, il quale non ſia al numero AB, ne meno al numero AC, come numero quadrato à numero quadrato; il che ſi farà col prendere il numero I vna, ò due vnità maggiore del numero AC, come ſi diſſe nella 51. propoſ. di queſto. Oltre à ciò ſi eſponga qualunque Rationale D, e ſi faccia, per il Corollario alla 6. propoſitione, ſi come il numero I al numero AB, così il quadrato della Rationale D al



qua-

quadrato di EF; ſaranno i quadrati di D, & EF, [a] commenſurabili, e le rette D, & EF ſaranno commenſurabili, almeno in potenza: ma la retta D è poſta Rationale, ſarà EF, [b] che gli è commenſurabile in porenza, Rationale. E perche il quadrato di D al quadrato di EF è come il numero I al numero AB; e, per coſtruttione il numero I al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di D al quadrato di EF è come numeto quadraro à numero quadrato: per la qual coſa le rette D, & EF, [c] ſono incommenſurabili in lunghezza. Di nuouo ſi faccia ſi come AB ad AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che EG è la terza Apotome. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, ſarà il quadrato di EF commenſurabile al quadrato di GF; [d] e perciò le rette EF, FG, ſono commenſurabili almeno in potenza: e perche EF fù dimoſtrata Rationale, ancora FG, che gli è commenſurabile in potenza, [e] ſarà Rationale. In oltre, eſſendo il quadrato di EF al quadrato di FG, come AB ad AC; ed i numeri AB, AC, per coſtruttione, non hanno la proportione de i numeri quadrati; ne meno i quadrati delle due EF, FG, hanno la proportione de i numeri quadrati; e perciò le rette EF, FG, [f] ſono incommenſurabili in lunghezza: ma furono dimoſtrate Rationali, ſaranno dunque le due EF, FG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſ. di queſto, EG ſarà Apotome, e la ſua congruente ſarà GF. Dico che EG è quella, che ſi chiama terza Apotome.

Perche il numero I al numero AB è come il quadrato di D al quadrato di EF; ed il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per l'egualità, ſarà il numero I al numero AC, [g] come il quadrato di D al quadrato di GF: ma il numero I al numero AC, per coſtrurtione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadtato di D al quadrato di GF è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual coſa i lati D, & GF, [h] ſono incommenſurabili in lunghezza. Fù dimoſtrata EF incommenſurabile in lunghezza alla medeſima D, in conſeguenza neſſuna delle due EF, FG è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D. Dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H. Si dimoſtri, come ſi fece nell'86. propoſitione di queſto, che la retta H è commenſurabile in lunghezza ad EF; e ſarà il quadrato della compoſta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, commenſurabile in lunghezza alla compoſta EF. E perche niuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la terza delle terze definitioni, la retta EG ſarà quella, che ſi chiama terza Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[a] 6. del 10.
[b] 6. d efin. del 10.
[c] 9. del 10.
[d] 24. del 10.
[e] 6. de fin. del 10.
[f] 9. del 10.
[g] 22 del 5.
[h] 9. del 10.

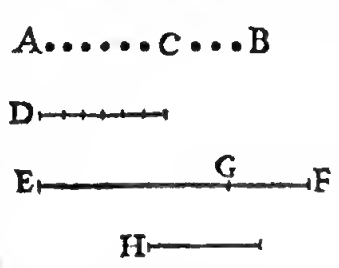
PROBLEMA XXII. PROPOSITIONE LXXXIX.

Ritrouare la quarta Apotome.

Per lo Scolio alla propoſitione 29. ſi trouino i due numeri, come AC, CB, in modo, che il loro aggregato AB non ſia ad AC, ne meno à CB,

come

come numero quadrato à numero quadrato. Poi ſi eſponga la Rationale D, e ſi prenda EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per il che EF ſarà Rationale; e procedendoſi, come ſi fece nell'86. propoſitione, ſi proverà, che EG è Apotome, la di cui congruente ſarà GF. Dico che EG è la quarta Apotome. Dal quadrato di EF[a] ſi detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H. Eſſendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC[b] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual coſa le rette EF, ed H[c] ſono incommenſurabili in lunghezza. Il quadrato dunque della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e la compoſta EF, per coſtruttione, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la quarta delle terze definitioni, la retta EG ſarà quella, che ſi dice quarta Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



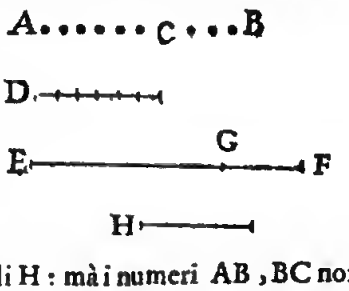
a Lem. dopo la prop. 14.

b Corol. 2 la 19. del 5.

c 9. del 10.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIONE XC.
Ritrouare la quinta Apotome.

Si trouino i due numeri AC, CB, come ſi feee nell'antecedente propoſitione; ſi eſponga la Rationale D, e ſi prenda FG, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D. Nel reſto ſi proſeguiſca, come nell'87. propoſitione, e ſi dimoſtri, che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che ſi dice quinta Apotome. Dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di FG, ed il rimanente ſia il quadrato di H. Eſſendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC[a] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà i numeri AB, BC non hanno la proportione de i numeri quadrati; ne meno i quadrati di EF, ed H, ſono come i numeri quadrati; e perciò le rette EF, ed H[b] ſono incommenſurabili in lunghezza. Per la qual coſa il quadrato della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e la congruente GF, per coſtruttione, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la quinta delle terze definitioni, la retta EG è quella, che ſi chiama quinta Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



a Corol. alla 19. del 5.

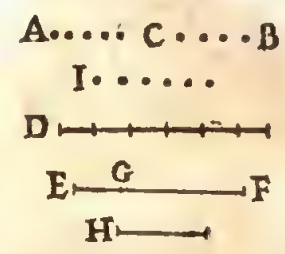
b 9. del 10.

PRO-

PROBLEMA XXIV. PROPOSITIONE XCI.

Ritrouare la ſeſta Apotome.

Per il Corollario ſecondo all'vltima propoſitione del nono Libro, ſi trouino due numeri come AC, CB, che non ſiano piani ſimili, e niuno ſia numero quadrato; ed il loro compoſto, cioè AB, non ſia numero quadrato, ne à ciaſcuno di loro habbia la proportione di numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB non ſia ad AC, ne meno à BC, come numero quadrato à numero quadrato. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per eſempio I, il quale non hauerà ad AC, ne meno ad AB, la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Si eſponga poi qualunque Rationale D, ed il rimanente ſi faccia come nell'88. propoſitione di queſto; e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le rette D, & EF, ſono incommenſurabili in lunghezza; e che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che ſi chiama ſeſta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella citata 88. propoſitione, che D è incommenſurabile in lunghezza alla retta GF; per la qual coſa neſſuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D: dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H; e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'89. propoſitione, che H è incommenſurabile in lunghezza alla retta EF. Hor eſſendo il quadrato della compoſta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e niuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta EG è ſeſto Binomio, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

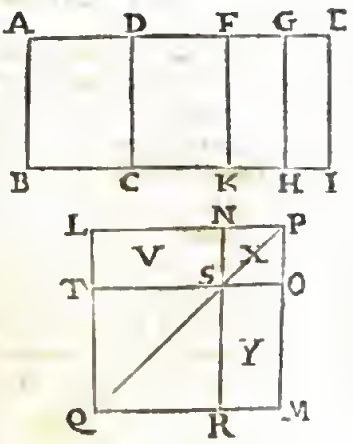


THEOREMA LXVIII. PROPOSITIONE XCII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla prima Apotome, è Apotome.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla prima Apotome AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Aporome. Sia DE la congruente dell'Apotome AD, per la definitione della prima Apotome, le due AE, DE, faranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e tutta la compoſta AE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato della compoſta AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla medeſima AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F; ſarà il quadrato di DF, ouero di [a] 10. del 1.

FE, [b] la quarta parte del quadrato di DE; ſia poi per il primo Lemma dopo la propoſitione 17. di queſto, applicato ad AE vn rettangolo vguale al quadrato di EF, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, e quel rettangolo ſia quello, ch'è contenuto dalle due AG, GE, cioè ſia diuiſa AE, per il Lemma ſecondo dopo la citata 17. propoſitione, talmente in G, che il rettangolo contenuto dalle parti AG, GE ſia vguale al quadrato di FE, cioè alla quarta parte del quadrato di DE. Perche il quadrato di AE ſupera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad AE, per la 18. propoſitione di queſto, le fette AG, GE, ſono commenſurabili in lunghezza; dal che tutto l'aggregato AE ſarà tanto ad AG, come à GE, [c] cõmenſurabile in lunghezza: mà AE è cõmenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ſaranno le due AG, GE [d] commenſurabili in lunghezza alla medeſima Rationale AB; e perciò le due AG, GE, [e] ſono Rationali. Da i punti F, G, E ſi tirino le rette FK, GH, EI [f] parallele ad AB, le quali cõcorreranno con la retta BC, continuata, come in K, H ed I; ſaranno le rette FK, GH, EI rationali; ſtante che ogn'vna è vguale alla Rationale AB: per la qual coſa i rettangoli AH, GI, che ſono contenuti dalle rationali AG, AB, [g] & EG, GH, commenſurabili in lunghezza, ſono Rationali. In oltre perche DE è commenſurabile ſolamente in potenza ad AE, le due DE, AE ſaranno incommenſurabili in lunghezza: mà AE è commenſurabile in lunghezza ad AB; ſarà DE [h] incommenſurabile in lunghezza alla medeſima AB. E perche DE è commenſurabile alla ſua metà FE, ouero DF; ſarà FE, ouero DF [K] incommenſurabile in lunghezza ad AB: mà le due DF, FE ſono rationali, ſtante che ſono commenſurabili alla Rationale DE; ſaranno le due DF, FE Rationali, ed ogn'vna ſarà commenſurabile ſolamente in potenza ad AB, ouero FK. Per la qual coſa i due rettangoli DK, FI, che ſono contenuti da lati rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſono [l] Medij.



Si faccia il quadrato LM [m] vguale al rettangolo AH; e ſi faccia il quadrato NO vguale al rettangolo GI; i quadrati NO, LM, haueranno vn angolo commune, e perciò [n] ſono intorno al medeſimo diametro PQ. Si continui OS in T, ed il lato NS in R. Perche il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, per coſtruttione, è vguale al quadrato di FE; ſarà FE [o] media proportionale frà le due AG, GE; e ſarà AG ad EF come EF ad EG: mà i rettangoli AH, IF, IG ſono [p] come le baſi AG, FE, EG; eſſendo le baſi AG, FE, GE continue proportionali, ſaranno i rettangoli AH, FI, GI [q] continui proportionali, ed il rettangolo FI ſarà Medio proportionale frà li due rettangoli AH, GI: furono fatti i quadrati LM,

NO

b Scol. alla 4. del 2.
c 16. del 2.
d 12. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 31. del 1.
g 20. del 10.
h 13. del 10.
K 13. del 10.
l 22 del 10.
m 14. del 2.
n 26. del 6.
o 17. del 6.
p 1. del 6.
q 11. del 5.

NO vguali à i rettangoli AH, GI; ſarà il rettangolo FI Medio proportionale frà i quadrati LM, NO. E perche il rettangolo LO è Medio proportionale frà i medeſimi quadrati LM, NO; in conſeguenza il rettangolo LO ſarà vguale al rettangolo FI: mà il rettãgolo FI è vguale al rettangolo DK, ed il rettangolo LO è vguale al rettangolo NM; ſarà tutto il rettangolo DI vguale allo gnomone VXY, col quadrato di NO: leuatone vgualmente gli vguali, cioè il quadrato di NO, ed il rettangolo GI; reſta il rettangolo DH vguale allo gnomone VXY; fù fatto, per coſtruttione, il rettangolo AH vguale al quadrato LM; ſarà il rimanente rettangolo AC vguale al quadrato TR; e perciò il quadrato del lato TS ſarà vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella retta, che chiamiamo Apotome.

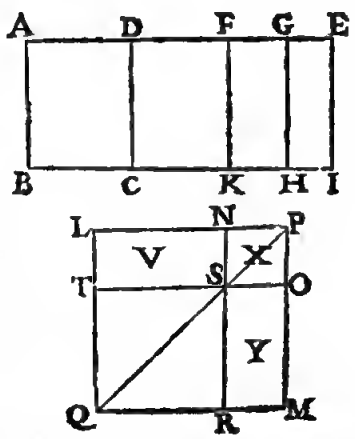
Perche i rettangoli AH, GI ſono dimoſtrati Rationali, i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſaranno Rationali, & i loro lati LP, NP, cioè TO, SO ſono Rationali: In oltre perche il rettangolo FI è dimoſtrato Medio, il rettangolo LO, che gli è vguale, ſarà ancora Medio, e perciò irrationale: ma il quadrato NO è Rationale; i rettangoli LO, NO ſaranno incommenſurabili; e le rette TO, SO, [r] che ſono come i rettangoli LO, NO, [f] ſaranno incommenſurabili in lunghezza. Hor eſſendoſi dimoſtrate le due TO, OS, Rationali, e incommenſurabili in lunghezza, ſaranno le rette TO, SO, Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza. Si che, detratta dalla Rationale TO la Rationale OS, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta OT, la rimanente TS, per la 74. di queſto, ſarà Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

[r] 1. del 6.
[f] 10. del 10.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIONE XCIII.

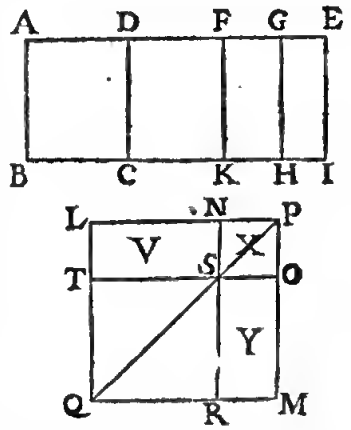
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla ſeconda Apotome, è la prima Apotome della Media.

Sia il rettangolo AC contenuto dalla Rationale AB, e dalla ſeconda Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che ſi chiama prima Apotome della Media. Sia DE la congruente della ſeconda Apotome AD; per la definitione della ſeconda Apotome, le rette AE, DE, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e la congruente DE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE ſupera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla compoſta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente della co-



[a] 10. del 1.

ſtruttione ſi faccia, come nell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le parti AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza; e che tutta AE è commenſurabile in lunghezza tanto ad AG, quanto à GE. Perche la congruente ED, per la natura dell'Apotome, è commenſurabile ſolamente in potenza alla compoſta AE, ſaranno le due AE, DE, incommenſurabili in lunghezza; ma DE è commenſurabile in lunghezza ad AB; ſarà AE [b] incommenſurabile in lunghezza alla medeſima AB; ma AE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza alle due AG, GE; ſaranno le due AG, GE, [c] incommenſurabili in lunghezza alla Rationale AB. E perche le due AG, GE ſono commenſurabili ad AE, ch'è Rationale; ſaranno le due AG, GE [d] Rationali; ed in conſeguenza le due AG, GE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza ad AB. Per la qual coſa i rettangoli AH, GI, contenuti dalle Rationali ſolamente in potenza, [e] ſono Medij. In oltre, perche DE è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà DF, ouero FE, e la medeſima DE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; le due DF, FE, [f] ſaranno commenſurabili in lunghezza alla Rationale AB, ouero FK, che gli è vguale; e perciò le due DF, FE, [g] ſono Rationali; ed i rettangoli DK, FI, che ſono contenuti da linee Rationali, e commenſurabili in lunghezza, ſono [h] Rationali. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la prima Apotome della Media.



b 13. del 10.
c 13. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 22. del 10.
f 12. del 10.
g 6. defini del 10.
h 20. del 10.

Perche le rette AG, GE, ſono commenſurabili in lunghezza, i rettangoli AH, GI, [k] che hanno la proportione di AG à GE, ſaranno [l] commenſurabili: ma i rettangoli AH, GI, ſono vguali à i quadrati LM, NO; i medeſimi quadrati LM, NO, ſaranno commenſurabili, ed i loro lati LP, NP, ouero TO, OS, ſono commenſurabili almeno in potenza. Di più perche i rettangoli AH, GI, ſono ſtati dimoſtrati Medij, i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſarannno Medij, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS, ſono Medie, commenſurabili almeno in potenza. Oltre à ciò, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo FI Rationale, e, per quel che ſi diſſe nell'anteeedente propoſitione, è vguale al rettangolo LO; ſarà il rettangolo LO Rationale; ma il quadrato NO è dimoſtrato Medio, ſarà il Rationale LO incommenſurabile all'irrationale NO; ed i lati TO, OS, [m] che ſono come i rettangoli LO, NO, ſaranno [n] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrati i lati TO, OS Medie, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette TO, OS Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono il Rationale LO (ſtante che PO è vguale ad OS) e per la 75. propoſitione, detratta dalla Media OT la

k 1. del 6. l 19. del 10.
m 1. del 6. n 10. del 10.

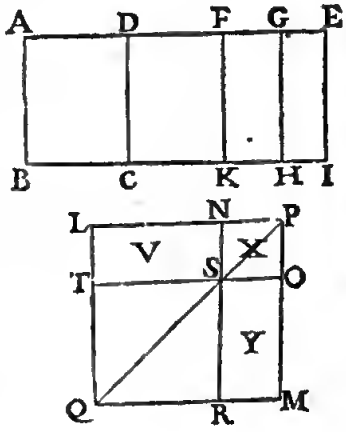
Media

Media OS, commensurabile solamente in potenza ad OT, la rimanente TS sarà la prima Apotome della Media, il che era da dimostrarsi.

THEOREMA LXX. PROPOSITIONE XCIV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla terza Apotome, sarà la seconda Apotome della Media.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla terza Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, sarà quella, che si chiama seconda Apotome della Media. Sia DE la congruente della terza Apotome AD, per la definitione della terza Apotome, le rette AE, DE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e niuna delle due AE, DE, è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato della composta AE supera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad essa composta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, e si faccia il restante della costruttione, come nella 92. propositione di questo; e, come iui si fece, si dimostri, che le rette AG, GE, sono commensurabili frà loro in lunghezza; dal che l'aggregato AE sarà commensurabile in lunghezza [b] tanto ad AG, quanto ad EG: ma la retta AE, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB: le due dunque AG, GE, [c] sono incommensurabili in lunghezza ad AB. E perche le medesime AG, GE, sono commensurabili ad AE, ch'è Rationale; saranno ancora loro [d] Rationali. Per la qual cosa tanto le due BA, AG, quanto le due BA, GE, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e perciò i rettangoli AH, GI, contenuti da esse, [e] saranno Medij. In oltre perche la Rationale DE è commensurabile in lunghezza alla sua metà DF, ouero FE; e la medesima DE, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza ad AB; le due DF, FE, [f] saranno Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale AB: dal che tanto le due BA, DF, quanto le due BA, FE, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa i rettangoli DK, FI, [g] contenuti da esse, sono Medij. Si dimostri poi, come si fece nella propositione 92. che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la seconda Apotome della Media.



a 10. del 1.

b 16. del 10.

c 14. del 10.

d 6. defin. del 10.

e 22. del 10.

f 14. del 10.

g 22. del 10.

Perche i rettangoli AH, GI, per quel che si è dimostrato, sono Medij, perciò i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno Medij, ed i lo-

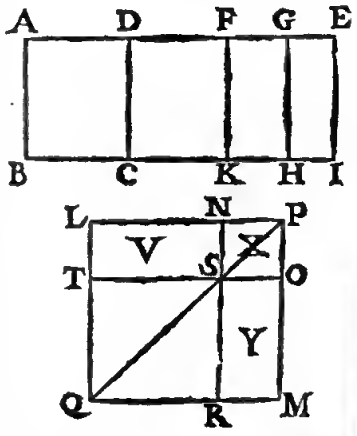
ro lati LP, NP, ouero TO, OS, ſono Medie. Di nuouo, eſſendoſi dimoſtrate le rette AG, GE, commenſurabili in lunghezza, i rettangoli AH, GI, [h] che ſono come AG, à GE, ſaranno [K] commenſurabili, ed i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſono commenſurabili; dal che i lati LP, PN, ouero TO, OS, ſono commenſurabili, almeno in potenza. Oltre à ciò, eſſendo, per ipoteſi, ED commenſurabile ſolamente in potenza ad AE, le due AE, ED, ſaranno incommenſurabili in lunghezza: ma la retta AE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza ad EG, ſarà DE [l] incommenſurabile in lunghezza ad EG: ma DE è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà FE; le due FE, EG, [m] ſaranno incommenſurabili in lunghezza, ed i rettangoli FI, GI, [n] che ſono come le rette FE, GE, ſaranno [o] incommenſurabili. E perche i rettangoli FI, GI, ſono vguali à i rettangoli LO, NO; i rettangoli dunque LO, NO, ſono incommenſurabili, e le rette TO, OS, [p] che ſono come i rettangoli LO, NO, ſaranno [q] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrate Medie, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette TO, OS, Medie, commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo FI eſſer Medio, ſarà il rettangolo LO, che gli è vguale, Medio. Hor eſſendo le due TO, OS, Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono il rettangolo RO Medio, per la 76. propoſ. di queſto, detratta dalla Media OT la Media OS, la rimanente TS ſarà la ſeconda Apotome della Media, ch'era da dimoſtrarſi.

h 1. del 6.
K 10. del 10
l 14. del 10.
m 15. del 10
n 1. del 6.
o 10. del 10.
p 1. del 6.
q 10. del 10.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIONE XCV.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dall'Apotome quarta, è quella, che ſi chiama Minore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quarta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che ſi chiama Minore. Sia DE la congruente della quarta Apotome AD, per la definitione della quarta Apotome, le rette AE, DE, ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e la retta AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato di AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza all'iſteſſa AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ſi applichi ad AE il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, vguale al quadrato di FE, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di DE, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; e da tale applicatione ſia diuiſa



a 1. del 10.

la

la retta AE in G; perche il quadrato di AE ſupera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla medeſima AE, per la 19. propoſitione di queſto, le parti AG, GE, ſono incommenſurabili in lunghezza. Il reſtante della coſtruttione ſi faccia come nella 92. propoſitione di queſto. Perche AE, per la natura della quarta Apotome, è Rationale, ed è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, il rettangolo AI, contenuto da eſſe, [b] ſarà Rationale. Similmente, eſſendo DE, per l'iſteſſa ragione, Rationale, ed è incommenſurabile in lunghezza ad AB; ſaranno le due AB, DE, Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e perciò il rettangolo DI, contenuto dalle due AB, DE, [c] ſarà Medio. In oltre, eſſendo le due AG, GE, incommenſurabili in lunghezza, ed il rettangolo AH al rettangolo GI [d] è come AG, à GE; i rettangoli AH, GI, [e] ſaranno incommenſurabili. Si dimoſtri poi, come ſi fece nella 92. di queſto, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la Minore.

[b] 20. del 10.
[c] 22. del 10.
[d] 1. del 6.
[e] 10. del 10.

Per coſtruttione il rettangolo AI è vguale à i quadrati LM, NO, cioè vguale all'aggregato de i quadrati di LP, PN, ouero di TO, OS: ma il rettangolo AI è dimoſtrato Rationale; l'aggregato dũque de i quadrati di TO, OS, ſarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo DI è dimoſtrato Medio, il doppio rettangolo LO, cioè il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, che gli è vguale, ſarà ancora Medio. Finalmente perche i rettangoli AH, GI ſono dimoſtrati incommenſurabili, i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſaranno incommenſurabili, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS ſono incommenſurabili in potenza. E perche l'aggregato de i loro quadrati è dimoſtrato Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime TO, OS, è Medio, per la 77. propoſitione di queſto, la retta TS è quella, che ſi chiama Minore, ch' era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIONE XCVI.

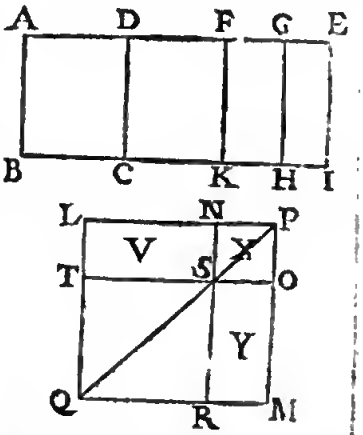
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla quinta Apotome, è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quinta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che ſi dice col Rationale fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della quinta Apotome AD; per la defin. della quinta Apotome, le rette AE, DE ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e la congruente DE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE ſupera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile alla medeſima AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente ſi coſtruiſca, come nell'altre; [e] per quel che ſi è dimoſtrato nell'antecedente propoſitione, le due AG, GE ſono incommenſurabili in lunghezza. E perche AE è Rationale,

[a] 10. del 6.

ed

ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ſarà, come fù dimoſtrato alla 93. propoſitione, il rettangolo AI Medio. In oltre, perche DE è Rationale, ed è commenſurabile in lunghezza alla Rationale
b 20.del 10. AB; ſarà il rettangolo DI [b] Rationale. Si proui, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che i due rettangoli AH, GI, ſono incommenſurabili; e ſi dimoſtri, come nella 92. propoſitione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.



Eſſendoſi dimoſtrato, che il rettangolo AI è Medio, l'aggregato de i quadrati LM, NO, che gli è vguale, ſarà Medio; cioè l'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS, è Medio. Parimente, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo DI Rationale, ſarà il doppio rettãgolo LO, che gli è vguale, Rationale: ma il rettangolo LO è contenuto dalle due rette TO, OS, (ſtante che OS è vguale ad OP) ſarà il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, Rationale. Si moſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le due TO, OS ſono incommenſurabili in potenza; ed haueremo le due rette TO, OS, incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, da loro contenuto, è Rationale, per la 78. propoſitione di queſto, ſarà la rimanente TS quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA LXXIII. PROPOSITIONE XCVII.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e della ſeſta Apotome, è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla ſeſta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della ſeſta Apotome AD, per la definitione di detta Apotome, le rette AE, DE, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e niuna delle due AE, DE, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato di AE ſarà maggiore del quadrato di DE,
a 20. del 1. per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente ſi coſtruiſca, come ſi fece nell'antecedenti propoſitioni; ſaranno le due AG, GE, come fù dimoſtrato nella 95. propoſitione frà di loro incommenſu-

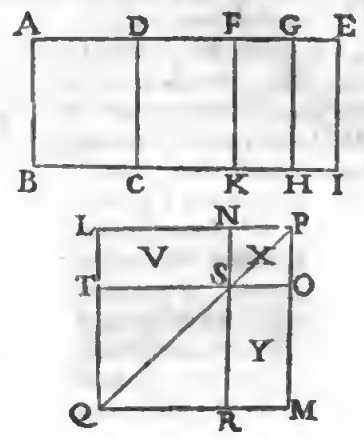
rabili:

rabili: per la qual cosa i rettangoli AH, GI, che sono come le basi AG, GE, saranno incommensurabili. Di nuouo, perche le due AE, ED sono Rationali, ed ogn'vna è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB; tanto le due AB, AE, quanto le due AB, DE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa i rettangoli AI, DI, [b] sono Medij. Di più, essendo, per ipotesi, le due AE, DE, commensurabili solamente in potenza, cioè incommensurabili in lunghezza, i rettangoli AI, DI, che sono [c] come le basi AE, DE; saranno [d] frà loro incommensurabili. Si dimostri, come si fece nella 92. propositione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

b 22. del 10.

c 1. del 6.

d 10. del 10.



Essendo AI per quel che si è dimostrato, Medio, ed il rettangolo AI, è vguale all'aggregato de i quadrati LM, NO, cioè all'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS; l'aggregato de i quadrati delle rette TO, OS, sarà ancora Medio. Inoltre, perche DI è vguale al doppio rettangolo LO, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due TO, OS, ed il rettangolo DI è dimostrato Medio; sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle rette TO, OS, Medio. Di più, essendosi dimostrato DI incommensurabile al rettangolo AI, sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle due TO, OS, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di TO, OS. Finalmente si dimostri, come si fece nella propositione 95. che le rette TO, SO, sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le rette TO, SO, incommensurabili in potenza; l'aggregato de loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è ancora Medio, ed è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, e per la 79. propositione, la rimanente TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.

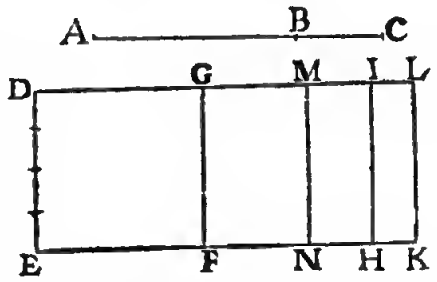
THEOREMA LXXIV. PROPOSITIONE XCVIII.

Applicando il quadrato dell'Apotome alla Rationale, l'altro lato, che ne risulta, è prima Apotome.

Sia l'Apotome AB, e la sua congruente BC, in modo, che le due AC, BC, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e sia esposta qualunque Rationale DE, alla quale si applichi [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è pri-

a 45. del 1.

ma Apotome. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato di AC, ed al lato IH si applichi il rettangolo IK vguale al quadrato di BC, in modo, che tutto il rettangolo DK sia vguale all'aggregato de i quadrati delle due AC, CB. E perche l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, cioè il rettangolo DK, è vguale [c] al doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, col quadrato di AB; leuatone il quadrato di AB, cioè il rettangolo DF, resta il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Si che diuisa GL, [d] in due parti vguali in M, e tirata dal punto M [e] la retta MN, parallela ad ED, ogn'vno de i rettangoli GN, MK, [f] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB. Di nuouo, perche le due AC, BC, sono Rationali, i loro quadrati saranno ancora [g] Rationali, e perciò commensurabili frà di loro; ed il loro aggregato; cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] sarà commensurabile tanto al quadrato di AB, quanto al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, CB, sono, per quel che si è detto, Rationali; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, Rationale; il quale, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [k] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche le due AC, CB, per ipotesi, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sarà Medio, & il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commensurabile, sarà ancora Medio; ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo GK; il rettangolo dunque GK sarà Medio, il quale, applicato alla Rationale GF, ouero DE, [l] fà il lato GL Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale GF, ouero DE. E perche GK è irrationale, cioè è Medio, ed il rettangolo DK è dimostrato Rationale; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo GK; e le rette DL, LG, [m] che sono come i rettangoli DK, GK, sono [n] incommensurabili in lunghezza; le quali, essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e, per la 74. propositione di questo, la rimanente DG sarà Apotome. Dico che è prima Apotome.



Per l'vltimo Coroll. alla 1. propos. del 6. Libro, il rettangolo contenuto dalle due AC, BC, cioè il rettangolo MK, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, BC, ed i quadrati delle due AC, BC sono vguali à i rettangoli DH, IK; sarà il rettangolo MK Medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; e sarà il rettangolo DH al rettangolo MK, come il medesimo rettangolo MK al rettangolo IK; ma questi rettangoli sono [o] come le rette DI, LM, LI; saranno le rette DI, LM, LI, continue proportionali; ed il rettangolo contenuto dalle estreme DI, LI, [p] sarà

vgua-

b 45. del 1.
c 7. del 2.
d 10. del 1.
e 31. del 1.
f 36. del 1.
g 8. defin. del 10.
h 16. del 10.
k 21. del 10.
l 23. del 10.
m 1. del 6.
n 10. del 10.
o 1. del 6.
p 17. del 6.

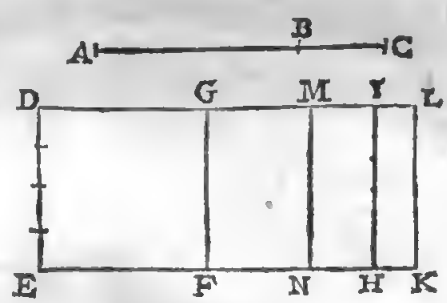
vguale al quadrato di ML. Si è dunque ad LD applicato il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di IL. In oltre, perche i quadrati delle due AC, BC, ſono commenſurabili, ſaranno i rettangoli DH, IK, che gli ſono vguali, frà di loro commenſurabili, ed i lati DI, IL, che ſono q come i rettangoli DH, IK, ſaranno r commenſurabili in lunghezza. Hor eſſendo le rette DL, GL, ineguali, ed alla maggiore DL ſi è applicato il rettangolo contenuto dalle rette DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato della minore GL, e gli manca à compire la linea per il quadrato di IL; eſſendo le parti DI, IL, commenſurabili in lunghezza; per la 18. propoſitione di queſto, il quadrato di DL ſuperarà il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla compoſta DL; ed è la compoſta DL commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la prima delle terze definitioni, ſarà DG prima Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

q 1. del 6.
r 10. del 10.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIONE XCIX.

Applicando alla Rationale il quadrato della prima Apotome della Media; l'altro lato, che ne riſulta, ſarà la ſeconda Apotome.

Sia AB la prima Apotome della Media, e la ſua congruente ſia BC, in modo, che le due AC, BC, ſiano Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale. Si eſponga qualunque Rationale DE, alla quale s'applichi a il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è ſeconda Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione dell' antecedente propoſitione, in modo, che i rettangoli DH, IK, ſiano vguali à i quadrati di AC, CB, ed il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, BC, e la metà, cioè il rettangolo MK, vguale al ſemplice rettangolo delle due AC, CB. Perche le due AC, CB, ſono Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, che gli ſono vguali, ſaranno Medij, frà di loro commenſurabili; dal che il loro aggregato DK b ſarà commenſurabile all'vno, ed all'altro; e perciò DK c ſarà Medio, il quale, applicato alla Rationale DE, fà l'altro lato DL d Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, il doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, cioè



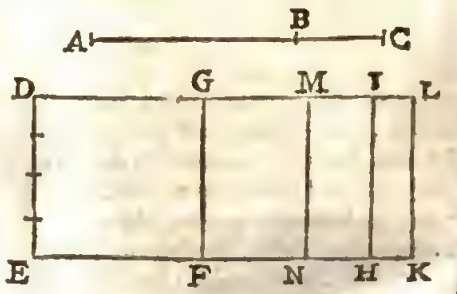
a 45. del 1.
b 16. del 10.
c Corol. alla 24. del 10.
d 23. del 10.

il rettangolo GK, ſarà Rationale, il quale applicato alla Rationale GF,
c 21.del 10. ouero DE, [c] fà il lato GL Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche DK è irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale; i rettangoli DK, GK, ſaranno incommenſurabili:
f 1.del 6. ma i rettangoli DK, GK, [f] ſono come le baſi DL, GL; ſaranno le rette DL,
g 10.del 10. GL, [g] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrate Rationali, perciò le rette DL, GL, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente DG ſarà Apotome; la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è ſeconda Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di DL ſupera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla medeſima DL. E perche ſi è dimoſtrato, che la congruente GL è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la ſeconda delle terze defin. DG, ſarà ſeconda Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIONE C.

Applicando alla Rationale il quadrato della ſeconda Apotome della Media, l'altro lato, che ne riſulta, è terza Apotome.

Sia AB la ſeconda Apotome della Media, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, CB, ſiano Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, e che contengano vn rettangolo Medio. Si eſponga qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato [a] il rettangolo DF, vguale al
a 45. del 1. quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è terza Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione, che ſi è fatta nelle antecedenti, e ſi dimoſtri, come nella precedente propoſitione, che il rettangolo DK è Medio, il quale, applicato alla Rationale DE, [b] fà il lato DL Rationale, ed incommenſurabile in
b 23.del 10. lunghezza ad ED. E perche



il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipoteſi, è Medio, il doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, cioè il rettangolo GK, ſarà Me-
c 23.del 10. dio; il quale, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà il lato GL [c] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Preſe AC, BC, come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia AC;
d 1.del 6. ſarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [d] come AC à CB: ma, per ipoteſi, le due AC, CB, ſono incommenſurabili in lun-
e 10.del 10. ghezza; ſarà il quadrato di AC [e] incommenſurabile al rettangolo conte-

nuto

nuto dalle due AC, CB. In oltre, perche le rette AC, CB, ſono per ipoteſi, commenſurabili in potenza, i loro quadrati ſaranno frà loro commenſurabili; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [f] ſarà commenſurabile al quadrato di AC: ma il quadrato di AC è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [g] incommenſurabile al rettangolo delle medeſime AC, CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AC, BC; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, [h] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo GK: ſono i rettangoli DK, GK, [K] come le baſi DL, LG; ſaranno le rette DL, LG, [l] incommenſurabili in lunghezza; e perche furono dimoſtrate Rationali, le due dunque DL, GL, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la timanente DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è terza Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella propoſitione 98, che il quadrato di DL ſupera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla compoſta DL. Perche neſſuna delle due DL, GL, per quel che ſi è dimoſtrato, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle terze definitioni, ſarà DG quella, che ſi chiama terza Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

f 16. del 10.

g 14. del 10.

h 14. del 10.

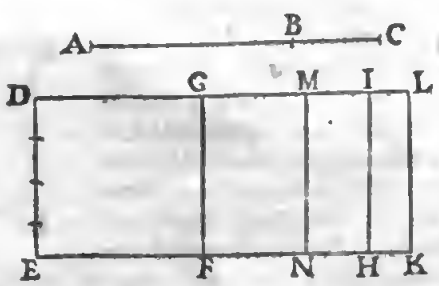
K 1. del 6.

l 10. del 10.

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIONE CI.

Applicando alla Rationale il quadrato della Minore, il lato, che ne riſulta, ſarà quarta Apotome.

Sia la minore AB, e la ſua congruente BC, in modo, che le due AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati ſia Rationale, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio; e ſia eſpoſta qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato della minore AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la quarta Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione, come nell'altre del medeſimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, per ipoteſi, è Rationale, applicato alla Rationale DE, [b] fà l'altro lato DL Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, cioè GK, è Medio, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà l'altro lato GL [c]



a 45. del 5.

b 21. del 10.

c 23. del 10.

Ratio-

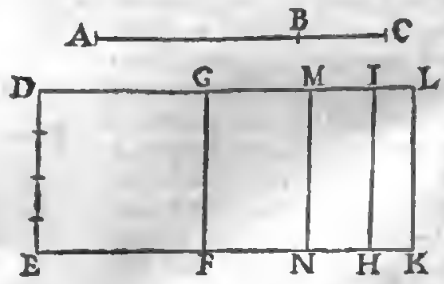
Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche DK è Rationale, ed il rettangolo GK è irrationale, cioè Medio, i rettangoli DK, GK, ſaranno frà loro incommenſurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] ſono come le baſi DL, GL; ſaranno le rette DL, GL, [e] incommenſurabili in lunghezza; e perche le medeſime DL, GL, ſutono dimoſtrate Rationali, le due dunque DL, GL, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la rimanente DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è quarta Apotome. Perche le due AC, BC, per ipoteſi, ſono incommenſurabili in potenza, ſaranno i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, incommenſurabili: ma i rettangoli DH, IK, [f] ſono come le baſi DI, IL, le rette DI, IL [g] ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E perche il rettangolo contenuto dalle medeſime DI, IL, è vguale al quadrato di ML, come fù dimoſtrato nella 98. propoſ., ſarà applicato alla retta DL il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di LI. E perche le rette DI, IL, ſono ſtate dimoſtrate incommenſurabili in lunghezza, per la 19. propoſ. di queſto, il quadrato della compoſta DL ſupera il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla compoſta DL; e fù dimoſtrata la compoſta DL commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la quarta delle tetze defin. ſarà DG la quarta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

d 1. del 6:
e 10. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIONE CII.

Applicando alla Rationale il quadrato di quella, che col Rationale fà il tutto Medio, l'altro lato, che ne riſulta, ſarà la quinta Apotome.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, CB ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Rationale: ſi eſponga qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato di AB, che ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la quinta Apotome. Sia fatta la medeſima coſtruttione, che ſi è fatta nell'altre del medeſimo Senatio. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] ſarà Rationale, ed incommenſura-



a 45. del 1.
b 23. del 10.

bile

bile in lunghezza alla Rationale DE. Di più perche il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, cioè il rettangolo GK, è Rationale, applicato alla Rationale DE, l'altro lato GL [c] ſarà Rationale, e commenſurabile in lunghezza, alla Rationale DE. Hor eſſendo DK irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale, i rettangoli DK, GK, ſaranno incommenſurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] ſono come le baſi DL, GL; ſaranno le rette DL, GL, [e] incommenſurabili in lunghezza, le quali eſſendo ſtate dimoſtrate Rationali, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la retta DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è quinta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di DL è maggiore del quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla compoſta DL. Eſſendoſi dimoſtrato, che la congruente GL è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle terze definitioni, la retta DG ſarà quella, che ſi dice quinta Apotome, come fù propoſto dimoſtrare.

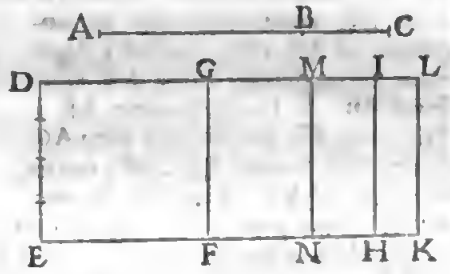
c 23. del 10

d 1. del 6.

e 10. del 10.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIONE CIII.

Applicando alla Rationale il quadrato di quella retta, che col Medio fà il tutto Medio; l'altro lato, che ne riſulta, ſarà la ſeſta Apotome.



Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, CB, ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB. Sia eſpoſta qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF [a] vguale al quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la ſeſta Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione delle altre del medeſimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà l'altro lato DL [b] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, cioè il rettangolo GK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [c] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è incommenſurabile, per ipoteſi, al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo

a 45. del 1.

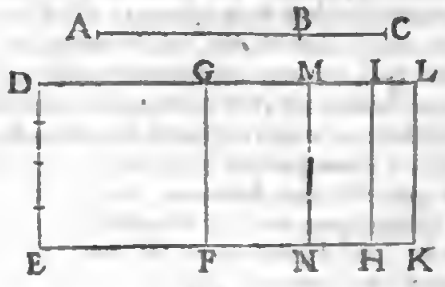
b 23. del 10.

c 23. del 10.

GK.

d 1. del 6. e 10. del 10.

GK, ed i rettangoli DK, GK [d] ſono come le baſi DL, LG; ſaranno le rette DL,LG, [e] incommenſurabili in lunghezza: ma le medeſime DL, LG ſono ſtate dimoſtrate Rationali, ſaranno le due DL, LG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente DG ſarà Apotome. Dico che è ſeſta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella 101. propoſitione, che il quadrato di DL ſupera il quadrato della congruéte GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile alla compoſta DL. E perche le due DL,GL, ſono ſtate dimoſtrate incommenſurabili in lunghezza alla Rationale DE; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta DG ſarà la ſeſta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

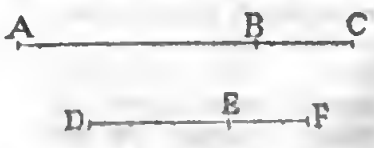


THEOREMA LXXX. PROPOSITIONE CIV.

La retta linea, ch'è commenſurabile in lunghezza all' Apotome, è Apotome del medeſimo ordine.

Sia l'Apotome AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC,BC, ſiano Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e ſia la retta DE commenſurabile in lunghezza ad AB. Dico che DE è Apotome del medeſimo ordine dell'Apotome AB. Si faccia ſi come AB à DE, [a] così BC ad EF, ſarà tutta AC à tutta DF, [b] come AB à DE, ouero come BC ad EF. E perche le due AB,DE ſono, per ipoteſi, commenſurabili in lunghezza, ſarà AC [c] commenſurabile in lunghezza à DF, e ſarà BC commenſurabile in lunghezza ad EF: ma le due AC, BC, per ipoteſi, ſono Rationali; ſaranno le due DF,FE, che gli ſono commenſurabili, [d] ancora Rationali; e perche le due AC,CB, ſono commenſurabili ſolamente in potenza, le due ancora DF, EF, per lo Scolio alla 10. propoſitione, ſaranno commenſurabili in potenza: per la qual coſa le due DF,FE, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la rimanente DE ſarà Apotome. Dico che è del medeſimo ordine dell'Apotome AB. E prima ſia il quadrato di AC maggiore del quadrato di BC, per il quadrato d'vna retta linea, commenſurabile in lunghezza ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE, per la 15. propoſitione, ancora il quadrato di DF ſuperarà il quadrato di FE, per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza alla retta DF. Se dunque AC è commenſurabile in lunghezza à qualche Rationale, in modo, che AB ſia prima Apotome; eſ-

a 12. del 6. b 12. del 5. c 10. del 10. d 6. defin. del 10.



ſendo

ſendo DF, commenſurabile in lunghezza ad AC, ſarà ancora DF [c] commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale, e per la prima delle terze definitioni, la retta DE ſarà prima Apotome, cioè del medeſimo ordine dell'Apotome AB. Se poi BC ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ſarà nell'iſteſſo modo EF commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale; ed ambedue AB, DE, ſaranno ſeconde Apotome. E ſe neſſuna delle due AC, CB, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ne meno alcuna delle due DF, FE, ſarà commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale: per la qual coſa le due AB, DE, ſaranno terze Apotome.

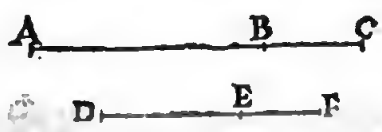
[c] 10. del 10.

Finalmente ſia il quadrato di AC maggiore del quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propoſitione, il quadrato di DF ſarà maggiore del quadrato di EF, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla medeſima DF; e perciò, come prima, ſe AB è quarta, ò quinta, ò ſeſta Apotome, ancora DE ſarà quarta, quinta, ò ſeſta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIONE CV.

La retta linea, ch'è commenſurabile all'Apotome della Media, è ancor eſſa Apotome della Media, e del medeſimo ordine.

Sia qualunque Apotome della Media AB, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, BC, ſiano Medie, commenſurabili ſolamente in potenza; e ſia DE commenſurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero ſolamente in potenza. Dico che la retta DE è Apotome della Media, e del medeſimo ordine. Si faccia, come prima, ſi come AB à DE, così BC ad EF; ſarà tutta AC à DF, [b] come AB à DE, è come BC ad EF. Perche le due AB, DE, per ipoteſi, ſono commenſurabili ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente; ſaranno le due AC, DF, [c] e le due ancora BC, EF, nell'iſteſſo modo commenſurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente. E perche le due AC, BC, ſono Medie, le due ancora DF, FE, che gli ſono commenſurabili; [d] ſaranno Medie. In oltre, perche AC à DF è come BC ad EF, permutando, AC à CB [e] ſarà come DF ad FE: ma le due AC, CB ſono commenſurabili ſolamente in potenza, per lo Scolio alla 10. propoſitione, le due DF, FE, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza: ſono le due DF, FE, per quel che ſi è dimoſtrato, Medie, e, per la 75. propoſitione, la rimanente DE ſarà prima Apotome della Media. Dico che è del medeſimo ordine della Media AB. Preſe AC, CB come baſi di due rettangoli, de'quali AC ſia altezza commune, ſarà il quadrato di AC [f] al rettangolo contenuto delle due AC, CB, come AC à CB. E nell'iſteſſo modo



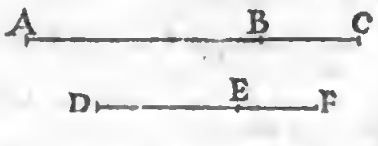
[a] 11. del 6.
[b] 11. del 5.
[c] 10. del 10.
[d] Corol. alla 24. del 10.
[e] 16. del 5.
[f] 1. del 6.

ſi dimoſtrerà, che DF ad FE è come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE: ma DF ad FE è dimoſtrata come AC à CB; ſarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [h] ſarà come il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commenſurabile al quadrato di DF (ſtante che le rette AC, DF, ſono dimoſtrate commenſurabili) ſarà il rettangolo delle due AC, CB, [k] commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è Rationale, in modo, che AB ſia prima Apotome della Media, ſarà ancora il rettangolo contenuto dalle due DF, FE, [l] che gli è commenſurabile, Rationale: Dal che la retta DE ſarà quella, che ſi chiama prima Apotome della Media, cioè del medeſimo ordine dell'Apotome AB. Se poi il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, in modo, che AB ſia ſeconda Apotome della Media; ſarà il rettangolo delle due DF, FE, che gli è commenſurabile, Medio. Per la qual coſa la retta DE ſarà [m] ſeconda Apotome della Media, ch'era da dimoſtrarſi.

g 21. del 5.
h 16. del 5.
k 10. del 10.
l 9. defin. del 10.
m 76. del 10.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIONE CVI.

La retta linea, ch'è commenſurabile alla minore, è ancor eſſa Minore.



Sia la Minore AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC, BC, ſiano incommenſurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB ſia Medio: e ſia DE commenſurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente. Dico che la retta DE è quella, che ſi chiama Minore. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione, e ſi proui, come iui ſi fece, che le due DF, AC, come ancora le due EF, BC, ſono commenſurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente. E perche AC à DF è come BC ad EF, permutando, AC à BC [a] ſarà come DF ad EF, ed il quadrato di AC al quadrato di BC [b] ſarà come il quadrato di DF al quadrato di FE; e componendo, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, al quadrato di CB, [c] ſarà come l'aggregato de i quadrati di DF, FE, al quadrato di FE; e permutando, l'aggregato de i quadrati di AC, CB all'aggregato de i quadrati di DF, FE, [d] ſarà come il quadrato di CB al quadrato di EF: Ma il quadrato di CB è commenſurabile al quadrato di FE (ſtante che le rette CB, FE, ſono ſtate dimoſtrate commenſurabili) ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [e] commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipoteſi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di DF, FE, che gli è commenſurabile, [f] ſarà Rationale. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antece-

a 16. del 5.
b 22. del 6.
c 18. del 5.
d 16. del 5.
e 10. del 10.
f 9. defin. del 10.

dente

dente propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due DF, FE; dal che il doppio rettangolo delle due AC, CB, sarà commensurabile al doppio rettangolo delle due DF,FE: ma il doppio rettangolo delle due AC,CB, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, [g] che gli è commensurabile, Medio. E perche AC à BC è come DF ad FE, e le due AC, BC, sono, per ipotesi, incommensurabili in potenza; saranno le due ancora DF, FE, [h] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF, FE, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime DF, FE, è Medio: per la 77. propositione di questo, la retta DE sarà quella, che si chiama Minore, come fù proposto dimostrare.

[g] Corol. alla 24. del 10.

[h] 10. del 10.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIONE CVII.

La retta linea, ch'è commensurabile à quella, che col Rationale fà il tutto Medio, è ancor essa quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC,CB, siano incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati, cioè di AC,CB, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC,CB, sia Rationale; e sia DE commensurabile ad AB in qualunque modo. Dico che ED è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Si faccia la medesima costruttione dell'altre antecedenti, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è commensurabile all'aggregato de i quadrati delle due DF, FE: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [a] Medio. Similmente si dimostri, come si fece nella 105. propositione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo delle due DF,FE; dal che i loro doppij saranno ancora commensurabili: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, che gli è commensurabile, [b] Rationale. Finalmente perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB, per ipotesi, sono incommensurabili in potenza; saranno ancora le due DF, FE, [c] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF,FE, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di DF, FE, è Medio; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è Rationale; per la 78. propositione di questo, sarà la retta DE quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.

[a] Corol. alla 24. del 10.

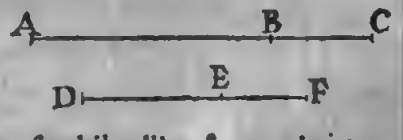
[b] 9. defin. del 10.

[c] 10. del 10.

THEOREMA LXXXIV. PROPOSITIONE CVIII.

La retta linea, ch'è commensurabile à quella, che col Medio fà il tutto Medio, è ancor essa quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, BC siano incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati; e sia DE commensurabile ad AB in qualunque modo. Dico che DE è quella, che col Medio fà il tutto Medio.



Si faccia la medesima costruttione dell'altre di questo Senario, e si dimostri, come nella 106. che l'aggregato de i quadrati di AC, CB è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. Essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB Medio, sarà ancora l'aggregato de i quadrati di DF, FE [a] Medio. In oltre si dimostri, come si fece nella 105. propositione, che il rettangolo delle due AC, BC è commensurabile al rettangolo delle due DF, FE, i loro doppij saranno ancora commensurabili: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, [b] che gli è commensurabile, Medio. Di nuouo perche AC à CB è come DF ad FE; sono le due AC, CB, per ipotesi, incommensurabili in potenza, le due ancora DF, FE [c] saranno incommensurabili in potenza. Finalmente perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, come si disse, è commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; & il doppio rettangolo delle due AC, CB è commensurabile al doppio rettangolo delle due DF, FE; essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB; sarà l'aggregato de i quadrati delle due DF, FE [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime DF, FE. Hor perche le due DF, FE sono incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo delle medesime DF, FE, è Medio incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati; per la 79. propositione, la retta DE sarà quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.

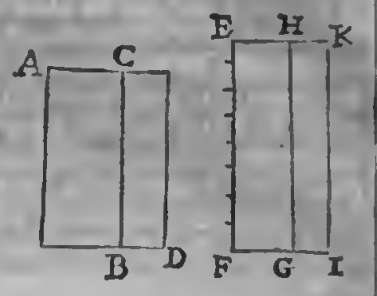
a 24. del 10.
b 24. del 10.
c 10. del 10.
d 14. del 10.

THEOREMA LXXXV. PROPOSITIONE CIX.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Rationale supera il Medio, è vna delle due irrationali, cioè, ò Apotome, ouero la Minore.

Dal

Dal Rationale AD ne ſia detratto il Medio CD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AB, ò è Apotome, ouero è la Minore. Sia eſpoſta qualunque Rationale EF, alla quale ſia applicato il rettangolo EG [a] vguale allo ſpatio AB; eſſendo HG vguale ad EF, ſarà HG Rationale. Si applichi ad HG il rettangolo HI, [b] vguale al Medio CD, in modo, che tutto il rettangolo EI ſia vguale al Rationale AD; dal che EI ſarà Rationale, ed il lato EK [c] ſarà Rationale, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo eſſendo HI Medio (per eſſere vguale al Medio CD) applicato alla Rationale HG, l'altro lato HK [d] ſarà Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; ma EF, per quel che ſi è dimoſtrato, è commenſurabile in lunghezza ad EK: le due EK, HK [e] ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E perche le medeſime ſono ſtate dimoſtrate Rationali; perciò le rette EK, HK, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente EH ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà HK. Inoltre il quadrato della compoſta EK ſupera il quadrato della congruente HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, ouero ſarà alla medeſima incommenſurabile. Se è commenſurabile ad EK, eſſendoſi dimoſtrata EK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la prima delle terze definitioni, ſarà EH prima Apotome; e per la 92. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla prima Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà Apotome. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile ad EK, eſſendoſi dimoſtrata la retta EK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la quarta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la quarta Apotome, la di cui congruente ſarà HK; e per la 95. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla quarta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, è quella, che ſi chiama Minore, come fù propoſto dimoſtrare.

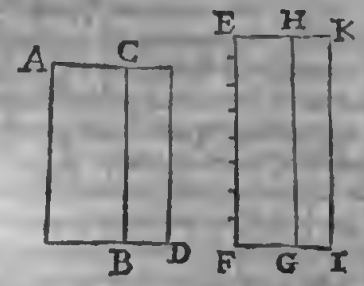


a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 21. del 10.
d 23. del 10.
e 13. del 10.

THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIONE CX.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Medio ſupera il Rationale, ò ſarà prima Apotome della Media, ouero ſarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dal Medio AD se ne detragga il Rationale CD . Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo spatio AB, ò è prima Apotome, ouero è quella, che col Rationale fà il tutto Medio. Si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione. Essendo il rettangolo EI vguale al Medio AD, sarà EI Medio, il quale, applicato alla Rationale EF, [a] 23. del 10. farà il lato EK Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo perche HI è vguale al Rationale CD, sarà HI Rationale, che, applicato alla Rationale HG, [b] 21. del 10. fà il lato HK Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF: ma EF è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad EK; le due EK, HK [c] 13. del 10. saranno incommensurabili in lunghezza; E perche sono Rationali, perciò sono le due HK, EH Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione, la rimanente EH è Apotome, la di cui congruente sarà HK. In oltre il quadrato di EK supera il quadrato di HK per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza ad EK, ouero incommensurabile: Se sarà commensurabile in lunghezza ad EK, essendosi dimostrata la congruente HK commensurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la seconda delle terze definitioni, EH sarà seconda Apotome; e per la 93. propositione di questo, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, conrenuto dalla Rationale EF, e dalla seconda Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, sarà la prima Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK supera il quadrato HK, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza alla medesima EK; essendosi dimostrata la congruente HK commensurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la quinta delle terze definitioni, la retta EH sarà la quinta Apotome; e per la 96. propositione di questo, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale EF, e dalla quinta Apotome EH, cioè vguale allo spatio AB, sarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.



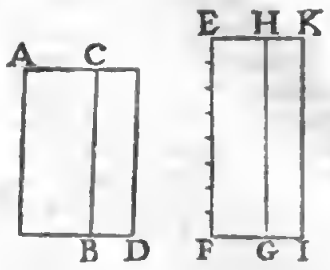
THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIONE CXI.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza, ch'è frà due Medij, trà loro incommensurabili; ò è la seconda Apotome della Media, ouero è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dal Medio AD ne sia detratto il Medio CD, il quale sia incommensurabile al tutto AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al

rima-

rimanente AB, ò è la ſeconda Apotome della Media, oueto è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia fatta la medeſima coſtruttione della 109. propoſitione. Perche i due rettangoli EI, HI, per coſtruttione, ſono vguali à i due Medij AD, CD, i due EI, HI, ſaranno Medij, i quali, applicati alla Rationale EF, ouero HG, fanno i lati EK, HK [a] Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF.



a 23.del 10.

E perche i due AD, CD, cioè EI, HI, per ipoteſi, ſono incommenſurabili, ed i rettangoli EI, HI [b] ſono come le baſi EK, HK, le rette EK, HK [c] ſaranno incommenſurabili in lunghezza: ma ſono ſtate dimoſtrate Rationali; ſaranno in conſeguenza le due EK, HK Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente EH ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà HK. Di nuouo il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza alla compoſta EK, ouero ſarà incommenſurabile: Se è commenſurabile in lunghezza ad EK. Perche neſſuna delle due EK, HK è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la terza delle terze definitioni, il rimanente EH ſarà la terza Apotome; e per la 94. propoſitione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla terza Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà la ſeconda Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza ad EK; eſſendoſi dimoſtrato, che neſſuna delle due EK, HK, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la ſeſta Apotome, la di cui congruente ſarà HK; e per la 97. propoſ. di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla ſeſta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, è quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

b 1. del 6.

c 10.del 10.

THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIONE CXII.

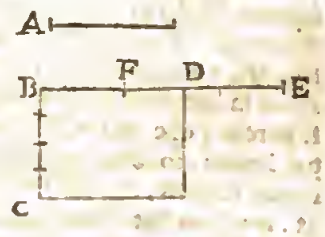
L'Apotome è diuerſa dal Binomio.

Sia qualunque Apotome A. Dico che A non è Binomio. Sia A, ſe è poſſibile, qualcuno de i binomij. Sia eſpoſta qualunque Rationale BC, alla quale ſi applichi il rettangolo CD [a] vguale al quadrato della retta A. Perche A, per ipoteſi, è Apotome, l'altro lato BD ſaràquella, che ſi chiama prima Apotome; alla quale s'intenda aggiunta la ſua congruente DE, e per la definitione della prima Apotome, le due BE, DE, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato di BE ſuperarà il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commen-

a 45.del 1.

ſurabile

ſurabile in lunghezza alla medeſima BE; e la retta BE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale BC. Di nuouo perche A è ſuppoſta ancora eſſere vno de i binomij, ſarà il lato BD, per la 61. di queſto, primo binomio; il quale ſi concepiſca diuiſo ne i ſuoi nomi, e ſia BF il maggior nome; e per la definitione del primo Binomio, le due BF, FD ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato di BF ſuperarà il quadrato di FD, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza al maggior nome BF; ed il maggior nome BF ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale BC. E perche tanto BE, come BF, è commenſurabile in lunghezza alla medeſima BC; le due BE, BF [b] ſaranno frà loro commenſurabili in lunghezza. Hor eſſendo tutta BE commenſurabile in lunghezza alla ſua parte BF, ſarà la medeſima BE [c] commenſurabile in lunghezza al rimanente FE: ma BE è Rationale; ſarà FE, [d] che gli è commenſurabile, Rationale. In oltre perche le due BE, DE, ſono ſtate dimoſtrate Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, ſaranno le medeſime BE, ED incommenſurabili in lunghezza: ma BE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza ad FE, ſarà ED [e] incommenſurabile in lunghezza ad FE; furono dimoſtrate ambedue Rationali, in conſeguenza le medeſime FE, DE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente FD ſarà Apotome; e perciò irrationale. Fù dimoſtrata la retta FD Rationale; ſarà Rationale, ed Irrationale, ch'è impoſſibile. Non dunque A, eſſendo Apotome, è la medeſima che vno de i Binomij: ma è dinerſa dal Binomio, come fù propoſto dimoſtrare.



b 12. del 10.

c 16. del 10.
d 6. defin. del 10.

c 14. del 10.

SCOLIO.

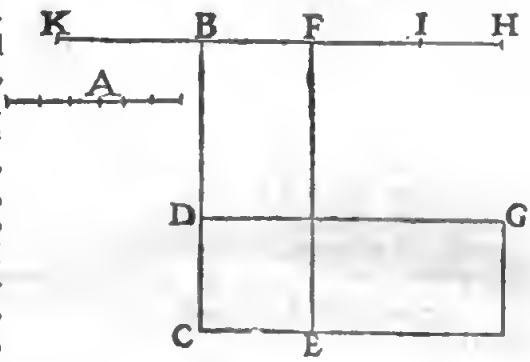
Le linee Irrationali diuerſe frà di loro, delle quali ſi è parlato ſin hora, ſono le ſeguenti tredici linee.

1 Media.
2 Binomio, che ſi diuide in ſei ſpecie.
3 Prima Bimediale.
4 Seconda Bimediale.
5 Maggiore.
6 Potente per il Rationale, e Medio.
7 Potente per due Medij.
8 Apotome, che ſi diuide in ſei ſpecie.
9 Prima Apotome della Media.

10 Seconda Apotome della Media.
11 Minore.
12 Col Rationale fà il tutto Medio.
13 Col Medio fà il tutto Medio.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIONE CXIII.

Applicando il quadrato della Rationale al Binomio, il lato, che ne risulta, sarà Apotome, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi del Binomio, e sono nella medesima proportione; ed, oltre à ciò, l'Apotome, che da questa applicatione si genera, tiene il medesimo ordine del Binomio.

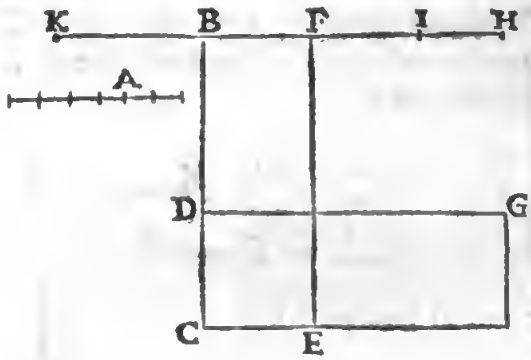


Sia qualunque Rationale A, ed il Binomio BC, il di cui maggior nome sia BD; ed al Binomio BC sia applicato il rettãgolo BE, a vguale al quadrato della Rationale A; l'altro lato, che ne risulta, sia BF. Dico che BF è Apotome, i di cui nomi, cioè la composta dell'Apotome, e sua congruente per vn nome, e la detta congruente per l'altro nome, sono commensurabili à i nomi BD, DC, del Binomio BC; e che sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò, l'Apotome BF è del medesimo ordine del Binomio BC. Di nuouo al minor nome DC del Binomio, si applichi il rettangolo CG b vguale al quadrato della Rationale A; sarà CG Rationale, il quale, applicato alla Rationale DC, fà l'altro lato DG, c Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DC. Si faccia BH vguale alla retta DG, sarà BH Rationale, e commensurabile in lunghezza à DC. E perche i rettangoli BE, CG, sono frà di loro vguali; sarà BC à CD, d come DG, ouero HB, à BF; e diuidendo, BD à DC e sarà come HF ad FB: ma BD, per ipotesi, è maggiore di DC, sarà HF maggiore di FB. Si faccia FI vguale ad FB, e si faccia, si come HI ad IF, f così FB à BK; componendo, sarà HF ad FI, g ouero HF ad FB, come FK à BK: ma HF ad FB, per quel che si è dimostrato, è come BD à DC; sarà BD à DC h come FK à BK: e perche i due BD, DC, (come nomi del Binomio) sono Rationali, e commensurabili solamente in

a 45. del 1.
b 45. del 1.
c 21. del 10.
d 14. del 6.
e 17. del 5.
f 10. del 6.
g 18. del 5.
h 11. del 5.

potenza: i due dunque FK, BK ſaranno ancora Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza.

Di nuouo, perche l'antecedente HF al conſeguente FB è come l'antecedente FK al conſeguente KB; gli antecedenti inſieme HF, FK, cioè HK, à i conſeguenti inſieme FB, BK, cioè FK, [k] ſaranno come vn antecedente ad vn conſeguente; cioè come FK à KB. Hor eſſendo HK ad FK come FK à KB, ſarà FK Media proportionale frà le due HK, BK; dal che la prima HK alla terza KB, per il Lemma 8. dopo la 18. del 6. Libro, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima HK alla ſeconda KF; ma il quadrato di HK al quadrato di KF [l] hà la medeſima duplicata proportione di HK à KF: ſarà il quadrato di HK al quadrato di KF, come la prima HK alla terza KB. In oltre, perche BD à DC, per quel che ſi è dimoſtrato, è come FK à KB, & è FK à KB come HK à KF; ſarà BD à DC, [m] come HK à KF; ed il quadrato di BD al quadrato di DC [n] ſarà come il quadrato di HK al quadrato di KF: ma il quadrato di BD è commenſurabile al quadrato di DC (ſtãte che BD, DC, ſono nomi del Binomio) ſarà ancora il quadrato di HK [o] commenſurabile al quadrato di KF. Fù dimoſtrato il quadrato di HK al quadrato di KF eſſere come HK à KB; eſſendo il quadrato di HK commenſurabile al quadrato di KF, ſarà la retta HK [p] commenſurabile in lunghezza alla retta KB; e la medeſima HK, per il Corollario alla 16. propoſitione di queſto, ſarà commenſurabile in lunghezza al reſtante BH. Fù dimoſtrata BH Rationale, in conſeguenza HK, [q] che gli è commenſurabile, ſarà Rationale: e ſimilmente KB, che è commenſurabile à KH, ſarà ancora Rationale. E perche le due FK, KB, furono dimoſtrate commenſurabili ſolamente in potenza, eſſendo KB Rationale, ſarà ancora FK, [r] che gli è commenſurabile, Rationale. Per la qual coſa, le due FK KB ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente BF ſarà Apotome, la di cui congiuntè ſarà BK, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Eſſendoſi dimoſtrata tutta HK commenſurabile in lunghezza alla parte KB, ſaranno le parti KB, BH [t] commenſurabili in lunghezza: ma BH fù dimoſtrata commenſurabile in lunghezza alla retta DC, ſarà KB [u] cõmenſurabile in lunghezza alla medeſima DC. In oltre perche ſi è dimoſtrato, che BD à DC è come FK à KB, permutando, [x] ſarà BD ad FK come DC à KB: fù dimoſtrata la retta DC commenſurabile in lunghez-

k 12. del 5.
l 20. del 6.
m 11. del 5.
n 22. del 6.
o 10. del 10.
p 10. del 10.
q 6. defin. del 10.
r 6. defin. del 10.
t 16. del 10.
u 12. del 10.
x 16. del 5.

za alla retta BK; sarà BD y ancora commensurabile in lunghezza ad FK. Hor essendo FK commensurabile in lunghezza à BD, e la retta BK commensurabile in lunghezza à DC; le rette dunque FK, KB, che sono i nomi dell'Apotome BF, saranno commensurabili in lūghezza à i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo. y 10.del 10.

Similmente essendosi dimostrato, che BD à DC è come FK à BK, i nomi dunque FK, KB, dell'Apotome BF, sono nella medesima proportione de i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

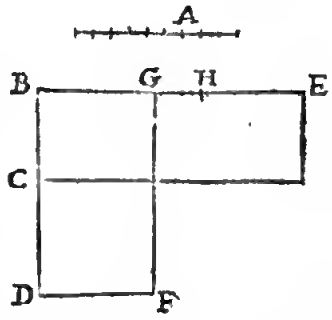
Finalmente il quadrato del maggior nome BD supera il quadrato del minor nome DC, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza al maggior nome BD, ouero sarà incommensurabile in qualunque modo. Perche BD, à DC, è come FK à KB, se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza à BD, il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB z, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad FK; e se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome BD; il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza ad FK. Di più, se BD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora FK (ch'è commensurabile in lunghezza à BD) commensurabile in lunghezza alla Rationale A: e se il minor nome DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora KB, (ch'è commensurabile à DC in lunghezza) commensurabile in lunghezza alla Rationale A. Ed in vltimo, se nessuna delle due BD, DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ne meno alcuna delle due FK, KB & sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che si disse nelle seconde, e terze definitioni, l'Apotome BF sarà del medesimo ordine del Binomio BC; cioè, se il Binomio BC sarà primo, ò secondo, ò terzo Binomio &c. sarà ancora l'Apotome BF prima, ò seconda, ò terza Apotome &c. come fù proposto dimostrare. z 15.del 10. & 14.del 10.

THEOREMA XC. PROPOSITIONE CXIV.

Applicando il quadrato della Rationale all'Apotome, l'altro lato, che ne risulta, è Binomio; i di cui nomi sono commensurabili à i nomi dell'Apotome, e sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò il Binomio è del medesimo ordine dell'Apotome.

Sia la Rationale A, e l'Apotome BC, la di cui congruente sia CD; sarà BD il maggior nome dell'Apotome, e perciò Rationale. Sia applicato all'Apotome BC il rettangolo CE, a vguale al quadrato della Rationale A, dal quale risulti il lato BE. Dico che BE è Binomio, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi BD, DC, dell'Apotome BC, e sono a 45.del 1.

nella medeſima proportione; ed oltre à ciò, il Binomio BE è del medeſimo ordine dell'Apotome BC. Alla compoſta BD ſi applichi il rettangolo BF [b] vguale al quadrato della Rationale A; ſarà il rettangolo BF Rationale, ed vguale al rettangolo CE. E perche il Rationale BF è applicato alla Rationale BD, il lato BG, che ne riſulta, ſarà [c] Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla compoſta BD. Perche i due rettangoli BF, CE, per coſtruttione, ſono frà di loro vguali, perciò hanno i lati reciprochi, e ſarà BE à BG [d] come BD à BC; e per la conuerſione della proportione, BE ad EG [x] ſarà come BD, à DC. Si diuida EG in H, in modo, che EH ad HG [e] ſia come BE ad EG; e ſarà tutta BE à tutta GE come la parte EH, detratta da BE, alla parte HG, detratta da GE; dal che il rimanente BH al rimanente HE [f] ſarà come tutta BE à tutta GE: ma BE ad EG, per coſtruttione, è come EH ad HG; ſarà BH ad HE [g] come la medeſima HE ad HG: per la qual coſa EH è Media proportionale frà le due BH, HG. E perche la prima BH alla terza HG, per il Lemma 8. dopo la 18. del 6, hà duplicata proportione, che la prima BH alla ſeconda HE; ed il quadrato di BH al quadrato di HE [h] hà la medeſima duplicata proportione, che hà BH ad HE; ſarà il quadrato di BH al quadrato di HE come la prima BH alla terza HG. E perche fù dimoſtrato, che BD à DC è come BE ad EG, cioè come BH ad HE; e le due BD, DC, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza (ſtante che ſono nomi dell'Apotome BC) ſaranno le due BH, HE [K] commenſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa i quadrati delle due BH, HE, ſono commenſurabili; e le rette BH, GH, che furono dimoſtrate come i quadrati di BH, HE, [l] ſono commenſurabili in lunghezza. Hor eſſendo BH commenſurabile in lunghezza alla parte GH, [m] ſarà ancora commenſurabile in lunghezza al rimanente BG; e le due BG, GH, ſaranno commenſurabili in lunghezza frà loro. E perche BG fù dimoſtrata Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla retta BD; ſarà ancora BH Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla medeſima BD. In oltre, perche le due BH, HE ſono ſtate dimoſtrate commenſurabili ſolamente in potenza, e la retta BH è dimoſtrata Rationale; ſarà ancora HE, la quale gli è commenſurabile in potenza, [n] Rationale; e perciò le due BH, HE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 37. propoſitione di queſto, la retta BE ſarà Binomio, il che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Di nuouo, eſſendoſi dimoſtrato che BH ad HE è come BD à CD; permutando, BH à BD [o] ſarà come HE à CD: fù dimoſtrata BH commenſurabile in lunghezza à BD; ſarà ancora HE [p] commenſurabile in lunghezza à CD: per la qual coſa le due BH, HE, che ſono i nomi del Binomio BE, ſono commenſurabili in lunghezza alle due BD, CD, che

ſono

b 45. del 1o
c 21. del 10.
d 14. del 6.
x Corol. alla 19. del 5. e 20. del 6.
f 19. del 5.
g 11. del 5.
h 20. del 6.
K 10. del 10.
l 10. del 10. m Corol. alla 16. del 30.
n 6. defin. del 10.
o 16. del 5.
p 10. del 10.

ſono i nomi dell'Apotome BC, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo. Fù ancora dimoſtrata BH ad HE come BD à DC, perciò hanno la medeſima proportione, ch'era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente perche BD à DC è come BH ad HE, ſe il quadrato di BD ſupera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza alla medeſima BD, ancora il quadrato di BH ſuperarà il quadrato di HE, [q] per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza ad eſſa BH; e ſe il quadrato di BD ſupera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza à BD, ancora il quadrato di BH ſuperarà il quadrato di HE, [r] per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza à BH. Si che, ſe BD è commenſurabile in lunghezza alla Rationale A, ancora BH (ch'è commenſurabile in lunghezza à BD) ſarà commenſurabile [t] in lunghezza alla Rationale A: e ſe CD è commenſurabile in lunghezza alla Rationale A, ancora HE (ch'è commenſurabile in lunghezza à CD) ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale A: E finalmente, ſe neſſuna delle due BD, DC è commenſurabile in lunghezza ad A, ne meno alcuna delle due BH, HE [u] ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che ſi diſſe nelle ſeconde, e terze definitioni, BE ſarà Binomio del medeſimo ordine dell'Apotome BC; cioè, ſe l'Apotome BC ſarà ptima, ò ſeconda, ò terza Apotome &c, ſarà ancora BE ptimo, ò ſecondo, ò terzo Binomio &c, ch'era da dimoſtrarſi.

q 15. del 10.

r 15. del 10.

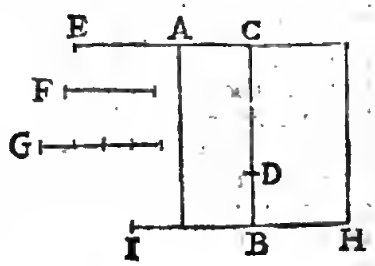
t 12. del 10.

u 14. del 10.

THEOREMA XCI. PROPOSITIONE CXV.

Se vn rettangolo è contenuto dall'Apotome, e dal Binomio, ed i nomi del Binomio ſono commenſurabili à i nomi dell'Apotome, e ſono nella medeſima proportione; la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è Rationale.

Sia il rettangolo AB, contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB, i di cui nomi CD, DB, ſiano commenſurabili à i nomi CE, AE, dell'Apotome AC; e ſia CD à DB, come CE ad EA; s'intenda la retta F, il di cui quadrato ſia vguale al rettangolo AB. Dico che la retta F è Rationale. Sia eſpoſta la Rationale G; ſi applichi al Binomio CB il rettangolo CH, [a] vguale al quadrato della Rationale G; ſarà CH Rationale, ed il lato BH [b] ſarà Apotome, della quale IB ſia la congruente; dal che i nomi ſaranno HI, IB, commenſurabili in lunghezza à i nomi CD, DB, e nella medeſima proportione, cioè HI ad IB ſarà come CD à DB: ma



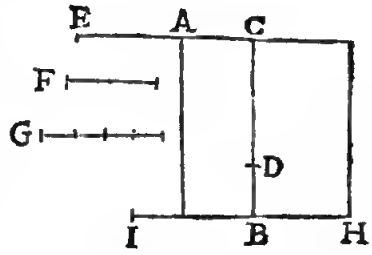
a 45. del 1.

b 113. del 10.

CD à

c 11. del 5. d 16. del 5. e 19. del 5. f 12. del 10. g 10. del 10. h 1. del 6. K 10. del 10. l 9. defin. del 10. m 3. defin. del 10.

CD à DB, per ipoteſi, è come CE ad EA; ſarà HI ad IB [c] come CE ad EA; e permutando, tutta HI à tutta CE [d] ſarà come la parte IB alla parte EA; dal che l'auanzo HB all'auanzo CA [e] ſarà come tutta HI à tutta CE. In oltre perche tanto IH, come CE, è commenſurabile in lunghezza à CD; le due HI, CE [f] ſaranno commenſurabili in lunghezza: ma HI à CE è dimoſtrata eſſere come HB à CA; ſarà HB [g] commenſurabile in lunghezza à CA. Hor perche i rettangoli HC, BA, hanno vna medeſima altezza, ſarà HC ad AB, [h] come HB à CA; e perche HB è commenſurabile in lunghezza ad AC; ſarà HC [K] commenſurabile ad AB: ma HC è Rationale, ſarà il rettangolo AB, che gli è commenſurabile, [l] Rationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale ad AB, [m] ſarà Rationale, come fù propoſto dimoſtrare.



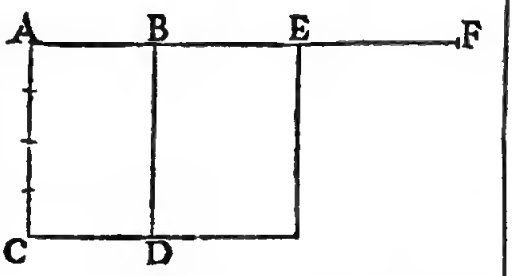
COROLLARIO.

Da quel che ſi è detto, è manifeſto, che vno ſpatio Rationale può eſſere contenuto da due rette Irrationali; mentre il rettangolo AB è Rationale, ed è contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB, che ſono linee Irrationali.

THEOREMA XCII. PROPOSITIONE CXVI.

Dalla Media ne naſcono infinite linee Irrationali; e neſſuna è la medeſima delle tredici ſpiegate antecedentemente.

Sia la Media AB. Dico che dalla Media AB ne naſcono infinite linee Irrationali; e neſſuna di quelle è la medeſima di quelle tredici ſpiegate in queſto libro. Sia eſpoſta la Rationale AC, e ſi cõcepiſca il rettangolo AD, il quale ſia contenuto dalla Media AB, e dall'eſpoſta Rationale AC; per il Lemma dopo la 38. propoſ. di queſto, il rettangolo AD, contenuto dalla Rationale AC, e dalla Irrationale AB, ſarà Irrationale. Sia BE la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, ſarà BE Irrationale.



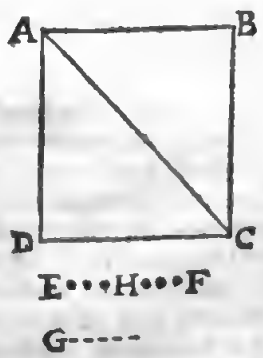
Dico

Dico, che BE non è alcuna di quelle tredici notate dopo la 112. propoſ. di queſto. Perche, applicando alla Rationale AC il quadrato della media, il lato, che ne riſulta, per la 23. propoſ. di queſto, è Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AC; applicando dunque ad AC il quadrato della media AB, il lato, che non riſulta, ſarà Rationale, e perciò non ſarà il medeſimo, che l'irrationale BE. In oltre applicando ad AC ciaſcun quadrato dell' altre dodici irrationali, delle quali ſi è parlato di ſopra, ciaſcun lato, che ne riſulta, ò è vno de'Binomij, ouero vna delle Apotome, come appariſce nelle propoſitioni 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. di queſto. E perche il quadrato dell'irrationale BE, applicato alla Rationale AC, fà il lato AB Media; ſarà manifeſto, che l'irrationale BE è differente da tutte le tredici ſopra notate, mentre applicato il ſuo quadrato alla Rationale AC, fà il lato differente da quei lati fatti da'quadrati di quelle tredici, applicati alla medeſima Rationale AC.

Si compiſca il rettangolo DE, il quale ſarà contenuto dalla Rationale BD, e dall'irrationale BE; e per il lemma dopo la 38. propoſ. il rettangolo DE ſarà irrationale. S'intenda la retta EF, il di cui quadrato ſia vguale all'irrationale DE, ſarà EF irrationale. Dico, che l'irrationale EF non è alcuna di quelle tredici ſopra nominate, ne meno è la medeſima, che BE. Perche il quadrato di EF, cioè il rettangolo DE, applicato alla Rationale BD, fà il lato BE, ed i quadrati di quelle tredici, come ancora il quadrato di BE, applicati alla Rationale BD, fanno, per quel che ſi è dimoſtrato, i lati diuerſi da BE, ſarà manifeſto, che EF non è alcuna di quelle tredici, ne meno è la medeſima, che BE. Nell'iſteſſo modo, che ſi ſono trouate le irrationali BE, EF, ſe ne poſſono ritrouare infinite altre, diuerſe da quelle tredici, e diuerſe frà di loro, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XCIII. PROPOSITIONE CXVII.

Il Diametro, ò Diagonale del quadrato, è incommenſurabile in lunghezza al lato del medeſimo quadrato.

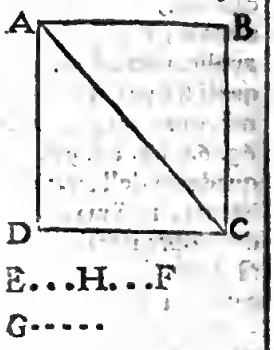


Sia il quadrato ABCD, il di cui diametro AC. Dico, che il diametro AC è incommenſurabile in lunghezza al lato AB. Se il diametro AC non è incommenſurabile in lunghezza ad AB, ſarà dunque al lato AB commenſurabile in lunghezza, e perciò il diametro AC al lato AB [a] hauerà la proportione, che hà il numero al numero. Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, ſiano i minimi di quelli, che hanno la proportione di EF à G. Perche il quadrato del lato AC [b] è vguale à i quadrati de i due lati AB, BC, ed i quadrati de i lati AB, BC ſono frà di loro vguali, ſarà il quadrato

a 5. del 10.

b 47. de. 1.

drato di AC il doppio del quadrato del lato AB. In oltre perche il quadrato di AC al quadrato di AB [c] hà duplicata proportione di quella, che hà il lato AC al lato AB, e per ipotesi, AC ad AB è come il numero EF al numero G; il quadrato di AC al quadrato di AB haverà duplicata proportione di quella, che hà il numero EF al numero G: ma il quadrato del numero EF al quadrato del numero G [d] hà la medesima duplicata proportione, che hà il numero EF al numero G; haverà il quadrato di AC al quadrato di AB l'istessa proportione, quale hà il quadrato del numero EF al quadrato del numero G: ma il quadrato di AC è il doppio del quadrato di AB; sarà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G; e perciò dal quadrato del numero EF se ne può prendere la metà, cioè il quadrato del numero F sarà numero paro. Dico che il numero EF è ancora numero paro: Perche se EF non è numero paro, ma è numero disparo, multiplicato in se medesimo, quel che produce [e] sarà numero disparo, e in conseguenza il quadrato del numero EF sarebbe numero disparo, ch'è contro à quello, che si è dimostrato; mentre si è dimostrato, che il quadrato del numero EF è numero paro. Non dunque il numero EF è dispato, ma è numero paro. E perche i numeri EF, & G, sono i minimi nella loro proportione, saranno [f] in conseguenza frà di loro primi; ed essendosi dimostrato EF essere numero paro, sarà G numero disparo; perche se fosse numero paro, i numeri pari EF, & G, haverebbero per commune misura il numero due, ed in tal caso non sarebbero frà di loro primi, che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque G è numero paro, ma è numero disparo. Si diuida il numero paro EF in due parti vguali, che siano i due EH, HF. Perche EH è vguale ad HF, il prodotto di EH in se medesimo sarà vguale al prodotto di EH in HF; e sarà ancora vguale al prodotto di HF in se medesimo; e cosi i quattro prodotti, cioè il prodotto di EH in se medesimo, quello, che si fà da HF in se medesimo, e due volte il prodotto di EH in HF, sono frà di loro vguali; e perciò tutti insieme sono il quadruplo di vno, cioè il quadruplo del quadrato di EH. Ma gli antedetti quattro prodotti sono vguali [g] al quadrato di EF; sarà il quadrato del numero EF il quadruplo del quadrato del numero EH. Hor essendosi dimostrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G, ed è il quadruplo del quadrato del numero EH; di quelle parti, che il quadrato di EF è quattro, il quadrato di G sarà due, ed il quadrato di EH sarà vno: per la qual cosa il quadrato del numero G sarà il doppio del quadrato del numero EH. Hor se il quadrato del numero G è il doppio del quadrato del numero EH, si può dunque il quadrato del numero G diuidere in due parti vguali, e perciò sarà numero paro. E procedendosi, come prima si fece, si dimostrerà, che G è numero pato: ma fù dimostrato essere numero disparo, sarà dunque G numero paro, e numero disparo, ch'è impossibile. Non dunque il



c 20. del 6.

d 22. del 8.

e 29. del 9.

f 24. del 7.

g 4. Theor. dopo la 14. del 9.

diametro

diametro AC è commenſurabile in lunghezza al lato AB, ma ſono incommenſurabili in lunghezza, ch'era da dimoſtrarſi.

In altro modo ſi dimoſtrerà il medeſimo. Sia, ſe è poſſibile, il diametro AC commenſurabile in lunghezza al lato AB, ſarà la proportione di AC ad AB, [h] come quella del numero al numero. Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, ſiano i minimi nella loro proportione; in conſeguenza ſaranno frà di loro primi. Dico prima, che G non è l'vnità. Perche AC ad AB è come EF à G, ſarà il quadrato di AC al quadrato di AB, per quel che ſopra ſi è dimoſtrato, come il quadrato di EF al quadrato di G: ma il quadrato di AC fù ſopra dimoſtrato il doppio del quadrato di AB; ſarà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G. Se dunque G ſarà l'vnità, il ſuo quadrato ſarà ancora l'vnità: ma il quadrato di EF è il doppio del quadrato di G; ſarà il quadrato di EF il numero due, il che non può eſſere, ſtante che EF, per ipoteſi, non è l'vnità; e perciò al minimo ſarà il numero due; nel qual caſo il numero EF ſarebbe due, ed il ſuo quadrato ſarebbe ancora due, ch'è impoſſibile. Non dunque G è l'vnità, ma ſarà qualche numero. E perche ſi è dimoſtrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G; in conſeguenza il quadrato del numero G miſura il quadrato del numero EF, e per la 14. propoſ. del 8. lib. il lato dell'vno miſura il lato dell'altro, cioè il numero G miſurerà il numero EF: ma il numero G miſura ſe medeſimo, perciò i numeri G, & EF, che hanno vna commune miſura, ſono frà di loro compoſti: ſono, per quel che ſi diſſe, numeri frà di loro primi; ſarebbero frà di loro primi, e ſarebbero frà di loro compoſti, ch'è impoſſibile. Non dunque il diametro AC è commenſurabile al lato AB, ma ſono incommenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi.

h 5. del 10.

SCOLIO.

Sogliono i Commentatori aggiungere quì vn'appendice, cauata da alcuni eſemplari Greci, in ordine à ritrouare altre grandezze incommenſurabili, tanto ne' piani, come ne i ſolidi: ma perche ancora non ſi è parlato de' ſolidi, m'è parſo bene porre queſt'appendice nel fine del duodecimo Elemento.

Fine del Decimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

ELEMENTO VNDECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Il Solido, ò corpo, è quello, che hà lunghezza, larghezza, e groſſezza.

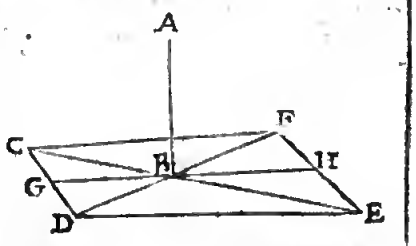
II.

L'eſtremo del ſolido è la ſuperficie.

III.

La linea retta ſi dice eſſere perpendicolare, ouero eretta al piano, quando concorrendo con vn ſolo eſtremo in quel piano, fà angoli retti con tutte le rette linee, che paſſano per il concorſo, e giacciono in quel medeſimo piano.

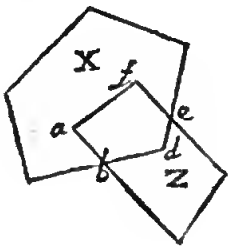
Si concepiſca la retta linea AB eleuata, in modo, che concorra nel piano CDEF col ſolo eſtremo B, e dal punto B s'intendano diſteſe nel piano CDEF quante rette linee ſi vogliano, come BC, BG, BD, BE, BH, BF, &c. ſe la retta AB farà angoli retti con tutte le nominate rette, e con tutte l'infinite altre, che dal punto B ſi diſtenderanno nel piano CDEF, la retta AB ſi dirà eſſere eretta, cioè perpendicolare, al piano CDEF,

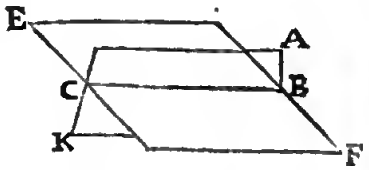


I V.

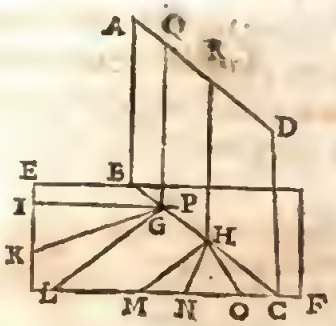
Il piano ſi dice eſſere eretto, ouero perpendicolare, al piano, quando tutte le rette, che giacciono in vn piano, facendo angoli retti con la commune ſettione, ſono perpendicolari all'altro piano.

I piani ſi dicono eſſere diuerſi frà loro, quando continuati non poſſono coſtituire vn ſol piano. Per eſempio le figure piane Z, ed X, benche ſi ſeghino ſcambieuolmente à cauſa, che parte dell'vna cade dentro dell'altra, con tutto ciò, hauendo vna parte commune, come la notata a b d e f, non ſono in diuerſi piani, ma coſtituiſcono il ſolo piano Z X, in modo, che ſe i due piani Z, ed X ſaranno continuati da tutte le parti indeterminatamente, non ſaranno due piani diſtinti, ma coſtituiranno vn ſolo piano: e queſti non ſi dicono piani diuerſi, ma ſi dicono eſſere in vn medeſimo piano. Quei piani poi, che, ſegandoſi ſcambieuolmente, e continuati non coſtituiſcono vn medeſimo piano, ſi dicono eſſere piani diuerſi; come ſono i piani AC, EF, i quali ſi ſegano ſcambieuolmente, non hanno alcuna parte commune, e continuati non poſſono coſtituire vn ſol piano. E perche ogni piano hà lunghezza, e larghezza, ſe due piani diuerſi concorreranno ſcambieuolmente, ò concorreranno ſecondo la loro lunghezza, ouero ſecondo la loro larghezza, sì che in qualunque modo il loro commune concorſo neceſſariamente ſarà vna linea, come appariſce ne i piani diuerſi AC, EF, che concorrono ſcambieuolmente, ed il loro commune concorſo è la linea BC. Hor ſe i piani AC, EF ſi concepiranno continuati, non potendo coſtituire vn ſol piano, ſtante, che gli ſupponiamo piani diuerſi, la continuatione dell'vno ſarà diuerſa dalla continuatione dell'altro; cioè la continuatione CF, del piano EF caderà totalmente fuori del piano AK; e la continuatione BK, del piano AC, caderà totalmente fuori del piano EF, perche altrimente coſtituirebbero vn ſol piano, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi ſuppongono eſſere piani diuerſi; e perciò continuati ſi ſegaranno nella linea BC del concorſo. E per l'auuenire la linea BC, ch'è commune ſegamento, ſi chiamerà commune ſettione de i piani, che ſcambieuolmente ſi ſegano; e ſi dice commune ſettione, ſtante che la linea BC





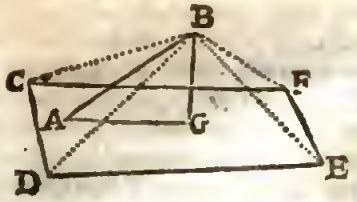
giace nel piano AC, e giace ancora nel piano EF. Suppoſto queſto, ſi conſiderino i piani diuerſi ABCD, & EF, i quali ſi ſeghino ſcambieuolmente, e la loro commune ſettione ſia la linea BC; ſi concepiſcano preſi nel piano ABCD quanti ſi voglia punti Q, R, da i quali ſi concepiſcano tirate le rette QG, RH, giacenti nel piano ABCD, e che facciano angoli retti con la commune ſettione BC; ſe le rette QG, RH, &c. ſaranno perpendicolari al piano EF, cioè ſe faranno angoli retti con tutte le infinite rette GI, GK, GL; HM, HN, HO, &c. che ſono diſteſe nel piano EF, il piano ABCD ſi dirà eſſer'eretto, cioè eſſere perpendicolare al piano EF.



V.

Quando vna retta linea, inclinata ad vn piano, concorre in quel piano ſolamente con vno de'ſuoi eſtremi, e da qualche punto di eſſa cade vn'altra retta, perpendicolare al medeſimo piano, e frà i punti, doue queſte due rette concorrono col detto piano, è tirata vna retta; l'angolo acuto, che ſi contiene da queſta, e dall'inclinata, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà la retta inclinata al piano.

La retta linea, che con vno de i ſuoi eſtremi concorre in vn piano, e non è perpendicolare al medeſimo piano, ſi dice eſſere inclinata à quel piano. Hor s'intenda la retta linea AB, inclinata al piano CDEF, la quale concorra col detto piano coll'eſtremo A; e da qualche punto B preſo nell'inclinata AB, cada la retta BG perpendicolare al piano CDEF, la quale concorra col piano CDEF in qualche punto G; tirata la retta AG, l'angolo acuto BAG, contenuto dall'inclinata BA, e dalla retta AG, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà la retta BA al piano CDEF.

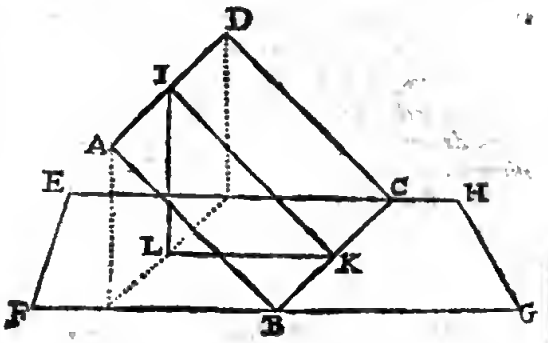


V I.

Quando dalla commune ſettione di due piani, che

ſcam-

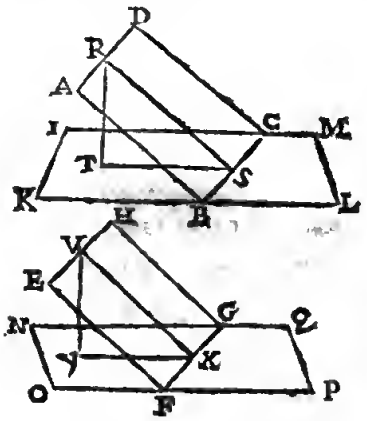
ſcambieuolmente ſi ſegano non ad angoli retti, ſono tirate due rette linee, vna in vn piano, e l'altra nell' altro piano, le quali facciano angoli retti con la commune ſettione: l'angolo acuto, che ſi contiene da quelle rette, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà vno di quei piani all'altro.



Vn piano ſi dice eſſere inclinato ad vn altro piano, quando concorrendo con quel piano, non lo ſega perpendicolarmente; come nella figura ſeguente il piano ABCD ſega il piano EFGH, e la commune ſettione è la linea BC. Se il piano ABCD non è perpendicolare al piano EFGH, ſi dirà il piano ABCD eſſere inclinato al piano EFGH; e preſo nella commune ſettione BC qualunque punto K, dal quale nel piano EG ſia diſteſa la retta KL, che faccia angoli retti con la commune ſettione BC, e dal medeſimo punto K nel piano ABCD ſia tirata la retta KI, che ſimilmente faccia angoli retti con la linea BC, l'angolo acuto IKL, che ſi contiene dalla retta IK, e dalla retta KL, è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ABCD al piano EFGH: e ſi chiama ancora angolo dell'inclinatione.

VII.

I piani ſi dicono eſſere ſimilmente inclinati quando gli angoli delle loro inclinationi ſono frà di loro vguali.



S'intendano i piani ABCD, EFGH, inclinati à i piani IKLM, NOPQ, e le loro inclinationi ſiano gli angoli RST, VXT; Se gli angoli RST, VXT, ſono frà di loro vguali, i piani ABCD, EFGH, ſi diranno eſſere ſimilmente inclinati à i piani KLMI, NOPQ.

VIII.

Piani paralleli, ò equidiſtanti, ſono quelli, che continuati da tutte le parti mai s'auuicinano, ne ſi ſcoſtano in luogo alcuno della loro infinita eſtenſione.

Seguendo Enclide il medeſimo ordine tenuto nel definire le rette parallele, definiſce ancora quì il paralleliſmo de'piani per la negatiua del loro concorſo; ma perche queſta definitione patirebbe la medeſima eccettione dell'altra, l'habbiamo noi definita, à ſimilitudine della 34. definitione del primo, per la negatiua del loro ſcambieuole auuicinamento, e ſcoſtamento. Quale poi ſia la poſitione, che deuono hauere i piani, accioche continuati da tutte le parti mai ſcambieuolmente s'auuicinino, ne ſi ſcoſtino, ſi dimoſtrerà nella 14. propoſitione di queſto Elemento.

IX.

Le figure ſolide ſimili ſono quelle, che ſono contenute da piani ſimili, e di numeri vguali.

X.

Le figure ſolide ſimili, ed vguali, ſono quelle, che ſono contenute da piani ſimili, ed vguali di numero, e grandezza.

Quando i piani, che contengono vn ſolido, ſono vguali di numero à i piani, che contengono vn altro ſolido, cioè che tante faccie ſiano in vno, per quante faccie ſono nell'altro; ſe i piani, che contengono vno di quelli, ſono ſimili à i corriſpondenti piani, che contengono l'altro ſolido; quei ſolidi ſi dicono eſſere ſimili frà di loro, come ſi è ſpiegato nella nona definitione: ſe poi i piani, che contengono vno di quei ſolidi, ſono ſimili, ed vguali à i corriſpondenti piani, che contengono l'altro; quelli ſi dicono ſolidi ſimili, & vguali.

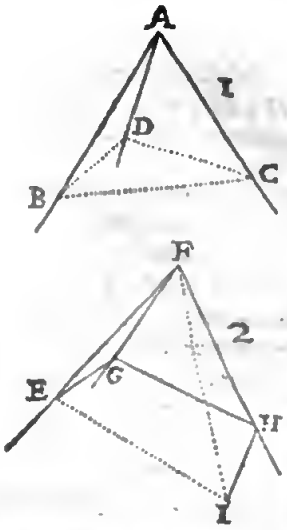
XI.

L'inclinatione di più di due rette linee, che non ſono in vn medeſimo piano, e concorrono in vn ſol punto, ſi chiama angolo ſolido: Ouero, l'angolo ſolido è quello, ch'è contenuto da più di due angoli piani, che s'vniſcono in vn ſol punto, e non ſono nel medeſimo piano.

Nel ſoggetto piano BAC ſiano collocate le rette BA, CA, che concorrano ſcambieuolmente nel punto A, in modo, che coſtituiſcano l'angolo pia-

no

noBAC; s'intenda poi inclinata la retta AD in modo, che l'estremo A sia nel soggetto piano, e l'estremo D sia eleuato in alto, la retta AD farà angolo con la retta AC nel piano DAC, e farà ancora angolo con la retta AB nel piano DAB; e così haueremo i tre angoli DAC, DAB, BAC, collocati in diuersi piani, i quali s'vniscono nel medesimo punto A. Hor la scambieuole inclinatione delle rette BA, DA, CA, concorrenti nel punto A; ouero la scambieuole vnione, che gli angoli piani BAD, DAC, BAC, fanno nel punto A, si chiama angolo solido. Similmente, nella seconda figura; S'intendano le rette EF, IF, nel soggetto piano, le quali, concorrendo insieme, costituiscano l'angolo piano EFI; s'intendano poi inclinate le rette HF, GF, in modo, che con vno de i loro estremi concorrano in F, e gli altri estremi H, & G, siano eleuati in alto; la retta HF farà angolo con la retta IF, nel piano HFI; e farà angolo ancora con la retta FG, nel piano FGH. Finalmente la retta GF farà angolo con la retta EF, nel piano GFE, e farà angolo con FH, nel piano GFH; e così haueremo quattro angoli in diuersi piani, che sono gli angoli EFG, GFH, HFI, IFE, la di cui vnione nel punto F si chiama angolo solido, come si disse.



XII.

Quando dagli estremi d'vn piano rettilineo si stendono piani rettilinei, in modo, che i contigui scambieuolmente si seghino, e le communi settioni concorrano in vn sol punto; il solido, contenuto da quei piani rettilinei, si chiama Piramide.

Dagli estremi del piano rettilineo DBC si concepiscano stenderfi i piani rettilinei ABD, ADC, ABC, in modo, che i contigui ABD, ADC, scambieuolmente si seghino, secondo qualche linea AD: Similmente i contigui ADB, ABC, si seghino, e la commune settione sia AB; e si seghino ancora i cõtigui piani ABC, ACD, secondo la linea AC; e le communi settioni AD, AB, AC, concorrano nel solo punto A; la figu-

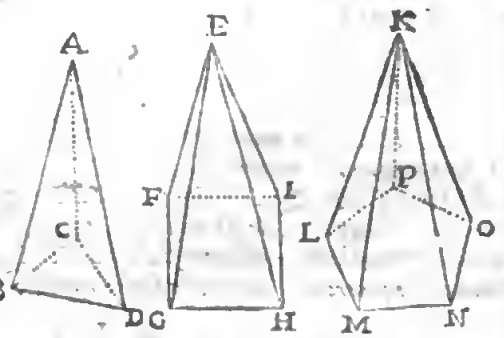
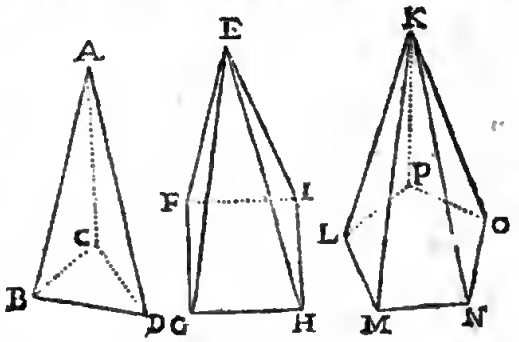


figura ſolida, contenuta da i piani ABD, ADC, ABC, BDC, è quella, che ſi chiamerà Piramide. Similmente da gli eſtremi del piano FGHI, ſi ſtendano i piani EGH, EHI, EIF, EFG, in modo, che i contigui ſi ſeghino, e le communi ſettioni ſiano le linee EG, EH, EI, EF, le quali concorrano nel ſolo punto E, la figura ſolida EFG HI ſarà ancora Piramide: ed il medeſimo dobbiamo intendere del ſolido KLM NOP, e di qualunque altro, che habbia le medeſime conditioni.

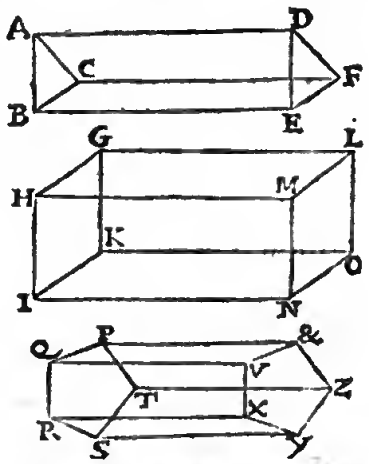


E nota, che ſe la baſe CBD è triangolo, il ſolido ABDC ſi chiamerà Piramide di baſe triangolare: ſe la baſe ſarà quadrilatera, come FGHI, il ſolido EFGHI, ſi chiamerà Piramide di baſe quadrangolare, e con queſt'ordine per le altre.

X I I I.

Il Priſma è la figura ſolida contenuta da piani, de' quali due, che ſono oppoſti, ſono frà loro vguali, ſimili, e paralleli; e gli altri ſono tutti parallelogrammi.

Per eſempio nella figura ſeguente, i piani oppoſti, cioè i triangoli ABC DEF, ouero i quadrangoli HIKG, MNOL; ouero i pentagoni PQR ST, VXYZ&, ſiano ſimili, vguali, e paralleli, e gli altri ſiano parallelogrammi, come nella prima figura, i notati ACFD, ABED, BCFE; nella ſeconda figura i notati HMLG, HINM, GKOL, INOK; e nella terza figura i notati PQV&, PTZ&, QRXV, RSYX, STZY: ogn'uno di queſti ſolidi ſi chiama Priſma; cioè quello, le di cui faccie oppoſte ſono triangoli, ſi chiama Priſma di baſe triangolare; e gli altri ſi dicono di baſi quadrangolari, ò pentagonali, ſecondo il numero de i lati delle faccie oppoſte.



X I V.

La Sfera è il ſolido deſcritto dalla reuolutione del mez-

zo circolo, fatta intorno al ſuo diametro poſto immobile, fin che ritorna nel luogo, d'onde parti.

Ouero, ſecondo Theodoſio, è la figura ſolida, contenuta da vna ſola ſuperficie, alla quale tutte le rette, che vi cadono da vno de i punti di dentro, ſono frà di loro vguali.

X V.

Aſſe della sfera è quella retta linea, intorno alla quale fù circonuoluto quel mezzo circolo, che deſcriſſe la sfera.

X V I.

Il centro della sfera è quel medeſimo punto, ch'è centro del detto mezzo circolo.

X V I I.

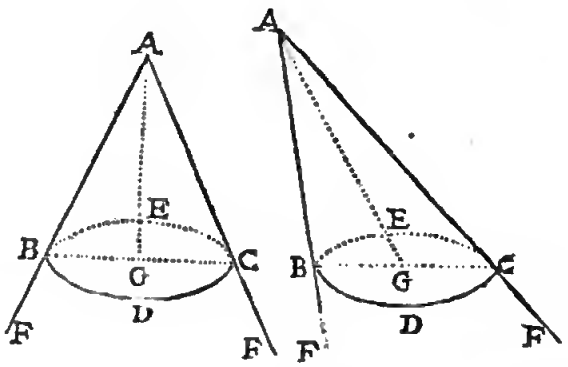
Il diametro della sfera è la retta linea, che paſſa per il centro, e termina con ambidue gli eſtremi nella ſuperficie della sfera.

X V I I I.

Quando per qualche punto fiſſo in ſublime, e per la circonferenza d'vn circolo, che non ſia nel medeſimo piano, paſſa vna retta linea indeterminata, la quale, ſtando fermo il punto in ſublime, ſi muoua per la circonferenza di quel circolo, fin che ritorna nel luogo d'onde partì; la figura ſolida, contenuta dal circolo, e dalla ſuperficie deſcritta dall'intiera reuolutione di quella retta linea, la chiameremo Cono.

Spiega Euclide la generatione del Cono con la reuolutione del triangolo rettangolo intorno ad vno de ſuoi lati, che contèngono l'angolo retto: ma perche la definitione, che ne dà, non è così generale, come quella, che pone Apollonio Pergeo ne'ſuoi Elementi Conici, mi è parſo bene, aderendo à quel che ne definiſce il medeſimo Apollonio, mutare la definitione d'Euclide, ed in ſuo luogo porne vn'altra più generale; la quale, benche non ſia la medeſima ſpiegata dal detto Appollonio, è nondimeno poco da quella differente, non parendomi neceſſario ſpiegare in queſto luogo, che coſa ſia ſuperficie del Cono, e che coſa ſiano i Coni oppoſti, eſſendo materia, che appartiene totalmente alla dottrina

delle ſettioni Coniche, e come tale ſe ne parlerà al proprio luogo. E per ſpiegatione della ſoprapoſta definitione, ſi conſideri il circolo BDCE, ed il punto A fuori del piano BDCE; e dal punto A s'intenda tirata la retta AF, che paſſi per la circonferenza del circolo BDC, e poſto il punto A immobile, s'intenda muouerſi la retta linea AF in modo, che ſcorra per tutta la circonferenza BDCEB, finche ritorna nel luogo d'onde partì:



il ſolido ABDCE, contenuto dal circolo BDCE, e dalla ſuperficie deſcritta dalla intiera reuolutione della retta AF, per la circonferenza BDCE, è quello, che chiameremo Cono, il di cui vertice, ò cima, ſarà il punto immobile A.

X I X.

Aſſe del Cono è la retta linea tirata dal vertice del Cono al centro di quel circolo, intorno al quale ſi fece la reuolutione; *che nella figura antecedente ſarà la retta AG.*

X X.

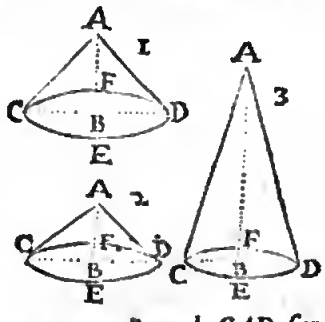
Baſe del Cono è quel medeſimo circolo, intorno al quale ſi riuolge la retta linea, che deſcriſſe il Cono; *che nella ſopra poſta figura è il circolo BDCE.*

Notiſi, che quando l'aſſe AG è perpendicolare alla baſe BDCE, come nell'anteceedente figura, il Cono ABDCE ſi chiama Cono retto; e ſe l'aſſe AG non è perpendicolare alla baſe BDCE, ſi chiama Cono ſcaleno. Di più ne i coni retti, ſe l'aſſe AB della ſeguente figura è vguale alla retta CB, ch'è ſemidiametro del circolo CD, ſarà l'angolo BAC la metà d'vn angolo retto, a *e tutto l'angolo CAD ſarà retto; ed in tal caſo il ſolido ACD ſi chiama Cono rettangolo come nella prima figura. Se poi l'aſſe AB è minore del ſemidiametro BC, come nella ſeconda figura, ſarà l'angolo BAC maggiore della metà d'vn angolo retto,* b *e tutto l'angolo CAD ſarà ottuſo, e perciò il Cono ACD ſi dice Cono ambligonio. E finalmente ſe l'aſſe AB è maggiore del ſemidiametro BC come nella terza figura l'angolo CAB* c *ſarà minore della metà d'vn angolo retto, e tutto l'angolo CAD ſarà acuto, ed in queſt'altro caſo il Cono ACD ſi dice Cono oſſigonio.*

a 5. & 32. del 1.

b 18. & 32. del 1.

c 18. & 32. del 1.

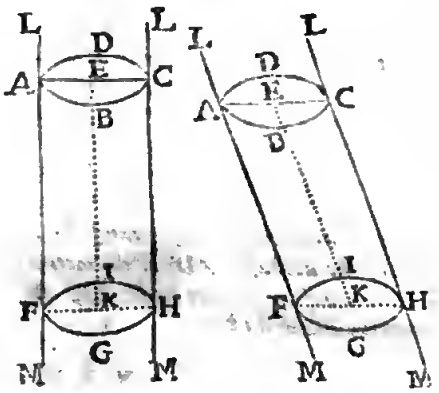


Quando

XXI.

Quando due circoli, ſempre equidiſtanti, ſi muouono intorno à i loro centri, poſti immobili, in modo, che rapiſcano quella retta linea indeterminata, che paſſa per li corriſpondenti eſtremi di due loro diametri paralleli; il ſolido contenuto da quei due circoli, e dalla ſuperficie deſcritta dalla reuolutione di quella retta, che paſſa per gli eſtremi de i detti diametri, fin che ritorna al luogo d'onde partì, lo chiameremo Cilindro.

Queſta definitione ancora è più generale di quella, che pone Euclide, e l'habbiamo eſpoſta alquanto differente da quella, che pone il Sereni nella ſua ſettione del Cilindro à cauſa, che non fà biſogno in queſti elementi definire, che coſa ſia ſuperficie Cilindrica, non parlandoſi in modo alcuno delle ſettioni del Cilindro. E per chiarezza di quanto ſi è detto, ſi concepiſcano i due circoli ABCD, FGHI, frà di loro equidiſtanti; i di cui centri ſiano i punti E, & K, & i diametri AC, FH, ſiano frà di loro paralleli; per li corriſpondenti eſtremi A, ed F, de i diametri AC, FH, ſi concepiſca paſſare la retta linea indeterminata LM, e s'intendano immobili i centri E, K, intorno à i quali ſi muouino i circoli ABCD, FGHI, in modo, che ſiano ſempre equidiſtanti, e nella loro reuolutione rapiſcano i diametri AC, FH, aſſieme con la retta LM, fin tanto, che la retta LM ritorni nel luogo donde partì; il ſolido contenuto da i circoli ABCD, FGHI, e dalla ſuperficie deſcritta dall'intiera reuolutione della retta LM, ſarà quello, che chiameremo Cilindro.



XXII.

La retta linea, che congiunge i centri de circoli circonuoluti, ſi chiama Aſſe del Cilindro, *che nella figura antecedente è la retta EK.*

XXIII.

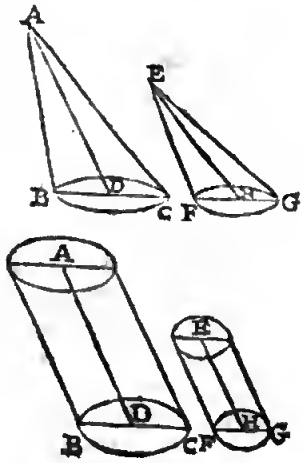
Baſi del Cilindro ſi chiamano quei due circoli, che nella loro reuolutione deſcriſſero il Cilindro, *come ſono i circoli ABCD, FGHI.*

Quando l'asse EK è perpendicolare alle basi ABCD, FGHI, il Cilindro AFHC si chiama Cilindro retto; e se l'asse EK non è perpendicolare alle basi ABCD, FGHI, il solido AFHC si chiama Cilindro scaleno.

XXIV.

I Coni frà di loro, ed i Cilindri frà di loro, si dicono simili, quando ne i Coni, e Cilindri retti, le assi sono proportionali à i Diametri delle basi; e ne i Coni, e Cilindri scaleni, quando le inclinationi delle Assi alle basi sono frà di loro vguali, e le assi sono proportionali à i diametri delle basi.

Per esempio se gli angoli co'i quali le Assi AD, EH, sono inclinate alle basi BC, FG, sono frà di loro vguali, e la proportione dell'asse AD al diametro BC della base, è come l'asse EH al diametro FG della base; i Coni scaleni frà di loro, & i Cilindri scaleni frà di loro, si dicono essere simili. E se saranno coni retti, e cilindri retti, all'hora saranno simili, quando la proportione dell'asse AD al diametro BC della base, è come l'asse EH al diametro FG della base.



XXV.

Il Cubo, e la figura solida contenuta da sei quadrati vguali.

XXVI.

Il Tetraedro è la figura solida, contenuta da quattro triangoli equilateri, & vguali frà loro.

XXVII.

L'Ottaedro è la figura solida, contenuta da otto triangoli equilateri, ed vguali.

XXVIII.

Il Dodecaedro è la figura solida contenuta da dodeci pentagoni vguali, equilateri, & equiangoli.

L'Ico-

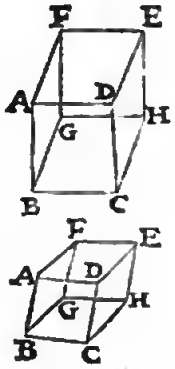
XXIX.

L'Icosaedro è la figura solida, contenuta da vinti triangoli equilateri, ed vguali.

XXX.

Il Parallelepipedo è la figura solida contenuta da sei figure quadrilatere, delle quali le opposte sono frà di loro parallele.

Nella seguente figura il solido FBCE è contenuto da sei quadrilateri, che sono ABCD, ECHG, GHEF, ADEF, ABGF, DCHE, e gli opposti sono paralleli, cioè il quadrilatero ABCD è parallelo al quadrilatero opposto FGHE, come ancora il quadrilatero ABGF è parallelo all' opposto DCHE, ed il quadrilatero ADEF è parallelo al suo opposto BCHG.



XXXI.

La figura solida si dice essere iscritta nella figura solida, quando tutti gli angoli della figura iscritta toccano, ò i lati, ò gli angoli, ò le faccie della figura, nella quale è iscritta.

XXXII.

La figura solida si dice essere circoscritta intorno alla figura solida, quando co'i suoi angoli, ò lati, ò faccie, tocca tutti gli angoli di quella figura, intorno alla quale è circoscritta.

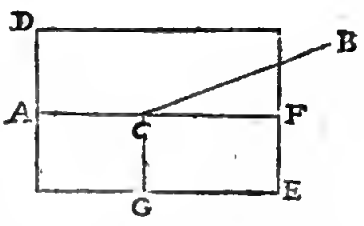
Nelle due antecedenti definitioni non è necessario, che tutti gli angoli della figura iscritta tocchino, ò tutti gli angoli, ò tutti i lati, ò tutte le faccie della figura, alla quale è circoscritta; ma basta che alcuni tocchino gli angoli, altri tocchino i lati, ed altri le faccie; e finalmente, pur che gli angoli della figura interna tocchino tutti, non importa, che tocchino lati, ò angoli, ò faccie della figura esterna.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Non è possibile, che parte d'vna linea retta sia

distesa

diſteſa nel ſoggetto piano, e parte ne ſia eleuata in ſublime.



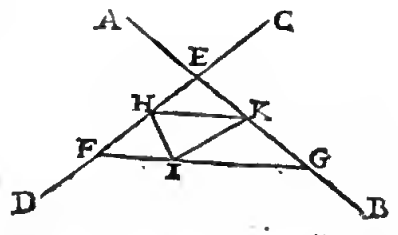
Nel piano DE, ſe è poſſibile, ſia diſteſa parte della retta AB, come AC, e parte ne ſia eleuata in ſublime, come fà la retta CB, in modo, che AC ſia totalmente diſteſa nel piano DE, e la parte CB ſia totalmente eleuata. Si ponga nel piano DE la retta CG [a] ad angoli retti con la retta AC, e nel medeſimo piano DE, nel punto C, ſi ponga la retta CF [b] ad angoli retti con CG. Perche le rette AC, CF, ſono nel medeſimo piano DE, e gli angoli GCA, GCF, ſono retti, per la 14. del primo, le rette AC, CF, nel piano DE, coſtituiſcono la ſola retta linea AF: per il che AC è parte della retta AF: ma, per ipoteſi, la medeſima AC è parte della retta AB; la retta dunque AC ſarà commune parte delle due rette AB, AF, che per l'annotatione dopo la 3. propoſitione del 1. al num. 2. è impoſſibile. Non dunque parte della retta AB è collocata nel ſoggetto piano DE, e parte eleuata in ſublime, ch'era da dimoſtrarſi.

a 11. del 1.

b 11. del 1.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due rette linee ſi ſegano ſcambieuolmente, ſono in vn medeſimo piano; ed ogni triangolo è in vn medeſimo piano.



Si ſeghino le rette AB, CD in qualche punto E, e preſo nelle rette ED, EB, due qualunque punti F, & G, tirata la retta FG. Dico prima che il triangolo EFG è in vn medeſimo piano. Se il triangolo EFG non è in vn medeſimo piano, parte di eſſo ne ſarà nel ſoggetto piano, e parte in ſublime; ſia nel ſoggetto piano la parte EHIG, ed il rimanente FHI ſia in ſublime, ſarà della retta EF la parte EH nel ſoggetto piano, e la parte HF in ſublime, ch'è contro all'antecedente propoſitione. Di nuouo, ſuppoſto che la parte EFIK ſia nel ſoggetto piano, e la parte IKG in ſublime, ſimilmente ſarà della retta EG la parte EK nel ſoggetto piano, e la parte KG in ſublime, che per l'antecedente propoſitione è impoſſibile. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che neſſun'altra parte del triangolo è in diuerſo piano; e perciò tutto il triangolo EFG, è in vn medeſimo piano, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

In oltre. Dico che le rette AB, CD ſono in vn medeſimo piano.

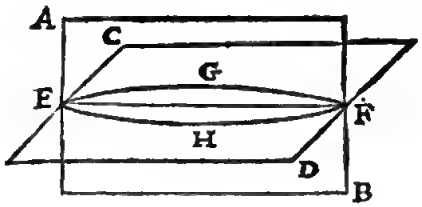
Perche

Perche ſi è dimoſtrato, che il triangolo EFG è in vn medeſimo piano, i ſuoi eſtremi, cioè le rette EF,FG,GE,ſaranno nel medeſimo piano,e tutta la retta GA ſarà nel medeſimo piano EFG; perche altrimente la parte EG ſarebbe nel ſoggetto piano EFG, e la parte EA ſarebbe in ſublime, il che per l'antecedente propoſ. è impoſſibile. Per l'iſteſſa ragione la retta DC è nel medeſimo piano EGF. Per la qual coſa le rette AB,CD, che ſcambieuolmente ſi ſegano in qualche punto E, ſono in vn medeſimo piano, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se due piani ſi ſegano ſcambieuolmente, la loro commune ſettione è linea retta.

Si ſeghino ſcambieuolmente i piani AB,CD,e la loro commune ſettione ſia la linea EF. Dico, che la linea EF è linea retta. Se EF non è linea retta, dal punto E al punto F ſi tiri vna retta linea; ò quella congrue con la linea E, ed in tal caſo la linea EF è retta; ò pure non congrue con EF, e giace in vno de i due piani AB, CD. Sia prima collocata nel piano AB, come fà la linea EGF. Di nuouo dal punto E al punto F, nel piano CD, ſi tiri vna retta linea, la quale ò congruerà con EF, ed all'hora EF ſarà retta linea; ò paſſerà fuori della linea EF, come fà la linea EHF. Perche le linee EGF, EHF,per coſtruttione,ſono linee rette,ed ambedue concorrono ne i punti E, ed F, perciò chiudono figura, il che,per l'annotatione dopo la terza propoſ.del primo,al num.3.è impoſſibile.Non dunque le linee EGF,EHF ſono linee rette, ma la commune ſettione EF ſarà linea retta, ch'era da dimoſtrarſi.

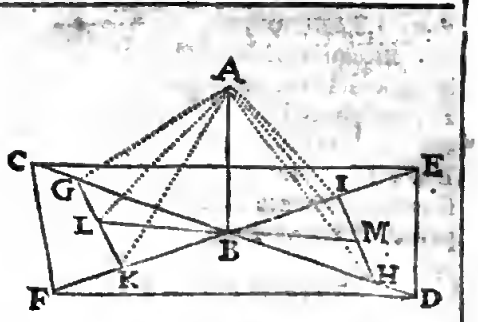


THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se nella commune interſegatione di due rette linee, che ſcambieuolmente ſi ſegano, ſia eleuata vna retta linea, che faccia angoli retti con le rette, che ſi ſegano; quella ſarà perpendicolare al piano, nel quale ſono collocate le rette, che ſcambieuolmente ſi ſegano.

Si ſeghino le rette CD, FE, in qualche punto B; e nel punto B cada la retta AB, in modo, che faccia angoli retti con le rette CD, FE; cioè che gli angoli ABD,ABE,ABC,ABF,ſiano retti. Dico,che la retta AB è perpendicolare al piano CFDE, nel quale ſi ſuppongono collocate le rette

CD,



CD,EF. Perche le rette CD, FE, ſi ſegano, per ipoteſi, nel punto B, ſaranno per la 2. propoſ. di queſto, in vn medeſimo piano: ſia quel piano il notato CFDE; dalle rette
a 3.del 1. BE, BF [a] ſi taglino le vguali parti BI,BK;e dalle rette BD, BC, ſi taglino le vguali parti BH,BG;e ſi tirino le rette HI, KG. Si conſiderino i due triãgoli GBK, IBH. Perche IB, per coſtruttione, è vguale à BK, ed il lato HB è vguale à BG; i due lati IB, BH, ſono vguali à i due lati KB, BG, l'angolo IBH è vguale all'an-
b 4. del 1. golo al vertice GBK; [b] ſarà la baſe IH vguale alla baſe GK; e l'angolo BIH vguale all'angolo BKG. Per il punto B ſi faccia paſſare, nel piano CD, qualunque retta MBL,in modo, che ſeghi le rette GK, IH, come in L, ed M,e ſi conſiderino i due triangoli BKL,BIM. Perche l'angolo BKL
c 15.del 1. è dimoſtrato vguale all'angolo BIM, e l'angolo LBK [c] è vguale all'angolo al vertice IBM; i due angoli LKB, LBK, del triangolo LBK, ſaranno vguali à i due angoli MIB, MBI, del triangolo MBI; il lato KB, per co-
d 26.del 1. ſtruttione, è vguale al lato BI, ſaranno gli altri due lati BL, LK, [d] vguali à i due lati BM,MI;cioè il lato BL vguale al lato BM,ed il lato KL vguale al lato IM. Si tirino le rette AG,AL,AK,AH,AM,AI.

E ſi conſiderino i due triangoli ABK, ABI. Eſſendo il lato BK, per coſtruttione, vguale al lato BI,ed il lato AB è commune, i due lati AB,BK, ſaranno vguali à i due lati AB,BI; l'angolo ABK,per ipoteſi,è vguale all'
e 4. del 1. angolo ABI, ſtante che l'vno, e l'altro è retto; pereiò la baſe AK [e] ſarà vguale alla baſe AI. Nell'iſteſſo modo, conſiderando i triangoli ABH, ABG,ſi dimoſtrerà,che il lato AH è vguale al lato AG.Si conſiderino poi i triangoli AKG,AIH, de'quali i due lati AI, IH, per quel che ſi è dimo-
f 8. del 1. ſtrato, ſono vguali à i due lati AK, KG, la baſe AH è dimoſtrata vguale alla baſe AG, e pereiò l'angolo AIH [f] ſarà vguale all'angolo AKG. Di più ne'triangoli AKL,AIM, i due lati AK,KL ſono ſtati dimoſtrati vguali à i due lati AI, IM; l'angolo AKL è dimoſtrato vguale all'angolo AIM;
g 4.del 1. ſarà la baſe AM [g] vguale alla baſe AL. Finalmente ſi conſiderino i due triangoli ABL, ABM. Perche il lato BM è dimoſtrato vguale al lato BL, ed il lato AB è commune ad ambidue i triangoli; ſaranno i due lati AB, BM, vguali à i due lati AB,BL; la baſe AM è dimoſtrata vguale alla baſe
h 8. del 1. AL,ſarà l'angolo ABM [h] vguale all'angolo ABL: per la qual coſa gli an-
K 10. def. del 1. goli ABM, ABL [K] ſono retti, e la retta AB è perpendicolare alla retta LM. Nell'iſteſſo modo prouaremo, che la retta AB è perpendicolare à qualunque altra retta, che paſſa per il punto B, e giace nel piano CFDE; e pereiò la retta AB è perpendicolare à tutte le infinite rette linee, che paſſano per il punto B,e giacciono nel piano CD; ed in conſeguenza ſarà AB perpendicolare al piano CFDE, che paſſa per quelle infinite rette li-
l 3. def. del 11. nee: ma lerette CD,EF ſono nèl piano CFDE,ſarà la retta AB [l] perpen-

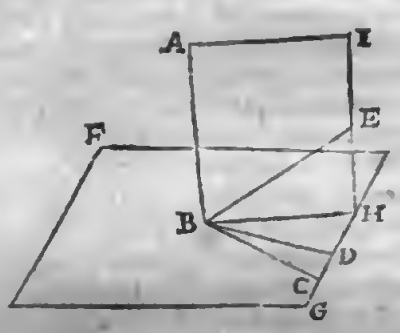
dieolare

dicolare al piano, nel quale ſono diſteſe le rette CD, FE, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea cadę nella commune interſegatione di tre rette linee, e fà angoli retti con tutte tre quelle; le medeſime tre rette linee ſono in vn medeſimo piano.

Si ſeghino ſcambieuolmente le tre rette linee EB, DB, CB, in qualche punto B, nel quale cada la retta AB, in modo, che gli angoli ABE, ABD, ABC, ſiano retti. Dico, che le rette BC, BD, BE, ſono in vn medeſimo piano. Se non ſono in vn medeſimo piano, perche due di quelle, preſe in qualunque modo, ſono in vn medeſimo piano; ſiano le due BD, BC, nel piano FG, e la retta BE, ſe è poſſibile, ſia in ſublime. Perche la retta AB fà angoli retti con le due BD, BC, per l'antecedente propoſ. la retta AB ſarà perpendicolare al piano FG, nel quale giacciono le due BD, BC. In oltre le due AB, BE, ſegandoſi in B, [a] ſono in vn medeſimo piano; ſia quel piano il notato ABEI, il quale continuato paſſerà per il punto B: e perche il punto B è nel piano FG, perciò il piano ABE, continuato, paſſando per il punto B, ſegarà il piano FG; ſia la commune ſettione la linea BH; ſarà BH [b] linea retta, diſteſa nel piano FG, e le tre AB, BE, BH ſono nel medeſimo piano ABH: fù dimoſtrata la retta AB perpendicolare al piano FG, ſarà l'angolo ABH [c] retto: ma l'angolo ABE, per ipoteſi, è retto, l'angolo dunque ABE ſarà vguale all'angolo ABH; la parte è vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque le rette BC, BD, BE ſono in diuerſi piani, ma ſono in vn medeſimo piano, ch'era da dimoſtrarſi.



a 2. del 11

b 3. del 11

c 3. def. c 11.

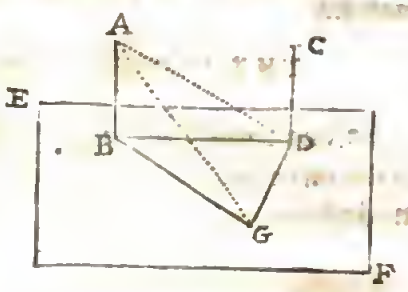
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due rette linee ſono perpendicolari ad vn medeſimo piano, quelle ſono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD, perpendicolari al piano EF. Dico, che le rette AB, CD, ſono frà di loro parallele. Dal punto D al punto B ſi tiri la retta BD. Perche i punti B, & D, ſono nel piano EF, ſarà la retta BD nel medemo piano EF: dal punto D nel piano EF, [a] ſi tiri la retta DG, in modo, che

a 11. del 1

l'angolo GDB.ſia retto; ſi faccia
b 3.del 1. DG b vguale ad AB. e ſi tiri la retta BG. Perche le rette AB, CD, per ipoteſi, ſono perpendicolari al piano EF,e le retteBD, DG,GB, ſono nel piano EF, gli
c 3. defin. del 11. ágoliCDG,CDB,ABG,ABD, c ſaranno angoli retti. Si tirino le rette AG,AD ; e ſi conſiderino i due triangoli GDB, ABD . Perche il lato DG è fatto vguale al latoAB,ed il latoBD è cõmune,



i due lati dũque GD,DB,del triangolo GDB,ſono vguali à i due lati AB, BD, del triangolo ABD, l'angolo GDB è vguale all'angolo ABD, ſtante
d 4.del 1. che ſono retti:ſarà la baſe BG d vguale alla baſe AD.In oltre ſi conſiderino i due triangoli ABG, ADG ; eſſendo il lato AB, per coſtruttione, vguale al lato GD, ed il lato BG è dimoſtrato vguale al lato AD ; i due lati AD,DG,del triangolo ADG, ſaranno vguali à i due lati GB,BA, del
e 8. del 1. triangolo GBA; la baſe AG è commune, ſarà l'angolo ABG e vguale all' angolo ADG : ma l'angolo ABG è dimoſtrato retto, l'angolo dunque ADG ſarà retto.Si conſiderino le tre rette DC,DA,DB,che ſi ſegano nel punto D. Eſſendoſi dimoſtrati gli angoli GDC,GDA, GDB, retti, le tre rette DC,DA,DB, per l'antecedente propoſ.ſono in vn medeſimo piano; ma la retta AB è nel piano del triangolo ABD, cioè nel piano,dove ſono diſteſe le rette AD, BD, in conſeguenza le rette AB,BD,AD,CD, ſono in vn medeſimo piano. Finalmente perche le rette AB, CD , ſono in vn medeſimo piano ſegate dalla retta BD , & i due angoli interni ABD ,
f 28.del 1. CDB, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono retti,ſaranno le rette AB, CD f frà di loro parallele , ch'era da dimoſtrarſi .

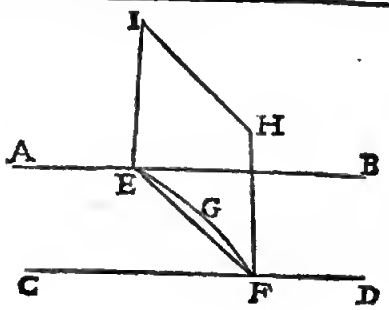
THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se frà due punti, preſi in due rette parallele, è tirata vna linea retta, quella ſarà nel medeſimo piano con le propoſte parallele.

Siano le due rette parallele AB,CD,nelle quali ſiano preſi due qualunque punti E,ed F,e dal punto E al punto F ſia tirata la retta EF.Dico che la retta EF è nel medeſimo piano con le parallele AB,CD.Perche le rette AB,CD ſono,per ipoteſi,parallele , per la 34. defin.del primo,ſono in vn medeſimo piano; ſe la retta EF non è nel piano ABCD,ſia, ſe è poſſibile, in qualche altro piano , fuori del piano ACBD ; per li punti E , ed F , ſi faccia paſſare vn'altro piano , che ſeghi il piano ACDB , e la commune
g 3. del 11. ſettione ſia la linea EGF ; ſarà la commune ſettione EGF g linea retta : e perche le rette EGF,& EF,concorrono inſieme ne i punti E,ed F,perciò

chiudono

chiudono figura, che per l'annotatione dopo la terza del primo lib. num. 3. è impoſſibile. Non dunque la retta EF è in altro piano, fuori del piano ACDB: ma è nel medeſimo piano ACDB, doue ſono diſteſe le parallele AB, CD, ch'era da dimoſtrarſi.



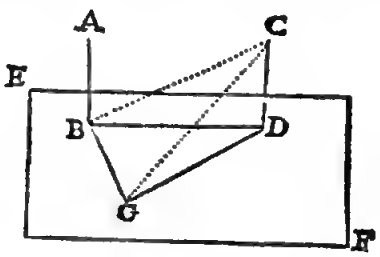
SCOLIO.

Se le rette linee AB, CD, non foſſero parallele, ſe ſaranno collocate in vn medeſimo piano, la retta EF, ed ogn'altra, che le congiunge ſarà ancora nel medeſimo piano colle rette AB, CD, e la dimoſtratione è la medeſima.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

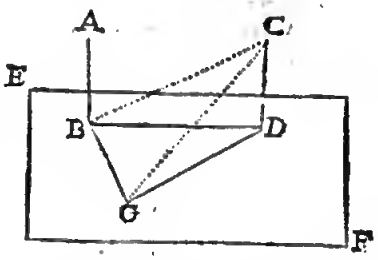
Se due rette linee ſono frà di loro parallele, ed vna di quelle è perpendicolare ad vn piano; ancora l'altra è perpendicolare al medeſimo piano.

Siano le rette AB, CD, frà di loro parallele, e la retta CD ſia perpendicolare al piano EF. Dico, che ancora AB è perpendicolare al piano EF. Si continui la retta AB, fin che concorra col piano EF in qualche punto B; dal punto B al punto D ſi tiri la retta BD: eſſendo i punti B, & D, nel piano EF, ſarà la retta BD nel medeſimo piano EF; dal punto B nel piano EF ſi tiri la retta BG, [a] in modo, che l'angolo GBD ſia retto; ſi faccia GB [b] vguale alla retta CD, e ſi tiri la retta GD. Perche la retta CD, per ipoteſi, è perpendicolare al piano EF, gli angoli CDB, CDG, [c] ſono retti. Si tirino le rette CB, CG, e ſi conſiderino i due triangoli CDB, GBD. Perche il lato GB, per coſtruttione, è vguale al lato CD, ed il lato BD è commune; i due lati CD, DB, del triangolo CDB, ſono vguali à i due lati GB, BD, del triangolo GBD; l'angolo CDB è vguale all'angolo GBD, ſtante che ſono retti, ſarà la baſe CB [d] vguale alla baſe GD. Similmente ſi conſiderino i due triangoli CDG, CBG, de'quali il lato GB, per coſtruttione, è vguale al lato CD, il lato



a 11. del 1.
b 3. del 1.
c 3. defin. del 11.
d 4. del 1.

GD è dimoſtrato vguale al lato CB; i due lati dunque CD, DG, ſono
c 8.del 1. vguali à i due lati GB,BC; la baſe CG è commune,ſarà l'angolo CDG c vguale all'angolo CBG: ma l'angolo CDG è dimoſtrato retto,l'angolo dunque CBG ſarà retto: per coſtruttione l'angolo GBD è retto, perciò
f 4.del 11. la retta GB, faeendo angoli retti colle due BD, BC, ſarà f perpendicolare al piano BDC, nel quale ſono le rette BD, BC. In oltre, perche le rette AB, CD, per ipoteſi, ſono parallele, e ſono ſegate dalle rette BC, BD, per l'antecedente propoſitione, le rette BC,BD,ſaràno nel medeſimo piano con le parallele AB, CD: ma la retta GB è dimoſtrata perpendicolare al piano CBD; ſarà dunque GB perpendicolare al piano ABDC,e perciò l'angolo ABG g ſarà retto. Finalmente perche le rette AB, CD ſono parallele, ſegate dalla retta BD, i due angoli ABD, CDB h ſono vguali à due angoli retti, ma l'angolo CDB è dimoſtrato retto, ſarà l'angolo ABD retto. E perche l'angolo ABG fù dimoſtrato retto, ſarà la retta AB perpendicolare alle due rette BD, BG; e perciò ſarà perpendicolare K al piano, doue ſono le due GB, BD, cioè ſarà perpendicolare al piano EF, come fù propoſto dimoſtrare.

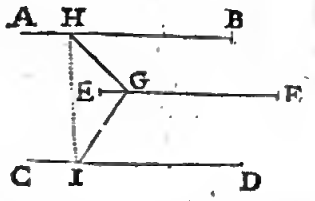


g 3.defin. del 11.
h 29.del 1.
K 4.del 11.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se due rette linee ſono parallele ad vn altra retta linea, che non è nel medeſimo piano, quelle due ſono frà di loro parallele.

Siano le due rette AB, CD parallele alla retta EF, e non ſiano tutte tre in vn medeſimo piano. Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele. Perche le rette EF, AB ſono frà di loro parallele, per la natura delle parallele, le due AB, EF, ſono in vn medeſimo piano: e per l'iſteſſa ragione le parallele EF, CD ſono in vn medeſimo piano. Si prenda in EF qualche punto G, dal quale, nel piano EFBA, ſi tiri la retta GH, a in modo, che faccia angoli retti colla retta EF, e dal medeſimo punto G nel piano ECDF, ſi tiri la retta GI, ad angoli retti con la medeſima retta EF: Si prolunghino le rette GH,GI, fin che concorrano con le due AB, CD come in H,ed I: Eſſendo per coſtruttione,gli angoli EGH,EGI,retti, ſarà la retta EG b perpendicolare al piano HGI, doue ſono le rette HG, GI; E perche le rette AH, EG, per ipoteſi, ſono frà loro parallele, e la



a 11.del 1.
b 4. del 11.

retta

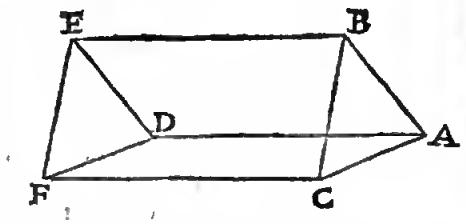
retta EG è dimoſtrata perpendicolare al piano HGI; ſarà la retta AH [c] perpendicolare al medeſimo piano HGI. Similmente, perche le rette EG CI, per ipoteſi, ſono parallele, e la retta EG è perpendicolare al piano HGI, ſarà la retta CI [d] perpendicolare al medeſimo piano HGI, dal che le due rette AH, CI ſono perpendicolari al medeſimo piano HGI, e per la 6. propoſitione di queſto, le rette AH, CI, cioè le due AB, CD, ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 8. del 11.

[d] 8. del 11.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se due rette linee, che ſcambieuolmente concorrono, ſono parallele à due altre rette linee, che ſimilmente concorrono, e ſiano collocate in diuerſi piani, in modo, che i concorſi ſi corriſpondano dalla medeſima parte; quelle rette linee conterranno angoli vguali.



Siano le rette AB, CB, che concorrano ſcambieuolmente in qualche punto B, le quali ſiano parallele alle due DE, FE, che concorrono nel punto E; cioè AB ſia parallela à DE; e la retta CB ſia parallela ad FE, in modo, che le due AB, CB, non ſiano nel medeſimo piano, nel quale ſono le due DE, FE, e che i concorſi B, & E ſiano collocati dalla medeſima parte EB. Dico che l'angolo ABC è vguale all'angolo DEF. Si taglino le rette BA, ED [a] frà di loro vguali, e ſi faccia EF vguale à BC; ſi tirino le rette AC, DF, FC, DA, EB. Perche le due BA, ED ſono frà di loro vguali, e parallele, ſaranno le rette EB, DA, [b] frà di loro vguali, e parallele. Similmente, eſſendo le due BC, EF, frà di loro vguali; e parallele, ſaranno le due FC, EB, [c] frà di loro vguali, e parallele. Hor eſſendo FC vguale, e parallela ad EB, e la retta DA è vguale, e parallela alla medeſima EB; le due FC, DA [d] ſaranno frà di loro vguali, e parallele: dal che le rette DF, AC, che le congiungono, [e] ſono frà di loro vguali, e parallele. Si conſiderino i triangoli ABC, DEF: perche i lati AB, BC, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati DE, EF, e la baſe CA è dimoſtrata vguale alla baſe FD, ſarà l'angolo CBA [f] vguale all'angolo FED, come fù propoſto dimoſtrare.

[a] 3. del 1.

[b] 33. del 1.

[c] 33. del 1.

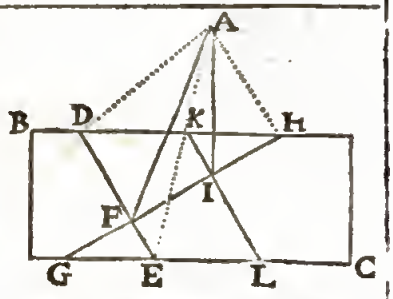
[d] 9. del 11.

[e] 33. del 1.

[f] 8. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XI.

Da vn dato punto in ſublime far cadere vna retta perpendicolare al ſoggetto piano.

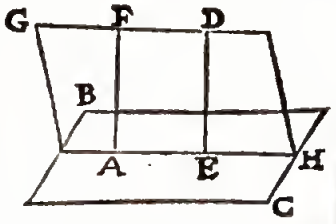


Sia A il dato punto in ſublime, ed il ſoggetto piano BC ; ſi vuole dal punto A far cadere vna retta perpendicolare al ſoggetto piano BC. Si tiri nel piano DC qualunque retta linea DE ; per il punto A , e per la retta DE , ſi concepiſca paſſare il piano ADE, nel quale dal punto A ſia tirata la retta AF , [a] che faccia angoli retti colla retta DE . Se la retta AF è perpendicolare al piano BC, ſarà la retta AF quella perpendicolare, che ſi cerca : ma ſe AF non è perpendicolare al piano BC, per il punto F, nel piano BC, ſi faccia paſſare la retta GFH [b] ad angoli retti con la retta DE ; poi , per le rette AF, FH, ſi concepiſca paſſare il piano AFH , e dal punto A ſi tiri nel piano AFH la retta AI , [c] ad angoli retti con la retta FH . Dico che la retta AI è perpendicolare al piano BC . Per il punto I ſi faccia paſſare la retta LK, [d] parallela alla retta DE . Perche gli angoli DFA, DFH, per coſtruttione, ſono retti, ſarà la retta DF perpendicolare alle due rette FA , FH ; e perciò ſarà perpendicolare [e] al piano AFH . In oltre , eſſendo, per coſtruttione , la retta KI parallela ad FD , e la retta FD è dimoſtrata perpendicolare al piano AFH , ſarà la retta KI [f] perpendicolare al medeſimo piano AFH : ma la retta AI è nel piano AFH , l'angolo dunque AIK ſarà retto ; ſi fatto , per coſtruttione, l'angolo AFI retto ; ſarà la retta AI perpendicolare alle due rette KI , IF , e perciò [g] ſarà perpendicolare al piano, doue giacciono le rette KI, IF: ma le rette KI, IF, per coſtruttione, ſono nel piano BC ; la retta dunque AI ſarà perpendicolare al piano BC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 12. del 1.
b 11. del 1.
c 12. del 1.
d 31. del 1.
e 4. del 11.
f 8. del 11.
g 4. del 11.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XII.

Dato vn punto in vn piano , eriggere in quel punto vna retta perpendicolare al dato piano .



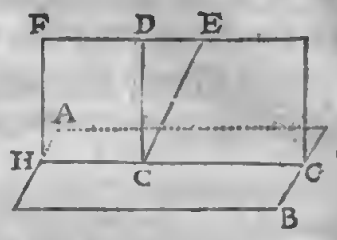
Sia il dato punto A nel piano BC , e ſi voglia nel punto A eriggere vna retta perpendicolare al dato piano BC . Si prenda qualche punto in ſublime, come il punto D , dal quale, per l'antecedente propoſitione, ſi faccia cadere la retta DE perpendicolare al piano BC ; ſe la retta DE cade nel punto A , ſarà DE la perpendicolare , che ſi cerca : ma ſe non cade nel punto A ; dal punto E al punto A ſi tiri la retta EA, e per le rette DE, EA, ſi concepiſca paſſare il piano GH ; poi dal punto A ſi tiri la retta AF [a] parallela alla retta DE . Dico che la retta FA è perpendicolare al piano BC . Perche le rette FA, DE, per coſtruttione ſono frà di loro parallele ; e la retta DE è perpendicolare al piano BC, ſarà la retta FA [b] perpendicolare al medeſimo piano BC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

a 31. del 1.
b 8. del 11.

THEO-

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Non è possibile, che da vn medesimo punto, preso in vn piano, si possiano tirare dalla medesima parte due rette linee perpendicolari all'istesso piano.



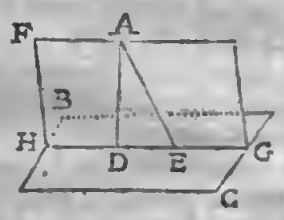
Nel piano AB sia preso qualche punto C, nel quale sia eleuata la retta CD perpendicolare al piano AB. Dico essere impossibile, che nel medesimo punto C, e dalla medesima parte DE, si possa eleuare altra retta perpendicolare al medesimo piano AB. Si eleui, se è possibile, nel punto C la retta CE, perpendicolare al piano AB. Perche le rette, DC, EC, si segano in C, perciò sono [a] in vn medesimo piano; sia quello il piano DCE, il quale continuato segarà il piano AB in qualche linea HG; essendo HG commune settione de i piani FG, AB, sarà HG [b] linea retta; E perche la retta DC, per ipotesi, è perpendicolare al piano AB, l'angolo DCG [c] sarà retto. Similmente la retta EC, per la fatta suppositione, è perpendicolare al piano AB, dal che l'angolo ECG [d] sarà retto: ma l'angolo DCG è dimostrato retto, sarà l'angolo ECG vguale all'angolo DCG; la parte vguale al turro, ch'è impossibile. Non dunque dal medesimo punto C si possono tirare dalla medesima parte DE due rette perpendicolari al medesimo piano AB, ch'era da dimostrarsi.

[a] 2. del 11.
[b] 3. del 11.
[c] 3. defin. del 11.
[d] 3. defin. del 11.

Il medesimo si dimostra più breuemente in questo modo. Si eriggano, s'è possibile, nel medesimo punto C le due rette CD, EF, perpendicolari al piano AB. Perche le due rette DC, EC sono perpendicolari al medesimo piano AB, perciò sono [e] frà di loro parallele; ma, per ipotesi, le rette DC, EC concorrono nel punto C; sarebbero parallele, e concorrerebbero, ch'è impossibile. Non dunque &c. ch'era da dimostrarsi.

[e] 6. del 11.

SCOLIO DEL CLAVIO.



Nell'istesso modo si può dimostrare, che da qual che punto A, in sublime non possono cadere due rette perpendicolari al medesimo piano. Dal medesimo punto A, se è possibile, cadano le rette AD, AE perpendicolari al piano BC. Perche le rette AD, AE, si segano in A, perciò sono [g] in vn medesimo piano, sia quello il piano FG, il quale continuato seghi il piano BC, e la commune settione sia [h] la retta HG. Perche le rette AD, AE sono perpendicolari al piano BC, gli angoli ADE, AED [k] sono retti; dal che due angoli d'vn triangolo non sono minori di due retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo. Non dunque da vn medesimo punto in sublime può cadere più d'vna retta perpendicolare ad vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.

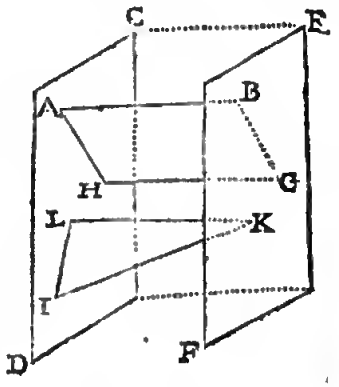
[g] 2. del 11.
[h] 3. del 11.
[k] 3. defin. del 11.

LEM-

LEMMA.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, tutte le altre rette, che ſono perpendicolari ad vno di quei piani, ſono ancora perpendicolari all'altro piano; le dette perpendicolari ſono frà di loro vguali; ed ogn'vna è la minima di tutte le altre interpoſte frà quei piani; e non ſono perpendicolari à i medeſimi piani.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF, e preſo nel piano EF, qualunque punto G, dal quale ſia tirata la retta GH perpendicolare al piano CD. Dico prima che GH è perpendicolare al piano EF. Si tirino le rette AH, BG. Perche le rette GH, BA ſono perpendicolari al piano CD, gli angoli GHA, BAH, [a] *ſono retti, e perciò le rette BA, GH,* [b] *ſono frà di loro parallele; ma AB è ſuppoſta perpendicolare al piano EF, ſarà la retta HG, che gli è parallela,* [c] *perpendicolare al medeſimo piano EF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'altra retta linea perpendicolare ad vno de i piani CD, EF, è ancora perpendicolare all'altro piano, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*



Di nuouo. Dico che la perpendicalare GH è vguale ad AB. Perche la retta AB è perpendicolare ad ambidue i piani CD, EF, gli angoli HAB, GBA, [d] *ſono retti, dal che le rette GB, HA* [e] *ſono frà di loro parallele, ed il quadrilatero AHGB* [f] *è parallelogrammo; e ſarà HG* [g] *vguale al lato oppoſto AB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'altra retta interpoſta frà i piani CD, EF, perpendicolare à i medeſimi, è vguale alla perpendicolare AB; e perciò tutte ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel ſecondo luogo.*

Finalmente, Dico, che ogn'vna delle perpendicolari, come AB, è la minima di qualunque altra retta interpoſta frà i piani CD, EF, la quale non ſia perpendicolare ad alcuno di eſſi piani CD, EF. Frà i piani CD, EF, s'interponga qualunque retta IK, non perpendicolare à i piani CD, EF; dal punto K ſi tiri la retta KL [h] *perpendicolare al piano CD; per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, ſarà KL perpendicolare al piano EF, e per l'antecedente dimoſtratione, ſarà KL vguale ad AB; ſi tiri la retta IL. Eſſendo*

a 3. defin. del 11.
b 28. del 1.
c 8. del 11.
d 3. defin. del 11.
e 28. del 1.
f 35. defin. del 1.
g 34. del 1.
h 11. del 11.

do la retta KL, per costruttione, perpendicolare al piano CD, l'angolo KLI [k] *sarà retto; e perciò l'angolo KIL sarà minore dell'angolo KLI, ed il lato KL* [m] *sarà minore del lato IK: ma la retta KL fù dimostrata vguale ad AB; sarà la perpendicolare AB minore di KI. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AB è minore d'ogn'altra retta interposta frà i piani CD, EF, la quale non sia perpendicolare à i medesimi piani. Per la qual cosa la perpendicolare AB sarà la minima, come fù proposto dimostrare.*

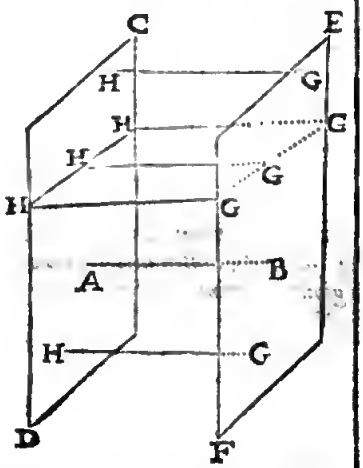
k 3. defin. del 11.
l 17. del 1.
m 19. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, quei due piani sono frà di loro paralleli.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF. Dico che i piani CD, EF, sono frà di loro paralleli. Si prenda nel piano EF qualunque punto G, dal quale si tiri la retta GH [a] perpendicolare al piano CD; sarà GH, per l'antecedente Lemma, perpendicolare al piano EF, e sarà vguale ad AB; ed ogn'vna delle rette AB, GH, sarà quella, che disegna il minimo interuallo, ò distanza frà i piani CD, EF; se concepiremo continuati i piani CD, EF, da tutte le parti indeterminatamente, e da gl'infiniti punti, che si possono immaginare nel piano EF, cadano rette linee perpendicolari al piano CD, quelle tutte sono perpendicolari al piano EF, ogn'vna disegna il minimo interuallo frà i piani CD, EF, e sono tutte frà di loro vguali: per la qual cosa i piani CD, EF, continuati in infinito, in nessun luogo della loro estensione s'auuicinano, o si scostano, e per la definitione ottaua di questo, i piani CD, EF, sono frà di loro paralleli, come fù proposto dimostrare.

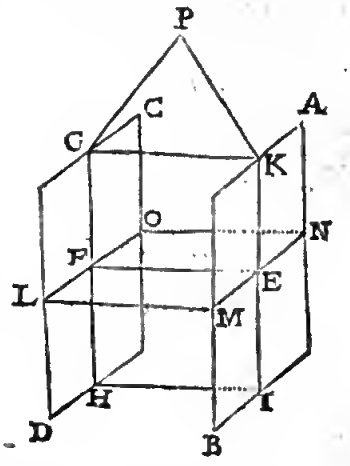
a 11. del 1.



SCOLIO.

La conuersa all'antecedente propositione, si farà nel seguente modo.

Se due piani sono frà di loro paralleli, la retta, ch'è perpendicolare ad vno di essi, sarà ancora perpendicolare all'altro.



Siano i piani paralleli AB,CD, e la retta EF, interposta frà essi, sia perpendicolare al piano CD. Dico che la medesima retta EF è perpendicolare al piano AB. Per la retta EF si faccia passare il piano LMNO, che seghi i piani AB,CD, secondo la loro larghezza, e le communi settioni
a 3. del 11. *siano* [a] *le rette linee MN,LO. Di nuouo per la retta FE s'intenda passare vn altro piano, come GHIK, che seghi i piani AB, CD, secondo la loro lunghezza, e le com-*
b 3. del 11. *muni settioni siano le rette* [b] *IK,HG. Perche la retta EF, per ipotesi, è perpendico-*
c 3. def. del 11. *lare al piano CD, gli angoli EFG, EFO,* [c] *sono retti. Inoltre, perche la retta EF fà angoli con le rette EN, EK, se gli angoli FEN, FEK sono retti, la retta FE sarà*
d 4. del 11. *perpendicolare* [d] *al piano AB, ch'è il nostro proposto. Se poi gli angoli FEN, FEK, non sono ambidue angoli retti, vno di quelli ò sarà minore, ò maggiore del retto. Sia prima l'angolo FEK minore del retto: saranno i due angoli GFE,KEF, minori di due angoli retti, e per lo Scolio dopo la 31. del primo, le rette EK,FG, continuate, concorrono in qualche punto P. Perche la retta EK*
e 1. del 11. *è nel piano AB, sarà tutta la retta EKP* [e] *nel medesimo piano AB, altrimente la parte EK sarebbe nel piano AB, e la parte KP sarebbe in altro piano, ch'è contro alla prima propositione di questo. Hor essendo la retta EKP tutta nel piano AB, continuato il piano AB, passerà per il punto P. E per l'istessa ragione, continuato il piano CD passerà per il medesimo punto P; dal che i piani AB,CD, concorreranno insieme nel punto P, ch'è contro all'ipotesi, mentre gli habbiamo supposti paralleli. Non dunque l'angolo FEK è minore del retto. Se l'angolo FEK fosse maggiore del retto, il supplemento, cioè l'angolo FEI, sarebbe minore del retto: e procedendosi come prima, si mostrerà, che i piani AB,CB, continuati concorreranno dalla parte DB. Non dunque gli angoli FEK,FEI, sono ineguali, ma sono angoli retti. Nell'istesso modo si proverà, che gli angoli FEN,FEM, sono retti; dal che la retta FE è perpendicolare al piano AB, ch'era da dimostrarsi.*

Per facilitare i modi del dimostrare, aggiungo il seguente Theorema.

Se due piani non sono paralleli, continuati concorreranno da qualche parte; e se due piani, continuati da tutte le parti, mai concorrono, quelli sono frà di loro paralleli.

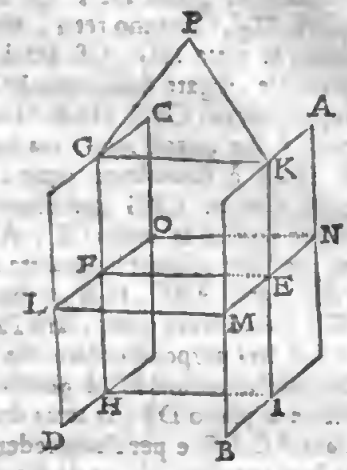
Siano

Siano prima i due piani AB,CD, non paralleli. Dico che continuati concorreranno ſcambieuolmente da qualche parte. Si prenda nel piano AB qualche punto E, dal quale cada la retta EF [a] *perpendicolare al piano CD, e ſi faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente Theorema; gli angoli EFG, EFO* [b] *ſaranno retti; ſe gli angoli FEK, FEN ſono retti, la retta FE* [c] *ſarà perpendicolare al piano AB; e per l'antecedente propoſitione, i piani AB, CD, ſono frà di loro paralleli, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque gli angoli FEN, FEK, ſono ambidue angoli retti. Non ſia dunque vno di quelli retto, come per eſempio l'angolo FEK; ſarà l'angolo FEK, ò maggiore, ouero minore del retto: e procedendoſi come nell'antecedente Theorema, ſi dimoſtrerà che i piani concorrono verſo P, ouero dalla parte BD. Se poi l'angolo FEN non ſarà retto, ſi dimoſtrerà nell'iſteſſo modo, che i piani AB, CD, ò concorrono dalla parte ON, ouero dalla parte LM. Per la qual coſa i piani non paralleli continuati concorreranno da qualche parte, come fù propoſto dimoſtrare nel primo luogo.*

a 11. del 11.

b 3. defin. del 11.

c 4. del 11.



Di nuouo, ſuppoſto che i piani AB, CD, continuati da tutte le parti, mai concorrono. Dico che ſono frà loro paralleli. Se i piani AB, CD non ſono paralleli, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, continuati concorreranno da qualche parte, ch'è contro all'ipoteſi. Se dunque i piani AB, CD, continuati non concorrono inſieme da neſſuna parte, ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

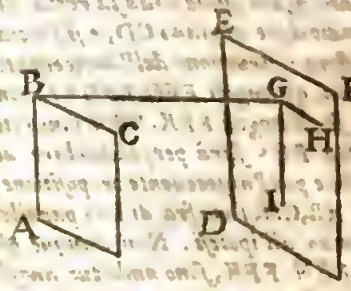
Se due rette linee ſcambieuolmente concorrono inſieme, e ſono parallele à due altre, che ſimilmente concorrono inſieme, e non ſono nel medeſimo piano; i piani, che paſſano per quelle, ſono frà di loro paralleli.

Siano le due rette linee AB, CB, concorrenti in qualche punto B, le quali ſiano parallele alle due DE, EF, poſte in altro piano, e concorrenti in qualche punto E; cioè AB ſia parallela ad ED, e la retta CB ſia parallela ad EF. Dico che i piani AC, DF, ſono frà di loro paralleli. Dal punto B ſi tiri la retta BG [a] perpendicolare al piano DF; dal punto G ſi tiri la retta GH [b] parallela ad EF; e la retta GI parallela ad ED. Perche

a 11. del 11.

b 31. del 1.

c 9.del 11. d 9.del 11. le rette CB,HG ſono parallele ad EF, ſaranno c frà di loro parallele. Similmente, eſſendo le rette IG,AB, parallele alla retta ED, ſarà IG d parallela ad AB. In oltre, perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF, gli angoli



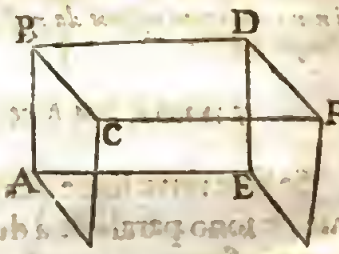
e 3.defin del 11. BGH, BGI, e ſaranno retti. Hor eſſendo le rette HG, CB frà di loro parallele, ſegate dalla retta BG, gli angoli interni CBG, HGB, f ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo HGB è dimoſtrato retto, l'angolo dunque CBG ſarà retto parimente perche le rette GI, AB ſono parallele, ſegate dalla retta BG, i due angoli ABG, IGB, g ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo IGB fù moſtrato retto, ſarà l'angolo ABG ancora retto: dal che la retta GB ſarà perpendicolare alle due rette BC,BA, e perciò h ſarà perpendicolare al piano ABC. E perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF; la retta dunque BG è perpendicolare ad ambidue i piani AC,DF, e per l'antecedente propoſitione, i piani AC,DF, ſono frà di loro paralleli, eh'era da dimoſtrarſi.

f 29.del 1. g 29.del 1. h 4.del 11.

SCOLIO.

Il P. Clauio aggiunge il ſeguente problema.

Dato vn piano, ed vn punto fuori di eſſo, per il dato punto far paſſare vn piano equidiſtante al dato piano.



Sia dato il piano AC, ed il punto D fuori del dato piano; ſi vuole per il punto D far paſſare vn piano, parallelo al piano AC. Dal punto B al punto D ſi tiri la retta BD, e per le rette AB,BD, ſi concepiſca paſſare vn piano, come ABDE indeterminato verſo DE; e per le due CB, BD, ſi concepiſca paſſare il piano CBDF, indeterminato verſo DF; dal punto D nel piano ABD, ſi tiri la retta DE, a *parallela ad AB; e dal medeſimo punto D nel piano CBD, ſi tiri la retta DF* b *parallela alla retta BC. Perche le rette FD, DE, concorrenti nel punto D, ſono parallele alle due CB, AB, che concorrono nel punto B; per l'antecedente propoſitione, il piano EF, che paſſa per il punto D, è parallelo al piano AC, eh'era da farſi, e dimoſtrarſi.*

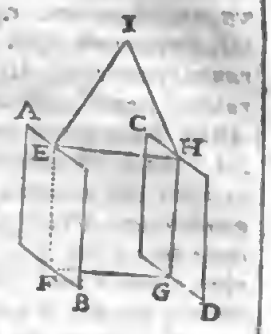
a 31. del 1. b 31.del 1.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due piani paralleli ſono ſegati da qualche piano, le loro communi ſettioni ſono parallele.

Siano

Siano i due piani paralleli AB,CD, ſegati dal piano EFGH, e le communi ſettioni ſiano le rette EF,HG. Dico,che le rette EF,HG,ſono frà di loro parallele. Se le rette EF,GH,non ſono parallele, per lo ſcolio ſecondo alla 31. propoſit. del primo, continuate concorreranno in qualche punto: concorrano, s'è poſſibile, in qualche punto I. Perche la retta GH è nel piano CD, ſarà tutta la retta GHI nel medeſimo piano CD,altrimente la parte GH della retta GI,ſarebbe nel pianoCD,e la parte HI in altro piano, che per la prima propoſ. di queſto, è impoſſibile; e perciò tutta la retta GI è nel piano CD;ſi che,continuato il piano CD,quello paſſerà per il punto I. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che continuato il piano AB,quello paſſerà per il medeſimo punto I; per la qual coſa continuati i piani AB, CD concorrono ſcambieuolmente nel punto I, ch'è contro all'ipoteſi,mentre habbiamo ſuppoſti i pianiAB,CD,paralleli.Non dunque continuate le rette FE,GH, concorrono: e ſe non concorrono,per il ſecondo ſcolio alla 31. propoſit. del primo, ſono parallele, come fù propoſto di moſtrare.

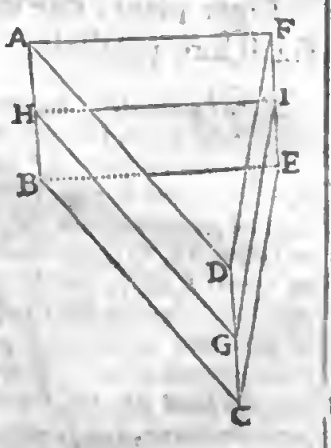


SCOLIO.

Qui facilmente ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Se due piani, che ſcambieuolmente concorrono, ſono ſegati da vn'altro piano, e le communi ſettioni ſono frà di loro parallele; le medeſime ſaranno parallele alla commune ſettione, che fanno quei due piani nel loro concorſo.

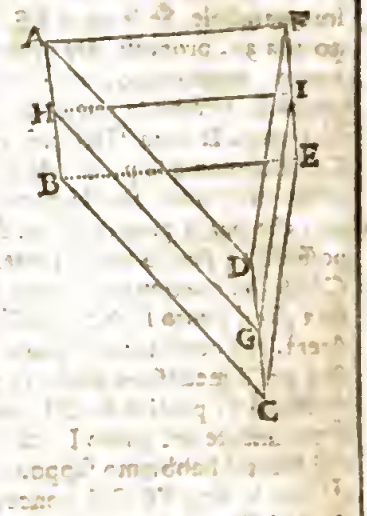
Siano i due piani ABCD,DCEF,i quali concorrano ſcambieuolmente, e la commune ſettione ſia DC: ſiano poi ſegati i piani ABCD,DCEF,dal piano ABEF, e le communi ſettioni AB, FE, ſiano frà di loro parallele. Dico, che le rette AB,FE ſono parallele alla retta DC. Si prenda nella retta DC qualunque punto G,dal quale ſi tiri la retta GH [a] parallela alla retta AD; e dal medeſimo punto G ſi tiri la retta GI parallela alla retta DF. Perche le rette GH, DA, ſono parallele, ſegate dalla retta DG, le tre rette HG,GD,DA, [b] ſono in vn medeſimo piano: ma le due GD, DA ſono nel piano ABCD, ſarà la retta GH nel medeſimo



[a] 31. del 1.

[b] 7. del 11.

simo piano ABCD, e perciò continuata GH segarà la retta AB in qualche punto H. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta GI sega la retta FE in qualche punto I. Si tiri la retta HI, sarà il triangolo HGI [c] *in un medesimo piano: e perche le rette HG, GI, sono parallele alle rette AD, DF, saranno i piani HGI, ADF,* [d] *frà di loro paralleli; i quali, essendo segati dal piano ABEF, haueranno le communi settioni AF, HI* [e] *frà di loro parallele: ma fù supposta la retta AB parallela alla retta FE, il quadrilatero AHIF* [f] *sarà parallelogrammo, e sarà il lato AF* [g] *vguale ad HI. Inoltre perche le rette IG, GH, sono parallele alle due FD, DA, l'angolo IGH* [h] *sarà vguale all'angolo FDA. Similmente perche le rette HI, IG, sono parallele alle due AF, FD, sarà l'angolo HIG* [k] *vguale all'angolo AFD; ed essendo le due rette IH, HG, parallele alle due FA, AD, l'angolo FAD sarà vguale all'angolo IHG; per la qual cosa i triangoli GIH, DFA, sono equiangoli, e la proportione di AF ad FD* [l] *sarà come quella di HI ad IG: fù dimostrata AF vguale ad HI; sarà FD* [m] *vguale ad IG. Similmente FA ad AD* [n] *sarà come IH ad HG: ma FA è vguale ad IH, sarà AD* [o] *vguale ad HG. Hor essendo le due AD, HG frà di loro vguali, e parallele, sarà AH* [p] *parallela alla retta DG, cioè AB sarà parallela à DC. Parimente, essendo FD vguale, e parallela ad IG, sarà FI* [q] *parallela alla retta DG, cioè FE parallela alla retta DC, ch'era da dimostrarsi.*



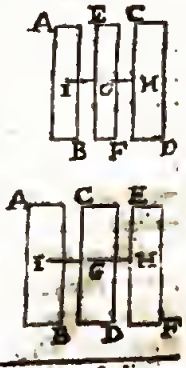
c 2. del 11.
d 15. del 11.
e 16. del 11.
f 35. defin. del 1.
g 34 del 1.
h 10. del 11.
k 10. del 11.
l 4. del 6.
m 14. del 5.
n 4. del 6.
o 14. del 5.
p 33. del 1.
q 33. del 1.

Non sarà inutile aggiungere quì il seguente Theorema.

Quei piani, che sono paralleli ad vn'altro piano, sono frà di loro paralleli.

Siano i piani AB, CD, paralleli al piano EF. Dico, che i piani AB, CD sono frà di loro paralleli.

Si prenda nel piano EF qualunque punto G, per il quale si faccia passare la retta GHI, in modo, [a] *che faccia angoli retti col medesimo piano EF, la quale prolungata concorra ne i piani AB, CD, continuati, se bisogna; concorra dunque ne i punti I, ed H. Perche i piani CD, EF, per ipotesi, sono paralleli, e la retta GH è perpendicolare al piano EF, per lo scolio alla 14. propos. di questo, la medesima retta GH sarà perpendicolare al piano CD. In oltre, essendo, per ipotesi, i piani AB, EF, frà di loro paralleli, e la retta IG, per costruttione, è perpendicolare al piano EF, per lo citato*



a 13. del 11.

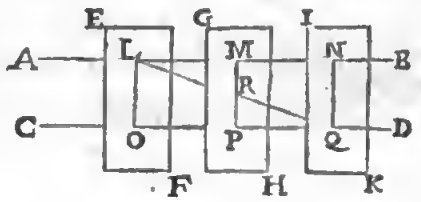
scolio

ſcolio, la medeſima retta IG ſarà perpendicolare al piano AB; dal che la retta IH ſarà perpendicolare à i due piani AE, CD; e per la 14. propoſ. di queſto, i piani AB, CD ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se due rette linee ſono ſegate da piani paralleli, le parti interpoſte frà i piani paralleli ſono proportionali.

Siano le rette AB, CD, ſegate da i piani paralleli EF, GH, IK, ne i punti L, M, N, O, P, Q. Dico che la proportione di LM ad MN è come quella di OP à PQ. Si tirino le rette LO, NQ. Eſſendo i punti L, O, N, Q ne i piani EF, IK, le rette LO, NQ ſaranno ne i medeſimi piani EF, IK. Si tiri la retta LQ, la quale ſeghi il piano GH in qualche punto R; dal punto R alli punti P, ed M, ſi tirino le rette RM, RP: eſſendo i punti M, R, P nel piano GH, le rette MR, RP ſaranno nel medeſimo piano GH. Perche il triangolo LQN [a] è in vn medeſimo piano, i piani paralleli GH, IK, ſaranno ſegati dal piano LQN; per il che le communi ſettioni MR, NQ [b] ſaranno frà di loro parallele. Similmente il triangolo LOQ [c] è in vn medeſimo piano, e ſega i piani paralleli EF, GH, per la qual coſa le communi ſettioni LO, RP [d] ſono frà di loro parallele. In oltre perche il triangolo LQN è ſegato dalla retta MR parallela ad NQ, ſarà LM ad MN, [e] come LR ad RQ; parimente perche il triangolo LQO è ſegato dalla retta RP parallela al lato LO, ſarà OP à PQ [f] come LR ad RQ: ma fù dimoſtrata LM ad MN, come LR ad RQ, ſarà LM ad MN [g] come OP à PQ, ch'era da dimoſtrarſi.

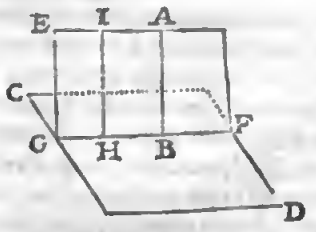


a 2. del 11.
b 16. del 11.
c 2 del 11.
d 16. del 11.
e 2. del 6.
f 2. del 6.
g 11. del 5.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Se vna retta linea è perpendicolare à qualche piano, tutti i piani, che paſſano per quella retta linea, ſono perpendicolari al medeſimo piano.

Sia la retta linea AB perpendicolare al piano CD. Dico, che tutti i piani, che paſſano per la retta AB ſono perpendicolari al piano CD. Per la retta AB ſi concepiſca paſſare vn piano, come EF, il quale ſeghi il piano CD, e la commune ſettione ſia [a] la retta GF, nella quale ſia preſo qualunque punto H, e dal punto H ſi tiri la retta HI [b] parallela ad AB; le tre

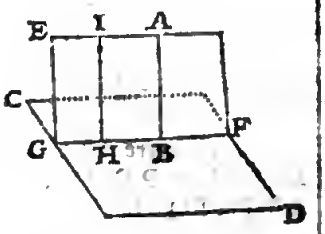


a 3. del 11.
b 31. del 1.

rette

c 7. del 11. rette IH, AB, HB c ſono in vn medeſimo piano: ma le due AB, BH ſono nel piano EF, ſarà dunque la retta IH nel medeſimo piano EF. Hor perche le due rette IH, AB, ſono frà di loro parallele, e la retta AB è ſuppoſta perpendicolare al piano CD, ſarà ancora IH d perpendicolare al medeſimo piano CD. E perche il punto H è preſo ad arbitrio nella retta GF, ſe da gl'infiniti punti, che poſſiamo immaginarci nella retta GF, ſono tirate rette linee parallele ad AB, tutte ſaranno nel medeſimo piano EF, e ſaranno perpendicolari al piano CD. Per la qual coſa il piano EF, che paſſa per quelle infinite rette linee, e ſarà perpendicolare al piano CD. Il medeſimo ſi dimoſtrerà di tutti gli altri piani, che paſſano per la retta AB, e ſegano il piano CD, ſecondo altre poſitioni; e perciò tutti i piani, che paſſano per la retta AB, ſono perpendicolari al piano CD, ch'era da dimoſtrarſi.

d 8. del 11.



e 4. diffin. del 11.

SCOLIO.

Da quel che ſi è detto non ſarà difficile dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Se le communi ſettioni di due piani, perpendicolari ad vn'altro piano, ſono frà di loro parallele, quei due piani ſaranno frà loro paralleli: e ſe di due piani paralleli vno è perpendicolare ad vn'altro piano, ancora l'altro ſarà perpendicolare al medeſimo piano.

Siano prima i due piani AB, CD, perpendicolari al piano ED, in modo, che le cõmuni ſettioni EB, FD, ſiano frà di loro parallele. Dico prima, che i piani AB, CD, ſono frà di loro paralleli. Si prẽda nella retta EB qualũque punto G, e dal punto G nel piano ED ſi tiri la retta GH, a *ad angoli retti con la retta EB. Perche le rette EB, FD ſono, per ipoteſi, parallele, ſarà l'angolo DHG* b *vguale all'angolo EGH, cioè ſarà retto; e la retta GH ſarà perpendicolare alla commune ſettione FD. In oltre nel piano AB ſi tiri dal punto G la retta GI,* c *ad angoli retti colla retta EB. Eſſendo il piano AB, per ipoteſi, perpendicolare al piano ED, ſarà l'angolo IGH* d *retto; ma l'angolo HGE, per coſtruttione, è retto, ſarà la retta HG* e *perpendicolare al piano AB, nel quale ſono le rette GI, GE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la retta GH è perpendico-*

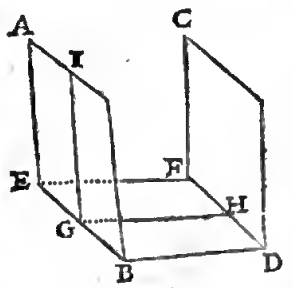
a 11. del 1.

b 29 del 1.

c 11. del 1.

d 4. definit. del 11.

e 4. del 11.



lare

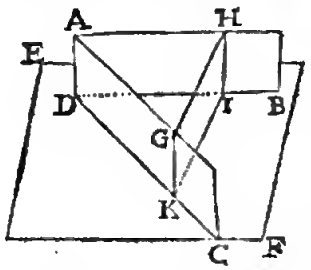
lare al piano CD; e per la 14. propoſit. di queſto, i piani AB,CD, ſono frà di loro paralleli.

Di nuouo, ſuppoſto, che i piani AB,CD ſiano frà di loro paralleli, ed il piano AB ſia perpendicolare al piano ED. Dico, che il piano CD ſarà perpẽdicolare al medeſimo piano ED. Perche i piani AB,CD, ſono paralleli, ſegati dal piano ED, le communi ſettioni EB,FD, [f] ſono frà di loro parallele. Si ſupponga fatta la medeſima coſtruttione antecedente, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che la retta HG è perpendicolare al piano AB. E perche i piani AB,CD, ſono paralleli, e la retta HG è perpendicolare al piano AB, la medeſima retta HG, per lo ſcolio alla 14. prop. di queſto, ſarà perpendicolare al piano CD; e per l'antecedente propoſ. il piano ED, che paſſa per la retta GH, farà angoli retti col piano CD. Per la qual coſa il piano CD è perpendicolare al piano ED, ch'era da dimoſtrarſi. f 16. del 11.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se due piani, che ſi ſegano ſcambieuolmente, ſono perpendicolari ad vn'altro piano, la loro commune ſettione ſarà perpendicolare al medeſimo piano.

Sia AD la commune ſettione de i piani AB, AC, i quali ſiano perpendicolari al piano EF. Dico, che la commune ſettione AD è perpendicolare al medeſimo piano EF. Si prendano due qualunque punti ne i piani AB,AC, come per eſempio K, ed I, da i quali, ne i piani AC, AB, ſi tirino le rette KG,IH [a] ad angoli retti colle rette DC,DB. Perche i piani ſono, per iporeſi, perpendicolari al piano EF, le rette HI,GK, che ſono perpendicolari alle communi ſettioni BD, DC, ſaranno [b] perpendicolari al piano EF: per la qual coſa ſono frà di loro [c] parallele, ed in conſeguenza [d] ſono in vn medeſimo piano: Sia quel piano il notato GKIH. Perche i piani AK, AI, che concorrono nella retta AD, ſono ſegati dal piano GKIH, e le communi ſettioni GK, HI ſono frà di loro parallele, per lo ſcolio alla 16. propoſ. di queſto, le rette HI, GK, ſono parallele alla retta AD. Hor eſſendo la retta AD parallela ad HI, e la retta HI, per coſtruttione, è perpendicolare al piano EF, ſarà AD [e] perpendicolare al medeſimo piano EF, ch'era da dimoſtrarſi.



a 11. del 1.

b 4. definit. del 11.
c 6. del 11.
d 34. defin. del 1.

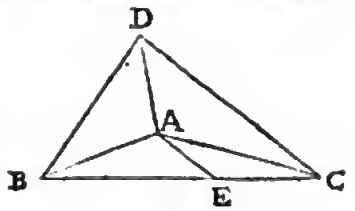
e 8. del 11.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se vn'angolo ſolido è contenuto da tre angoli piani, due

di quelli angoli piani, preſi in qualunque modo, ſono maggiori del terzo.

Sia l'angolo ſolido A, contenuto da i tre angoli piani DAB, DAC, BAC. Dico, che due di queſti angoli, preſi in qualunque modo, ſono maggiori del terzo. Se queſti tre angoli ſono frà di loro vguali, ſarà manifeſto, che due, giunti inſieme, ſono maggiori del terzo. Se poi due de i detti angoli ſono frà loro vguali, ed il terzo ſia minore d'ogn'vno de gli vguali, ſarà ancora manifeſto, che due, preſi inſieme, ſono maggiori del terzo. Se finalmente vno di queſti, come l'angolo BAC, è maggiore di ciaſcuno de gli altri due BAD, DAC. Dico, che i due DAB, DAC, giunti inſieme, ſono maggiori del terzo ãgolo BAC. Nel piano BAC



a 23. del 1. ſi faccia l'angolo BAE [a] vguale all'angolo BAD, ſarà l'angolo BAC maggiore dell'angolo BAE, dal che la retta AE ſegarà l'angolo BAC. Nelle rette AB, AC, ſi prendano due qualunque punti B, & C; ſi tiri la retta BC. Eſſendo, per coſtruttione, la retta AE nel piano BAC, continuata ſegarà il lato BC in qual-

b 3. del 1. che punto E. Si faccia AD [b] vguale ad AE, e ſi tirino le rette BD, DC. Si conſiderino i due triangoli ADB, ABE, de i quali il lato AD è vguale al lato AE, il lato AB è commune; ſaranno i due lati DA, AB vguali à i due BA, AE; l'angolo BAE, per coſtruttione, è vguale all'angolo BAD,

c 4. del 1. ſarà la baſe BE [c] vguale alla baſe BD. Nel triangolo DBC, i due lati

d 20. del 1. BD, DC [d] ſono maggiori del terzo lato BC; leuatone gli vguali lati DB, BE, reſta il lato DC maggiore del lato EC. Si conſiderino i due triangoli ADC, ACE, de' quali il lato AE è vguale al lato AD, il lato AC è commune; ſaranno i due lati DA, AC vguali à i due lati CA, AE; la baſe DC

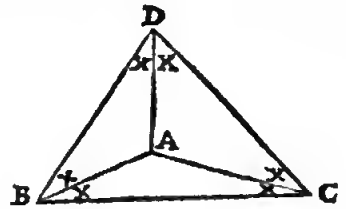
e 25. del 1. è dimoſtrata maggiore della baſe EC, ſarà l'angolo DAC [e] maggiore dell'angolo CAE; ſe gli aggiungano gli vguali angoli DAB, BAE, ne vengono i due angoli DAB, DAC, maggiori de i due BAE, EAC: ma i due angoli BAE, EAC, coſtituiſcono tutto l'angolo BAC; i due angoli dunque BAD, DAC, inſieme giunti, ſono maggiori dell'angolo BAC, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Tutti gli angoli piani, che contengono vn'angolo ſolido, giunti inſieme, ſono minori di quattro angoli retti.

Sia l'angolo ſolido A contenuto da i tre angoli piani BAD, DAC, BAC.

BAC. Dico, che i tre angoli piani BAD, DAC, BAC, giunti insieme, sono minori di quattro angoli retti. Si tirino le rette BD, DC, CB, e si concepisca il punto A in sublime, ed il piano del triangolo DBC, nel soggetto piano; saranno le rette AB, AD, AC, inclinate al soggetto piano DBC; dal che saranno costituiti ne i punti B, D, C, tre altri angoli solidi, cioè l'angolo solido B sarà contenuto da tre angoli piani, de'quali due sono i superiori, che sono i notati con la lettera X, e l'altro stà di sotto, ch'è l'angolo BDC. Similmente l'angolo solido D è contenuto da i due angoli notati X, che stãno di sopra, e dall'angolo inferiore BDC; e l'ãgolo solido C è similmente cõtenuto da i due angoli superioti X, e dall'angolo DCB, che stà sotto. Di nuouo, considerando l'angolo solido B, i due angoli piani X, per l'antecedente prop. giunti insieme, sono maggiori dell'angolo DBC, che stà sotto. Similmente nell'angolo solido D, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo BDC, che stà di sotto; e nell'angolo solido DCB, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo DCB; dal che i sei angoli notati X sono maggioti de i tre angoli del triangolo DBC: ma i tre angoli del ttiangolo DBC, [a] sono vguali à due angoli retti, i sei angoli dunque notati X satanno maggiori di due angoli retti. Finalmente, perche tre angoli d'ogni triangolo [b] sono vguali à due angoli retti, i noue angoli de i tre triangoli ABD, ADC, ACB, cioè i sei notati X, co'i tre angoli intorno al punto A, saranno vguali à sei angoli retti: se da questi se ne leuano i sei angoli notati X, che furono dimostrati maggiori di due angoli retti, resteranno i tre angoli DAC, DAB, BAC, minori di quattro angoli retti, ch'era da dimostrarsi.



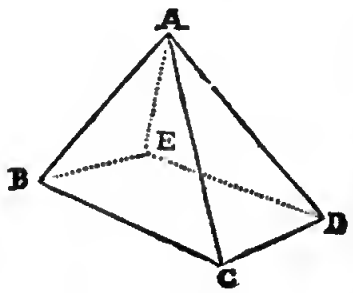
[a] 32. del 1.

[b] 32. del 1.

SCOLIO.

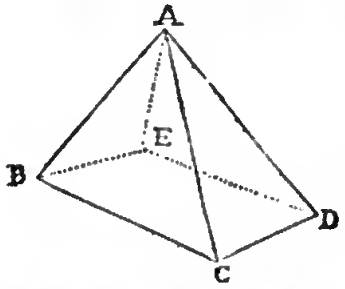
Il medesimo si dimostra se l'angolo solido sarà contenuto da più di tre angoli piani, nel seguente modo.

Sia l'angolo solido A, contenuto da i quattro angoli piani BAC, CAD, DAE, BAE. Dico, che questi quattro angoli sono minori di quattro angoli retti. Perche i due angoli ACB, ACD, [c] *sono maggiori dell'angolo BCD, & i due angoli ADC, ADE, sono maggiori dell'angolo CDE; come ancora i due angoli AED, AEB, sono maggiori dell'angolo BED, & i due ABE, ABC sono maggiori dell'angolo EBC; gli otto*



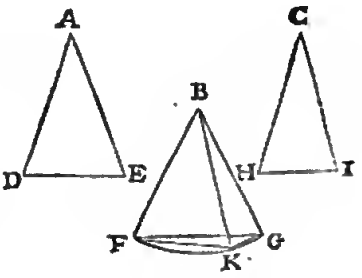
[c] 20. del 11.

angoli ACB, ACD, ADC, ADE, AED, AEB, ABE, ABC, ſaranno maggiori de
b Scol. al la 32. del 1. *i quattro angoli del quadrilatero BCDE;* b *ma i quattro angoli del quadrilatero BCDE ſono vguali à quattro angoli retti; i ſopradetti otto angoli ſaranno*
c 32. del 1. *maggiori di quattro angoli retti. E perche i tre angoli di ogni triangolo* c *ſono vguali à due angoli retti, i dodici angoli de i quattro triangoli ACD, ADE, AEB, ABC, ſaranno vguali ad otto angoli retti; leuatone gli otto angoli ſopra nominati, che furono dimoſtrati maggiori di quattro angoli retti, i rimanenti quattro angoli che contengono l'angolo ſolido A, ſaranno minori di quattro angoli retti. L'iſteſſo ſi dimoſtrerà ſe l'angolo ſolido è contenuto da più di quattro angoli piani; e perciò tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo ſolido, ſono minori di quattro angoli retti, ch'era da dimoſtrarſi.*



THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se ſaranno tre angoli piani, due de'quali, preſi in qualunque modo, ſiano maggiori del terzo; e ſiano contenuti da rette linee vguali; è poſſibile coſtruire vn triangolo con le tre rette, che congiungono gli eſtremi delle linee vguali.



Siano i tre angoli piani A, B, C, de'quali i due A, & B, ſiano maggiori del terzo C; i due B, & C ſiano maggiori dell'angolo A; & i due A, & C ſiano maggiori dell'angolo B; e ſiano contenuti dalle rette vguali AD, AE, BF, BG, CH, CI; tirate le tette DE, FG, HI. Dico che colle tre rette DE, FG, HI, ſe ne può coſtruire vn triangolo; cioè che due di quelle rette, preſe in qualunque modo, ſono maggiori della terza. Se i tre angoli A, B, & C, ſono frà loro vguali, perche ſono contenuti da lati vguali, ſaranno le baſi
a 4 del 1. DE, FG, HI, a frà di loro vguali; e perciò due, preſe in qualunque modo, ſono maggiori della terza. Se poi due di quegli angoli, come A, & B, ſono frà di loro vguali, ed il terzo C è minore di ciaſcuno de gli vguali A, & B; eſſendo i due angoli A, & B, vguali, e contenuti da rette linee
b 4. del 1. vguali, ſaranno le baſi DE, FG, b frà di loro vguali. In oltre, perche i lati FB, BG ſono vguali à i lati HC, CI, e l'angolo FBG ſi ſuppone mag-

giore

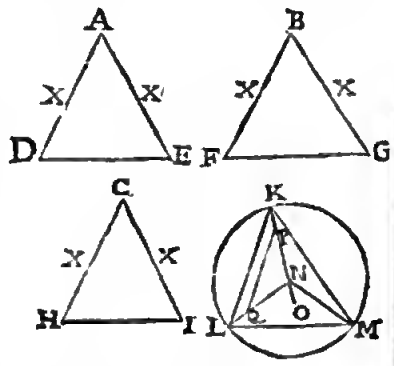
giore dell'angolo C, ſarà la baſe FG, [c] ouero DE maggiore di HI, e perciò due, preſe in qualunque modo, ſaranno maggiori della terza. Se finalmente vno di quelli, come per eſempio, l'angolo FBG, è maggiore dell'angolo A, ed è ancora maggiore dell'angolo C. Dico ſimilmente, che delle tre rette DE, FG, HI, due preſe in qualunque modo, ſono maggiori della terza. Alla retta BF, nel punto B, ſi coſtituiſca l'angolo FBK [d] vguale all'angolo A, ſarà l'angolo FBG maggiore dell'angolo FBK, e la retta BK paſſerà frà le rette FB, BG; e fatto centro in B, coll'interuallo BF, ouero BG, ſi deſcriua l'arco FKG; ſi prolunghi la retta BK, ſin che concorre coll'arco FKG in qualche punto K. Perche la retta FG [e] cade dentro del circolo FKG; perciò il punto K cade ſotto la retta FG; ſi tirino le rette FK, KG. Nel triangolo FKG i due lati FK, KG [f] ſono maggiori del terzo lato FG. Si conſiderino i due triangoli ADE, BFK. Perche i due lati DA, AE, ſono vguali à i due lati FB, BK; e l'angolo FBK, per coſtruttione è vguale all'angolo A, ſarà la baſe FK [g] vguale alla baſe DE. E perche i due angoli A, & C, per ipoteſi, ſono maggiori dell'angolo FBG, ſe dall'angolo FBG ſe ne leua l'angolo FBK, ch'è vguale all'angolo A, reſta l'angolo KBG minore dell'angolo C. Hor eſſendo i due lati KB, BG, vguali à i due lati HC, CI, e l'angolo C maggiore dell'angolo KBG; ſarà la baſe HI [h] maggiore della baſe KG: ma il lato FK fù dimoſtrato vguale al lato DE; i due lati HI, DE, ſaranno maggiori de i due lati FK, KG. E perche i due lati FK, KG, [k] ſono maggiori del terzo lato FG; i due lati dunque HI, DE, inſieme giunti, ſono maggiori del terzo lato FG. Per la qual coſa delle tre rette DE, FG, HI, preſone due in qualunque modo, quelle giunte inſieme, ſono maggiori della terza; e per la 22. propoſitione del 1. con le tre rette DE, FG, HI, ſi può deſcriuere vn triangolo, il che era da dimoſtrarſi.

c 24. del 1.
d 23. del 1.
e 2. del 3.
f 20. del 1.
g 4. del 1.
h 24. del 1.
k 20. del 1.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXIII.

Coſtruire vn angolo ſolido con tre angoli piani, due de' quali, preſi in qualunque modo, ſiano maggiori del terzo; e che tutti tre, inſieme giunti, ſiano minori di quattro angoli retti.

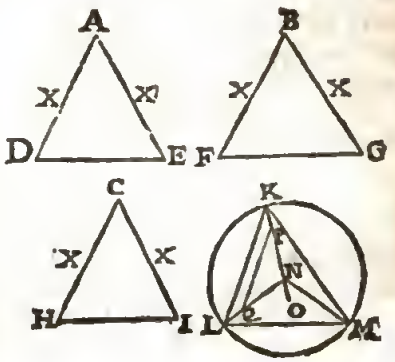
Siano i tre angoli piani A, B, C, due de' quali, preſi in qualunque modo, ſiano, giunti inſieme, maggiori del terzo; e che tutti tre, inſieme giunti, ſiano minori di quattro angoli retti: ſi vuole coſtruire vn angolo ſolido, che gli angoli piani, che lo contengono, ſiano vguali à gli angoli piani A, B, C. Tutte le rette X che contengono i dati angoli A, B, C, [a] ſi faccino frà di loro vguali, e ſi tirino le rette DE, FG, HI, colle quali, per l'antecedente



a 3. del 1.

propo-

propoſitione ſi può deſcriuere vn triangolo: ſia dunque con le rette DE, FG, HI, [b] deſcritto il triangolo KLM; e ſia il lato LM vguale al lato HI, il lato LK vguale al lato DE, ed il lato KM vguale al lato FG; intorno al triangolo KLM [c] ſi circoſcriua il circolo KLM, il di cui centro N ò caderà dentro del triangolo KLM, ò caderà in vn lato, ouero caderà fuori: cada primieramente dentro del triangolo KLM; ſi tirino le rette NK, NL, NM. Dico che ogn'vna di queſte è minore di ciaſcun lato X. Se ciaſcuna delle rette NK, NL, non è minore del lato X, ò ſarà maggiore, ouero vguale. Suppoſto prima, che NK, ouero NL, ſia vguale ad X. Perche i due lati NK, NL ſono vguali à i due AD, AE, e la baſe KL, per coſtruttione, è vguale alla baſe DE, ſarà l'angolo KNL [d] vguale all'angolo A. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B; e che l'angolo LNM è vguale all'angolo C; dal che i tre angoli intorno al centro N ſono vguali à i tre angoli A, B, C; ſi prolunghi K N verſo O, i due angoli ONM, MNK [e] ſono vguali à due angoli retti; e ſimilmente i due angoli ONL, LNM, ſono vguali à due angoli retti; dal che tutti gli angoli LNM, MNK, KNL, che ſono intorno al centro N ſono vguali à quattro angoli retti: ma gli angoli intorno al centro N furono moſtrati vguali à gli angoli A, B, C; gli angoli dunque A, B, C ſono vguali à quattro angoli retti, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque ogn'vna delle rette NK, NL, NM, è vguale al lato X. Di nuouo ſia NK, ouero NL, maggiore del lato X; ſi facciano le rette NP, NQ, [f] ogn'vna vguale ad X; e ſi tiri la retta PQ. Perche LN è vguale ad NK, e la retta QN vguale ad NP, ſarà LN ad NK, come QN ad NP; e permutando, LN ad NQ [g] ſarà come KN ad NP; e diuidendo, LQ à QN [h] ſarà come KP à PN; è perciò la retta QP [k] ſarà parallela al LK. E perche le parallele LK, QP ſono ſegate dalle rette NK, NL, l'angolo NPQ [l] ſarà vguale all'angolo NKL; e l'angolo NQP vguale all'angolo NLK; dal che i triangoli NPQ, NKL ſono equiangoli, e la proportione di NK à KL [m] ſarà come quella di NP à PQ; e permutando, KN ad NP [n] ſarà come KL à PQ: ma KN è maggiore di NP, ſarà KL [o] maggiore di QP; fù fatta, per coſtruttione KL vguale ad ED, ſarà ED maggiore di PQ. Si conſiderino i due triangoli NPQ, ADE, de'quali i due lati NP, NQ, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati AD, AE, la baſe DE è maggiore della baſe PQ; ſarà l'angolo A [p] maggiore dell'angolo PNQ. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che l'angolo B è maggiore dell'angolo KNM, e che l'angolo C è maggiore dell'angolo LNM: per la qual coſa i tre angoli A, B, C ſono maggiori de i tre angoli LNM, LNK, KNM: ma queſti tre angoli furono dimoſtrati vguali

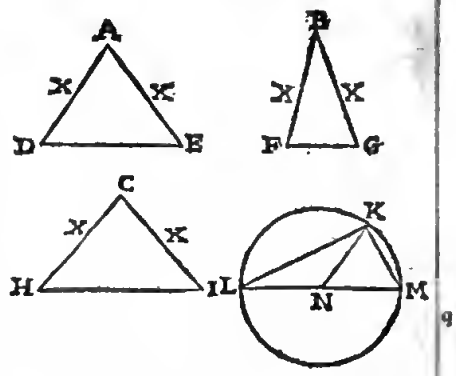


b 22. del 1.
c 5. del 4.
d 8. del 1.
e 13. del 1.
f 3. del 1.
g 16. del 5.
h 17. del 5.
k 2. del 6.
l 29. del 1.
m 4. del 6.
n 16. del 5.
o 14. del 5.
p 25. del 1.

à quat-

à quattro angoli retti; i tre angoli dunque A,B,C ſono maggiori di quattro angoli retti, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque ciaſcuna delle rette NK,NL,NM,è maggiore, ne vguale à ciaſcun lato X,ma ogn'vna delle rette NK,NL,NM, è minore di ciaſcun lato X.

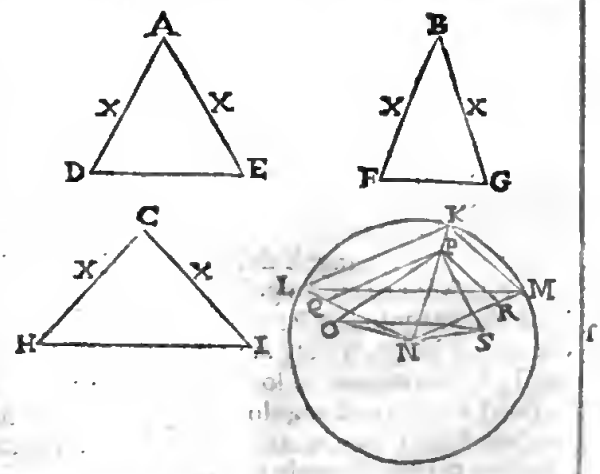
Di nuouo cada il punto N in vno de i lati del triãgolo KLM,come nel lato LM; ſi tiri la retta NK. Dico ſimilmente,che ciaſcuno de ſemidiametri NK,NL,NM è minore di ciaſcun lato X. Perche, ſe non è minore, ò ſarà vguale, ouero maggiore. Siano prima le due LN, NK,vguali alle due HC,CI. Perche NK è vguale ad NM,ſarà LM vguale alle due LN, NK: ma le due LN, NK, furono ſuppoſte vguali alle due HC, CI; ſarà tutta LM vguale alle due HC,CI. E perche nel triangolo CHI, i due lati HC, CI, ſono maggiori del terzo lato HI; ſarà LM maggiore di HI, che è contro alla coſtruttione,mentre LM fù fatta vguale ad HI. Non dunque ciaſcuna delle rette NL, NK, NM è vguale al lato X. Siano, ſe è poſſibile, le due NK, NL, maggiori de i lati HC,CI. Eſſendo LM vguale alle due LN,NK, ſarà LM maggiore de i due lati HC, CI; ma i due lati HC, CI, ſono maggiori del terzo lato HI; ſarà LM maggiore di HI, ch'è contro alla coſtruttione. Non dunque ciaſcuna retta NK,NL, NM è maggiore, ne vguale al lato X, ma ogn'vna è minore del lato X.



q 20. del 1.

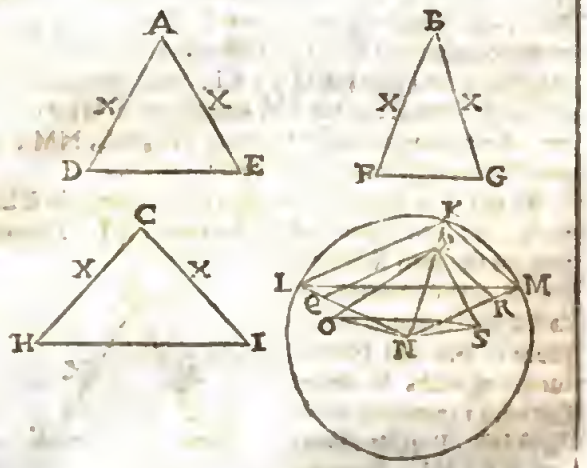
r 20. del 1.

Se poi il centro N cade fuori del triangolo KLM, come nella ſeguente figura; ſi tirino le rette NL, NK, NM. Dico che ogn'vna di queſte è minore del lato X. Perche ſe non è minore, ò ſarà vguale,ouero maggiore. Sia nel primo luogo vguale. Si conſiderino i triangoli KNL, ADE. Perche i due lati NK, NL, ſono vguali à i due lati DA, AE, e la baſe LK è vguale alla baſe DE, ſarà l'angolo LNK vguale all' angolo A. Nell' iſteſſo modo ſi prouerà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B; dal che tutto l'angolo LMN ſarà vguale à i due angoli A, & B, giunti inſieme. Si conſideri-



f 8. del 1.

siderino i triangoli LMN, CHI; essendo i due lati LN, NM, vguali à i
t 8.del 1. due lati HC, CI, la base LM è vguale alla base HI, sarà l'angolo LNM
vguale all'angolo C: ma l'angolo LNM fù dimostrato vguale à i due an-
goli A, & B, giunti insieme; saranno i due angoli A, & B insieme, vgua-
li all'angolo C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ogn'vna delle rette
NL, NK, NM, è vguale al lato X. Siano di nuouo i due lati NK, NL
u 3.del 3. maggiori de i due lati AD, AE; si facciano le rette NP, ed NQ, u ogn'vna
vguale ad X, e si tiri la retta PQ. Si dimostri, come si fece nella prima
parte, che LK è maggiore di QP; essendo LK vguale ad ED, sarà il lato
ED maggiore di PQ. Si considerino i triangoli QNP, ADE. Perche i
due lati QN, NP, sono vguali à i due lati AD, AE, e la base DE è mag-
x 25.del 1. giore di QP, sarà l'angolo A x maggiore dell'angolo LNK. Nell'istesso
y 23.del 1. modo, considerando i triangoli KNM, BFG, si dimostrerà, che l'angolo
B è maggiore dell'angolo KNM. Si faccia l'angolo KNS y vguale all'
z 23.del 1. angolo B, sarà l'angolo KNS maggiore dell'angolo KNM; e perciò la
retta NS cade sotto della retta NM. Similmente si faccia l'angolo KNO z
a 3.del 1. vguale all'angolo A, sarà l'angolo KNO maggiore dell'angolo KNL;
dal che la retta NO caderà sotto alla retta NL. Si facciano le rette NO,
NS, a ogn'vna vguale al lato X; saranno le rette NO, NQ, NP, NR, NS
frà di loro vguali; si tiri
la retta OS. Perche le
rette QP, PR, per quel
che si dimostrò nella
prima parte, sono pa-
rallele à i lati LK, KM,
b 29.del 1. sarà l'angolo QPR b v-
guale all'angolo LKM.
Di nuouo, essendo NP
vguale ad NO, il trian-
golo NPO sarà isosce-
le, e gli angoli NPO,
c 5.del 1. NOP c sono frà di loro
vguali. E similmente nel
triangolo isoscele NQP
gli angoli NQP, NPQ,
sono frà di loro vguali;
e perche i tre angoli
del triangolo NOP so-
d 32.del 1. no vguali d à i tre angoli del triangolo NQP; da i tre angoli del trian-
golo NOP, se ne leui l'angolo QNP, e da i tre angoli del triangolo NQP,
se ne leui l'angolo QNP; restano i due angoli NOP, NPO, minori de i
due angoli NQP, NPQ: ma gli angoli NPO, NOP sono frà di loro v-
guali, e sono ancora frà loro vguali gli angoli NPQ, NQP; sarà l'ango-
lo NPO minore dell'angolo NPQ. Nell'istesso modo si dimostrerà, che
l'angolo NPS è minore dell'angolo NPR; dal che tutto l'angolo OPS,
è minore di tutto l'angolo QPR. Si considerino i triangoli NPO, ADE.
Perche i due lati NO, NP, sono vguali à i due lati DA, AE, e l'angolo



PNO

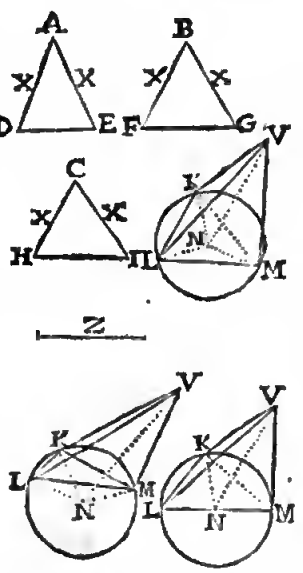
PNO è fatto vguale all'angolo A, ſarà la baſe PO [e] vguale alla baſe DE: ma DE, per coſtruttione, è vguale ad LK, ſarà OP vguale ad LK. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che PS è vguale al lato KM. Si conſiderino i triangoli LKM, OPS. Perche i due lati LK, KM ſono vguali à i due lati OP, PS, e l'angolo LKM è dimoſtrato maggiore dell'angolo OPS, ſarà la baſe LM [f] maggiore delle baſe OS: ma LM, per coſtruttione, è vguale ad HI, ſarà HI maggiore di OS. Di più perche i due lati HC, CI, ſono vguali à i due lati ON, NS, e la baſe HI è maggiore della baſe OS, ſarà l'angolo C [g] maggiore dell'angolo ONS: ma l'angolo ONS, per coſtruttione, è vguale à i due angoli A, & B; ſarà l'angolo C maggiore de i due angoli A, & B, inſieme giunti, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque ciaſcuna delle rette NL, NK, NM, è maggiore, ne vguale al lato X; ma ogn'vna è minore, come ſi diſſe.

e 4. del 1.

f 24. del 1.

g 25. del 1.

Finalmente eſſendoſi dimoſtrato, che ciaſcuna delle rette NM, NK, NL, è minore del lato X, il quadrato del lato NK, ouero NM, ouero NL, ſarà minore del quadrato di ciaſcun lato X; ſi ſottragga dunque il quadrato di NK, ouero NL, ouero NM, dal quadrato del lato X, e quel che reſta ſia il quadrato della retta Z; ſarà il quadrato di NK, ouero NL, ouero NM, col quadrato della retta Z, vguale al quadrato del lato X. Nel punto N ſi erigga la retta NV, [h] perpendicolare al piano KLM, e ſi faccia NV [K] vguale alla retta Z; ſi tirino le rette KV, LV, MV. Dico che gli angoli piani LVM, LVK, MVK, che contengono l'angolo ſolido V, ſono vguali à i dati angoli piani A, B, C. Perche la retta VN è perpendicolare al piano KLM, gli angoli VNL, VNK, VNM, [l] ſono retti. Hor perche la retta Z è vguale ad NV, ſarà il quadrato di LN, col quadrato di Z, vguale al quadrato di LN, col quadrato di NV; e perche il quadrato di LN, col quadrato di Z, per quel che ſi è detto, è vguale al quadrato del lato X; ſarà il quadrato di LN, col quadrato di NV, vguale al quadrato del lato X: Ma i quadrati de i due lati LN, NV, [m] ſono vguali al quadrato di LV; ſarà il quadrato di LV vguale al quadrato di X, ed il lato LV ſarà vguale al lato X. Similmente i quadrati de i due lati KN, NV, ſono vguali à i quadrati delle due NK, & Z: ma i quadrati delle due NK, & Z, ſono vguali al quadrato del lato X; i quadrati de i lati KN, NV, cioè il quadrato di VK, [n] ſarà vguale al quadrato di X, ed il lato VK ſarà vguale al lato X. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il lato MV è vguale al lato X. Si conſiderino i due triangoli VLM, CHI. Perche i due lati VL, VM, ſono vguali à i due lati CH, CI, e la baſe LM è vguale alla baſe HI; ſarà l'angolo LVM [o] vguale all'angolo C. Similmente



h 12. del 11.

K 3. del 1.

l 3. defin. del 11.

m 47. del 1.

n 47. del 1.

o 8. del 1.

te ne i triangoli VKL, ADE, i due lati VK, VL, ſono vguali à i due lati AD,AE, la baſe KL è vguale alla baſe DE, ſarà l'angolo KVL p vguale all'angolo A. E perche ne i triangoli VKM, BFG, i due lati VK, VM, ſono vguali à i due lati BF,BG, la baſe KM è vguale alla baſe FG, ſarà l'angolo KVM q vguale all'angolo B, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

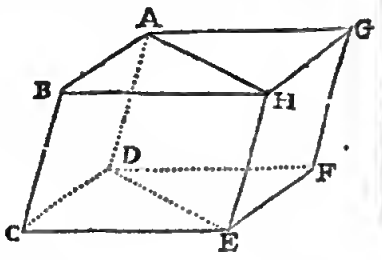
p 8. del 1.

q 8. del 1.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

Se vn ſolido è contenuto da piani paralleli, gli oppoſti piani ſono parallelogrammi ſimili, ed vguali.

Sia il ſolido ACEG, contenuto da piani paralleli, cioè che il piano BE ſia parallelo all'oppoſto piano AF, che il piano AC ſia parallelo all'oppoſto GE, e che il piano BG ſia parallelo all'oppoſto piano CF. Dico che i piani oppoſti BE,AF, ouero i due AC,GE, ouero i due BG, CF, ſono parallelogrammi, ſimili, ed vguali. Perche i piani paralleli BE, AF, ſono ſegati dal piano AC, le communi ſettioni BC, AD, a ſono frà di loro parallele. Similmente, perche i piani paralleli BG,CF, ſono ſegati dal piano AC, le communi ſettioni BA, CD ſono frà di loro parallele; dal che il quadrilatero ABCD è parallelogrammo. Nell'iſteſſo modo proueremo,che tutti gli altri quadrilateri, che contengono il ſolido CG, ſono parallelogrammi, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



a 16. del 11.

Di nuouo dico che i parallelogrammi oppoſti BG,CF ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Perche i lati AB, BH, che concorrono in B, ſono paralleli à i lati DC, CE, che concorrono in C, e non ſono nel medeſimo piano (ſtante che ſono ne i piani oppoſti) ſarà l'angolo ABH b vguale all'angolo DCE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,che gli altri angoli del parallelogrammo BG, ſono vguali à i corriſpondenti angoli del parallelogrammo CF; e perciò i parallelogrammi BG,CF, ſono equiangoli. In oltre nel parallelogrammo AC il lato AB c è vguale al lato DC, e nel parallelogrammo BE il lato BH è vguale all'oppoſto CE,è pereiò AB à BH ſarà come DC à CE: ma AB è vguale à GH, ed il lato CD è vguale ad EF, ſarà BH ad HG come CE ad EF; e ſarà HG à GA come EF ad FD: per la qual coſa i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali; ed in conſeguenza i parallelogrammi BG,CF ſono frà di loro ſimili. Si tirino le rette AH,DE. Perche i due lati AB,BH, ſono vguali à i due lati DC,CE, e l'angolo ABH è vguale all'angolo DCE, ſarà la baſe AH vguale alla baſe DE, ed il triangolo ABH d vguale al triangolo DCE, come ancora il doppio, cioè il parallelogrammo BG, e ſarà vguale al doppio, cioè al parallelogrammo CF. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli altri parallelogrammi oppoſti ſono ſimili, ed vguali. E queſto è quel ſolido, ch'Eu-

b 10. del 11.

c 34. del 1.

d 4. del 1.
e 34. del 1.

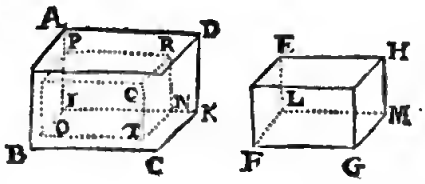
elide

clide chiama nella 30. defin. di queſto. Parallelepipedo. Se il ſolido dunque contenuto da piani paralleli &c. ch'era da dimoſtrarſi.

SCOLIO.

De i parallelepipedi ſimili, quello, che hà la baſe maggiore, è maggiore dell'altro, che hà la baſe minore.

Siano i ſimili parallelepipedi ABCD, EFGH, le di cui baſi ſiano i ſimili parallelogrammi BK, FM, e ſia la baſe BK maggiore della baſe FM. Dico che il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo EFGH. Perche i piani BK, FM, ſono frà loro ſimili, e per ipoteſi il piano BK è maggiore del piano FM, ſarà IK [a] *maggiore di LM, ed IB maggiore di LF. Si faccia IN* [b] *vguale ad LM, e ſi faccia IO vguale ad LF, e ſi compiſca il parallelogrammo ON. Di nuouo, perche i ſolidi BD, FH, ſono ſimili, perciò i piani, che contengono il ſolido BD* [c] *ſaranno ſimili à i piani, che contengono il ſolido FH, cioè il piano BA ſarà ſimile al piano FE, ed il piano AK ſimile al piano EM. Hor eſſendo il piano AB ſimile al piano EF, ſarà BI ad IA* [d] *come FL ad LE: ma BI è maggiore di FL, ſarà AI* [e] *maggiore di LE. Si faccia IP* [f] *vguale ad LE, e ſi compiſca il parallelogrammo PO; co'i lati PI, IN, ſi compiſca il parallelogrammo IR; ſi facciano i piani oppoſti, e ſarà deſcritto il parallelepipedo POTR ſopra la baſe ON. In oltre per la ſimilitudine de i parallelepipedi BD, FH, l'angolo ſolido I ſarà vguale all'angolo ſolido L, cioè l'angolo PIN* [g] *ſarà vguale all'angolo ELM, l'angolo PIO vguale all'angolo ELF, e l'angolo OIN vguale all'angolo FLM. Hor perche i lati OI, IN ſono vguali à i lati FL, LM, ſarà OI ad IN come FL ad LM, l'angolo OIN è vguale all'angolo FLM, ſarà il parallelogrammo ON ſimile, ed vguale al parallelogrammo FM. Similmente, eſſendo i lati OI, IP vguali à i lati FL, LE, e l'angolo OIP vguale all'angolo FLE, il parallelogrammo OP ſarà ſimile, ed vguale al parallelogrammo FE: ed eſſendo i lati PI, IN, vguali à i lati EL, LM, e l'angolo PIN vguale all'angolo ELM, ſarà il parallelogrammo IR ſimile, ed vguale al parallelogrammo LH: ma per l'antecedente propoſitione, gli oppoſti parallelogrammi ſono ſimili, ed vguali; in conſeguenza il parallelepipedo POTR* [h] *ſarà vguale al parallelepipedo EFGH: ma il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo POTR, ſtante che lo contiene, ſarà il parallelepipedo ABCD maggiore del parallelepipedo EFGH, ch'era da dimoſtrarſi.*

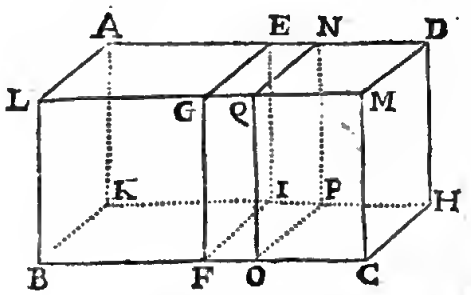


a Sco l. alla 20. del 6.
b 3. del 1.
c 9. defin. del 11.
d 1. defin. del 6.
e 14. del 5.
f 3 del 1.
g 9. defin. del 11.
h 10. defin. del 11.

LEMMA.

Quando vn piano, ſegando vn parallelepipedo, è parallelo à i piani oppoſti, ſe diuide la baſe in due parti vguali, diuide il parallelepipedo in due parallelepipedi ſimili,

ed vguali; e ſe diuide la baſe in due parti ineguali, quel parallelepipedo ſarà maggiore, il quale è poſto ſopra la baſe maggiore.



Sia il parallelepipedo AB CD, ſegato dal piano EF, parallelo al piano CD, ouero AB ed il piano EF ſeghi prima la baſe BH in due parti vguali. Dico che i parallelepipedi BE, FD, ſono frà di loro vguali. Perche i piani EF, DC ſono paralleli, le communi ſettioni FI, CH [a] *ſaranno frà di loro parallele, dal che l'angolo BFI* [b] *ſarà vguale all'angolo BCH, e l'angolo KIF, vguale all'angolo KHC; ſi che i parallelogrammi BI, FH* [c] *ſaranno equiangoli. E perche i parallelogrammi BI, FH, hanno vna medeſima altezza, perciò ſono* [d] *come le baſi BF, FC: ma i parallelogrammi BI, FH, ſi ſuppongono vguali, ſarà la baſe BF* [e] *vguale alla baſe FC, e la proportione di BF ad FI ſarà come quella di FC à CH: per la qual coſa i parallelogrammi BI, FH,* [f] *ſono frà loro ſimili, ed vguali. In oltre, perche i parallelogrammi BG, GC, hanno le baſi vguali BF, FG, e ſono frà le medeſime parallele LM, BC, perciò ſono* [g] *frà di loro vguali; e procedendoſi, come prima ſi fece, ſi dimoſtrerà, che i parallelogrammi BG, FM, ſono frà loro ſimili, ed vguali. Per la qual coſa i tre parallelogrammi FH, FM, FE, ſono ſimili, ed vguali à i tre parallelogrammi FK, FI, FE. E perche gli oppoſti ſono, per l'antecedente propoſitione, ſimili, ed vguali, in conſeguenza il parallelepipedo BE* [h] *ſarà ſimile, ed vguale al parallelepipedo FD, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Di nuouo ſia ſegato il parallelepipedo BD dal piano NO, parallelo à i piani AB, DC, in modo, che le baſe BP ſia maggiore della baſe OH. Dico che il parallelepipedo BN ſarà maggiore del parallelepipedo OD. Si diuida BC [k] *in due parti vguali in F, e per il punto F ſi faccia paſſare il piano FE,* [l] *parallelo al piano CD, quello ſarà parallelo* [m] *al piano ON, e perciò continuati i piani FE, ON, mai ſcambieuolmente concorreranno; per la qual coſa il piano FE ſegarà i piani BQ, LN, AP, e le communi ſettioni FG, GE, EI, IF, caderanno nel luogo interpoſto frà i piani AB, NO, ed in conſeguenza il ſolido FD ſarà maggiore del ſolido OD: ma, per quel che ſi è prima dimoſtrato, il ſolido BE è ſimile, ed vguale al ſolido FD, ſarà il ſolido BE maggiore del ſolido OD, e tutto il parallelepipedo BN ſarà molto maggiore del parallelepipedo OD, ch'era da dimoſtrarſi.*

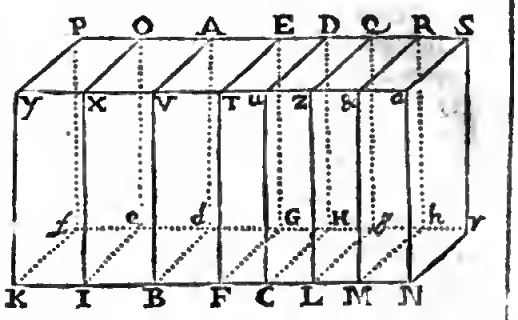
a 16. del 11.
b 29. del 1.
c 34. del 1.
d 1. del 6.
e 14. del 5.
f 1. defin. del 6.
g 36. del 1.
h 10. defin. del 11.
k 10. del 1.
l Scol. alla 25. del 11.
m Scol. alla 16. del 11.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Se vn ſolido parallelepipedo è ſegato da vn piano equi-

diſtante

distante à i piani opposti; sarà la base alla base come il solido al solido.



Sia il parallelepipedo ABCD segato dal piano EF, equidistante à i piani opposti BA,CD. Dico che il solido ABFE al solido EFCD, è come la base BG alla base FH. S'intenda continuato il parallelepipedo ABCD, dall'vna, e l'altra parte, e nella retta FK si prendano quãte parti si vogliano, come BI, IK, a ogn'vna vguale ad FB; e nella retta FN, si prendano quante parti si vogliano, come CL, LM, MN, ogn'vna vguale ad FC; per li punti I, K, L,M,N, si facciano passare i piani KP, IO, LQ, MR, NS, b paralleli al piano AB. Perche i solidi ABFE, EFCD, sono contenuti da piani paralleli, perciò sono parallelepipedi, e per l'antecedente propositione, i loro piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. Nell'istesso modo si prouerà, che tutti gli altri solidi BAOI,IOPK,DCLQ,QLMR, RMNS sono parallelepipedi, e che in ogn'vno i piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. In oltre perche i parallelogrammi Ke, Id, BG, sono sopra le vguali basi KI,IB,BF, e sono frà le medesime parallele fG, KF, c perciò sono frà di loro vguali; e sono ancora simili, stante che i lati opposti Kf, Ie, Bd, sono frà loro vguali, e paralleli, ed i lati KI,IB, BF, per costruttione, sono frà loro vguali; si che i parallelogrammi Ke, Id, BG, sono equiangoli, ed hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, cioè KI ad Ie, è come IB à Bd, ouero come BF ad FG. Similmente i parallelogrammi KX, IV, BT, sono sopra le vguali basi KI, IB,BF, e frà le medesime parallele YT,KF, e perciò sono frà di loro vguali. E procedendosi nel modo antecedente, si dimostrerà, che sono ancora fra loro simili. Et essendo i parallelogrammi KP,IO,BA, frà di loro simili, ed vguali, i tre parallelogrammi BG, BT, BA, del parallelepipedo BE, saranno vguali, e simili à i tre parallelogrammi Id, IV, BA, del parallelepipedo OIBA, e saranno ancora simili, ed vguali à i tre parallelogrammi KE, KX, IO, del parallelepipedo PKIO: ma questi in ogn'vno de i detti parallelepipedi sono vguali, e simili f à gli opposti; perciò i parallelepipedi PKIO, OIBA, ABFE, sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i parallelepipedi EFCD, DCLQ, QLMR, RMNS, sono frà di loro vguali; e sarà il parallelepipedo PKFE multiplice del parallelepipedo ABFE, come la base KG è multiplice della base BG. E similmente tutto il parallelepipedo EFNS sarà multiplice del parallelepipedo EFCD, come la base Fr è multiplice della base FH. Se il lato KF è vguale ad FN, sarà la base KG vguale alla base Fr, e per l'antecedente Lemma, tutto il parallelepipedo PKFE

a 3. del 1.

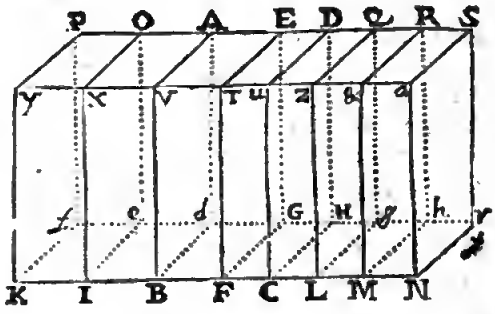
b Scol. alla 15. del 11.

c 36. del 1.

f 24. del 11.

sarà

ſarà vguale al parallelepipedo EFNS. Se poi KF è minore, ò maggiore di FN, ſarà la baſe KG minore, ò maggiore della baſe Ft, e per l'antecedente Lemma, il parallelepipedo PKFE ſarà minore, ò maggiore del parallelepipedo EFNS. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia il parallelepipedo ABFE, la ſeconda il parallelepipedo EFCD, la terza ſia la baſe BG, e la quarta la baſe FH. Gli vguali multiplici della prima, e terza, ſono il parallelepipedo PKFE, e la baſe KG, e gli vguali multiplici della ſeconda, e quarta, ſono il parallelepipedo EFNS, e la baſe Fr. E perche ſe il parallelepipedo PKFE, ch'è multiplice della prima ABFE, è vguale al parallelepipedo EFNS, ch'è multiplice della ſeconda EFCD, ancora la baſe KG, ch'è multiplice della terza BG, è vguale alla baſe Fr, ch'è multiplice della quarta FH; e ſe il parallelepipedo PKFE è maggiore, ò minore del parallelepipedo EFNS, ancora la baſe KG ſarà maggiore, ò minore della baſe Fr, per la 6. definitione del quinto, la prima, cioè il parallelepipedo ABFE, alla ſeconda, cioè al parallelepipedo EFCD, ſarà come la terza, cioè la baſe BG, alla quarta, ch'è la baſe FH. Per la qual coſa il parallelepipedo ABCD ſarà diuiſo dal piano EF, in modo, che il parallelepipedo ABFE al parallelepipedo EFCD, ſarà come la baſe BG alla baſe FH, ch'era da dimoſtrarſi.



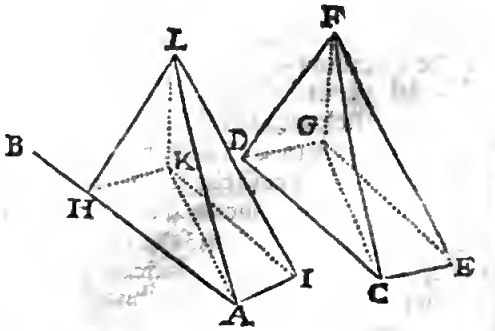
PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVI.

Ad vna data retta linea, in vn punto in eſſa, coſtituire vn angolo ſolido, vguale ad vn angolo ſolido dato.

Sia data la retta AB, ed il punto in eſſa A, e ſia dato l'angolo ſolido C, ſi vuole nel punto A, ſopra la retta AB, coſtituire vn angolo ſolido, vguale all'angolo ſolido C. Nella retta CF ſi prenda qualunque punto F, dal quale ſi faccia cadere [a] la retta FG perpendicolare al piano DC EG; ſi tirino le rette GD, GC, GE, FE, FD; poi alla retta AB, nel punto A, ſi faccia l'angolo BAI [b] vguale all'angolo pia-

[a] 11. del 11.

[b] 23. del 1.



no

nò DCE; e nel medeſimo punto A, nel piano BAI, ſi coſtituiſca l'angolo BAK, e vguale all'angolo DCG; ſarà il rimanente angolo KAI vguale al rimanente angolo GCE. Si faccia AK d vguale alla retta CG, poi nel punto K ſi eleui la retta KL e perpendicolare al piano BAIK; ſi faccia KL f vguale ad FG, ſi riri la rerta LA. Dico che l'angolo ſolido A, contenuto da gli angoli piani LAB, LAI, BAI, è vguale al dato angolo ſolido C. Si faccia AH g vguale alla retta CD, e ſi tagli AI vguale à CE; dal punto K ſi tirino le rette KH, KI; e dal punto L ſi tirino le rette LH, LI; e ſi conſiderino i due triangoli HAK, DCG, de'quali i due lati HA, AK, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati DC, CG, l'angolo HAK è vguale all'angolo DCG, h ſarà la baſe HK vguale alla baſe DG. Similmente ne i triangoli KAI, GCE, i due lati KA, AI, ſono vguali à i due lati GC, CE, l'angolo KAI è dimoſtrato vguale all'angolo GCE, ſarà la baſe K KI vguale alla baſe GE. In oltre, perche le rette FG, LK, ſono perpendicolari à i piani DCEG, HAIK, gli angoli FGD, FGC, FGE, come ancora gli angoli LKH, LKA, LKI, l ſono retti. Ne i triangoli LKI, FGE, eſſendo, per coſtruttione, il lato LK vguale al lato FG, e ſi è dimoſtrato il lato KI vguale al lato GE, e l'angolo LKI vguale all'angolo FGE, in conſeguenza m la baſe LI ſarà vguale alla baſe FE. Similmente ne i triangoli FGC, LKA, i due lati FG, GC, per coſtruttione ſono vguali à i due lati LK, KA, gli angoli FGC, LKA, ſono retti, perciò la baſe LA n ſarà vguale alla baſe FC. Di più ne i triangoli LKH, FGD, i due lati LK, KH, ſono vguali à due lati FG, GD, gli angoli LKH, FGD, ſono retti; ſarà la baſe LH vguale alla baſe FD. Si conſiderino poi i triangoli LAI, FCE, de'quali i due lati LA, AI ſono vguali à due lati FC, CE; la baſe LI è dimoſtrata vguale alla baſe FE; ſarà l'angolo LAI o vguale all'angolo FCE. Finalmente ne i triangoli LAH, FCD, i due lati LA, AH, ſono vguali à i due lati FC, CD, la baſe LH è dimoſtrata vguale alla baſe FD, ſarà l'angolo LAH p vguale all'angolo FCD: ma l'angolo BAI, per coſtruttione è vguale all'angolo DCE, i tre angoli piani dunque LAB, LAI, BAI, che contengono l'angolo ſolido A, ſono vguali à i tre angoli piani FCD, FCE, DCE, che contengono l'angolo ſolido C; e perciò l'angolo ſolido A è vguale all'angolo ſolido C, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

c 23. del 1.
d 3. del 1.
e 12. del 11.
f 3. del 1.
g 3. del 1.
h 4. del 1.
K 4. del 1.
l 3. defin. del 11.
m 4. del 1.
n 4. del 1.
o 8. del 1.
p 8. del 1.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXVII.

Sopra vna data retta linea deſcriuere vn parallelepipedo ſimile, e ſimilmente poſto ad vn dato parallelepipedo.

Sia data la retta linea AB, ed il ſolido parallelepipedo CDEF, e ſi voglia ſopra la retta AB deſcriuere vn parallelepipedo ſimile, e ſimilmente poſto, al dato parallelepipedo CDEF. Nel punto A ſopra la retta AB, per l'antecedente propoſitione, ſi coſtituiſca l'angolo ſolido A, vguale all'angolo ſolido D, in modo, che l'angolo LAB ſia vguale all'angolo GDE, l'angolo LAM ſia vguale all'angolo GDI, e l'angolo MAB ſia

vguale

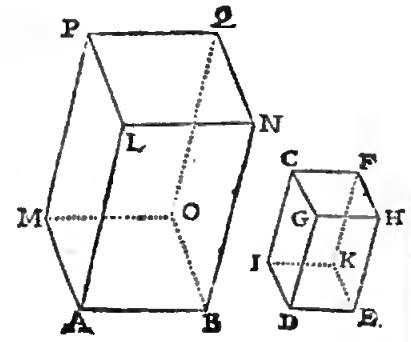
a 12. del 6. vguale all'angolo IDE ; poi ſi faccia come ED à DG, [a] così BA ad AL ; e di nuouo ſi faccia come GD à DI, così LA ad AM ; ſarà per l'egualità ED à DI [b] come BA ad AM . Co'i due lati LA , AB , ſi compiſca il parallelogrammo AN ; co'i due MA,AB, ſi faccia il parallelogrammo AO; e co'i due LA, AM, ſi faccia il parallelogrammo AP . Per il punto B ſi faccia paſſare il piano BQ [c] parallelo al piano AP ; per il punto M ſi faccia paſſare il piano MQ parallelo al piano AN ; e per il punto P ſi faccia paſſare il piano PN parallelo al piano MB ; e ſarà deſcritto il parallelepipedo PABQ alla retta AB, quale Dico eſſer ſimile , e ſimilmente poſto al parallelepipedo dato CDEF. Perche l'angolo LAB è vguale all'angolo GDE , e la proportione di LA ad AB è come quella di GD à DE , ſarà il parallelogrammo LB [d] ſimile , e ſimilmente poſto al parallelogrammo GE . Similmente perche l'angolo LAM è vguale all'angolo GDI, e la proportione di LA ad AM è come quella di GD à DI, ſarà il parallelogrammo AP ſimile, e ſimilmente poſto al parallelogrammo DC . Ed oltre à ciò , eſſendo l'angolo BAM vguale all'angolo EDI , e la proportione di ED à DI è come quella di BA ad AM ; il parallelogrammo AO ſarà ſimile , e ſimilmente poſto al parallelogrammo DK ; per la qual coſa i tre parallelogrammi EG , DC, DK, ſono ſimili , e ſimilmente poſti à i tre parallelogrammi AN , AP , AØ, i loro oppoſti [e] ſono ancora ſimili, e perciò i parallelepipedi CDEF, PABQ, ſaranno ſimili , e ſimilmente poſti , che era da farſi , e dimoſtrarſi .

b 22. del 5.

c Scol. alla 15. del 11.

d 1. defin. del 6.

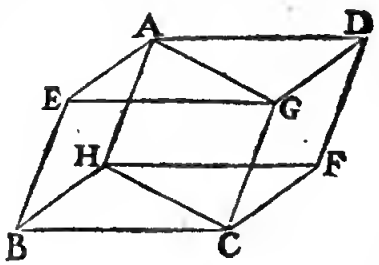
e 24. del 11.



THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Il piano, che ſega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani oppoſti, lo diuide in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, nel quale i piani oppoſti ſiano i parallelogrammi ED, BF, ſi tirino i diametri , ò diagonali , che ſiano le rette AG , HC. Perche i quadrilateri BG,BA ſono parallelogrammi , ſarà GC vguale, e parallela ad EB, e la retta AH ſarà vguale , e



paral-

parallela alla medeſima EB; dal che le rette AH, GC [a] ſono frà di loro vguali, e parallele; e le rette AG, HC, che le congiungono, [b] ſono frà di loro vguali, e parallele; e pereiò ſaranno in vn medeſimo piano; ed il quadrilatero AHCG ſarà parallelogrammo. Dico, che il piano AHCG diuide il parallelepipedo BD in due parti vguali. Perche gli oppoſti parallelogrammi ED, BF, ſono frà di loro ſimili, ed vguali, le loro metà ſaranno ancora [c] ſimili, ed vguali; e ſarà il triangolo AEG ſimile, vguale, e parallelo al triangolo HBC; ed il triangolo AGD ſarà ſimile, vguale, e parallelo al triangolo HCF. Nel parallelogrammo ED i lati oppoſti, e gli angoli oppoſti, [d] ſono frà di loro vguali, e pereiò la proportione di AE ad EG è come quella di GD à DA; ſi che i triangoli AEG, ADG ſono frà loro equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli [e] vguali proportionali, e pereiò ſono [f] ſimili; e ſarà il triangolo AEG ſimile, ed vguale al triangolo AGD. Per l'iſteſſa ragione i triangoli HBC, HCF, ſono frà loro ſimili, ed vguali, e tutti quattro i triangoli AEG, AGD, BHC, HCF, ſono frà loro ſimili, ed vguali. Finalmente perche il parallelogrammo AB è ſimile, ed vguale al parallelogrammo DC, come ancora il parallelogrammo EC è ſimile, ed vguale al parallelogrammo HD; eſſendo il parallelogrammo AHCG commune, ſaranno i tre parallelogrammi AB, EC, AC, ſimili, ed vguali à i tre parallelogrammi CD, DH, AC; ed i triangoli AEG, HBC, ſono ſimili, ed vguali à i triangoli AGD, HCF; e per la 10. definit. di queſto, i priſma AHBG, AHCD, ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Per la qual coſa il piano AHCG, che paſſa per le diagonali AG, HC, diuide il parallelepipedo ABCD in due parti vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

[a] 9. del 11.
[b] 33. del 1.
[c] 20. del 6. & 34. del 1.
[d] 34. del 1.
[e] 4. del 6.
[f] 1. definit. del 6.

COROLLARIO.

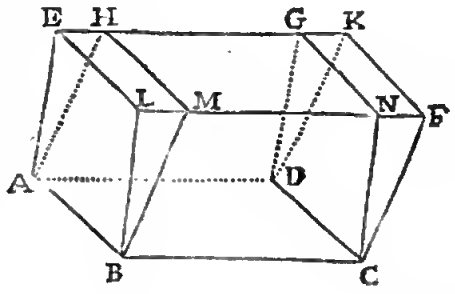
Quando dunque vn piano ſega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani oppoſti, lo ſega in due priſmi di baſi triangolari, e perciò ogni priſma di baſe triangolare è la metà del parallelepipedo, che hà la medeſima altezza, la di cui baſe è il doppio della baſe triangolare di eſſo priſma.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIX.

Se i ſolidi parallelepipedi hanno vna medeſima baſe, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, ed i lati, che ſi eleuano ſopra la baſe in ciaſcuna di due faccie oppoſte, terminano nella medeſima retta linea, quei ſolidi parallelepipedi ſono frà di loro vguali.

Sopra la medeſima baſe ABCD, e frà i medeſimi piani paralleli EF, AC, ſiano collocati i parallelepipedi EBCG, HBCK, ed in ciaſcuna delle

faccie opposte BF,AK,i lati eleuati sopra la base cõcorrano nelle medesime rette LF,EK,cioè i lati BL,BM,CN,CF,cõcorrano nella medesima retta LF; ed i lati AE,AH,DG, DK, nella faccia opposta concorrano colla medesima retta EK. Dico,che i parallelepipedi EBCG,HBCK, sono frà di loro vguali. Perche i parallelogrammi LBCN, MBCF, hanno la medesima base BC, e sono frà le medesime parallele LF, BC, [a] perciò sono frà di loro vguali; detrattone il commune trapetio MBCN, resta il triangolo LBM vguale al triangolo NCF. Nell'istesso modo si proverà,che il triangolo EAH è vguale al triangolo GDK. In oltre nel parallelogrammo LC i lati opposti LN,BC, [b] sono frà di loro vguali; e nel parallelogrammo BF il lato MF [c] è vguale all'opposto BC; dal che LN sarà vguale ad MF, e detrattane la commune MN, resta LM vguale ad NF. Nel parallelogrammo EB, i lati opposti EA,LB sono [d] frà di loro vguali,e nel parallelogrammo BH il lato AH è vguale all'opposto BM; come ancora nel parallelogrammo EM i lati opposti EH, LM, sono frà di loro vguali, dal che i trè lati AE,EH,HA del triangolo EAH, sono vguali à i tre lati BL,LM,MB, del triangolo LBM; e per l'8. propositione del primo, i triangoli AEH,BLM, sono equiangoli, & vguali; e perciò, [e] hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la 1. definit. del 6. sono frà di loro simili, ed vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli CNF,DGK,sono frà di loro simili,ed vguali. E perche nel parallelogrammo BF il lato BM [g] è vguale all'opposto CF,e nel parallelogrammo BN il lato BL è vguale all'opposto CN; essendosi dimostrato il lato LM vguale ad NF, i tre lati BL,LM,MB, del triangolo LBM, sono vguali à i tre lati CN, NF, FC del triangolo CNF; e perciò i triangoli BLM,CNF,sono equiangoli,haueranno i lati [h] intorno à gli angoli vguali proportionali;per la qual cosa sono frà di loro simili:ma furono dimostrati vguali, in conseguenza sono frà loro simili,ed vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà,che i triangoli EAH,GDK, sono frà loro simili,ed vguali. I quattro triangoli dunque LBM,EAH,NCF,GDK,sono frà loro simili,ed vguali. Di nuouo perche i parallelogrammi EM,GF, sono sopra le vguali basi LM,NF,e frà le medesime parallele EK,LF, [k] perciò sono frà di loro vguali; & essendo GN parallela ad EL, sarà l'angolo ELM [l] vguale all'angolo GNF, e l'angolo NGK vguale all'angolo LEH; si che i parallelogrammi EM,GF, sono equiangoli. E perche il lato EL [m] è vguale all'opposto GN, sarà EL ad LM,come GN ad NF: per la qual cosa i parallelogrammi EM, GF sono frà loro simili; furono dimostrati vguali, in conseguenza sono frà loro simili,ed vguali. Nel parallelepipedo EBCG,i piani opposti EB, GC, [n] sono frà loro simili, ed vguali: e nel parallelepipedo HBCK,i piani opposti HB,KC,sono simili,ed vguali,dal che i tre paralle-



a 35. del 1.
b 34. del 1.
c 34. del 1.
d 34. del 1.
e 4. del 6.
g 34. del 1.
h 4. del 6.
k 36. del 1.
l 29. del 1.
m 34. del 1.
n 24. del 11.

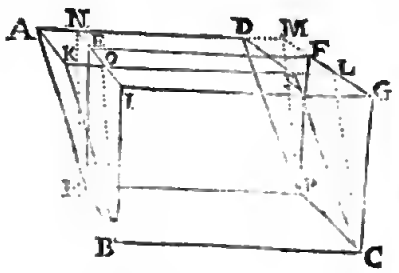
logrammi

logrammi EB,EM,HB,ſono ſimili,ed vguali à i tre parallelogrammi CG, GF,CK;ed i triangoli BLM,AEH,ſono ſimili,ed vguali à i triãgoli CNF, DGK; e per la 10.definitione di queſto, i priſma ABME,DCFG, ſono frà di loro vguali, ſe gli aggiunga vgualmente il ſolido HBCG, ne viene il parallelepipedo EBCG vguale al parallelepipedo HBCK, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXX.

Se i ſolidi parallelepipedi hanno vna medeſima baſe, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, ed i lati, che ſi eleuano ſopra la baſe, in neſſuna delle faccie oppoſte terminano nella medeſima retta linea, quei parallelepipedi ſono frà di loro vguali.

Sopra la medeſima baſe HBCP, e frà i medeſimi piani paralleli AG, HC, ſiano collocati i parallelepipedi ABCD,EBCF, ed i lati eleuati alla baſe in neſſuna faccia concorrano colla medeſima retta linea, cioè, che i lati BK, BI, CR, CG, non ſiano nel medeſimo piano; E ſimilmente i lati HE,PF,non ſiano nel medeſimo piano co'i lati HA,PD;ne i lati BK, HA ſiano nel medeſimo piano co'i lati BI,HE; ne meno i lati CG,PF,ſiano nel medeſimo piano co'i lati CR, PD. Dico, che il parallelepipedo ABCDè vguale al parallelepipedoEBCF.Si prolũghino i latiKR,AD,IE fin che ſi ſeghino co'i lati GF, AD,cõtinuati,come inM,L,ed N; ſi tirino le rette HN, BO, CL, PM. Nel parallelogrammo EHBI, il lato IE è parallelo all'oppoſto HB; e nel parallelogrammo AB il lato AK è parallelo al medeſimo lato HB; e perciò le rette AK, EI, ouero IN, [a] ſono frà di loro parallele: Ma nel parallelogrammo AKRD, il lato KR è parallelo al lato AD, ſarà il quadrilatero AKON [b] parallelogrammo,e ſarà AK [c] vguale ad NO:ma il lato AK è vguale al ſuo oppoſto HB, ſarà NO vguale ad HB; e perche fù dimoſtrata la retta NO, parallela ad HB, ſarà NO vguale, e parallela ad HB; per la qual coſa le rette NH,OB,ſono frà di loro vguali,e parallele,ed il quadrilatero NHBO è parallelogrammo. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrilatero MPCL è parallelogrammo. E perche il piano CF è parallelo al piano EB,ſarà tutto il piano MC parallelo al piano NB.Similmente, eſſendo il piano KBCR parallelo al piano AHPD, ſarà tutto il piano KBCL parallelo al piano AHPM; ed il ſolido,le di cui faccie oppoſte ſo-



[a] 9. del 11.

[b] 35. defin. del 1.

[c] 34. del 1.

d 30. defin. del 11.

no i parallelogrammi NHBO, MPCL, cioè il ſolido MNHBOLCP, d ſarà parallelepipedo. In oltre ſi conſiderino i due parallelepipedi, cioè ABCD, & MNHBOLCP, i quali hanno la medeſima baſe HBCP, ſono frà i medeſimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati ſopra la baſe in ciaſcuna delle due faccie oppoſte concorrono in vna medeſima retta linea, cioè i lati HA, HN, PD, PM, concorrono nella medeſima retta AM; come anco i lati BK, BO, CR, CL, concottono nella medeſima retta linea KL; e per l'antecedente propoſit. i detti parallelepipedi ſono fra di loro vguali. Finalmente i parallelepipedi EBCF, MNHBOLCP, hanno la medeſima baſe HC, ſono frà i medeſimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati alla baſe, cioè HN, HE, BO, BI, concortono nella medeſima retta NI,

e 29. del 11.

ed i lati CG, CL, PF, PM, concorrono nella medeſima retta MG, perciò e ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa il parallelepipedo ABCD ſarà vguale al parallelepipedo EBCF, come fù propoſto dimoſtrate.

CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propoſitioni è manifeſto, che quando due parallelepipedi hanno vna medeſima baſe, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, in qualunque modo ſiano collocati, ſempre ſono frà di loro vguali.

SCOLIO.

La conuerſa alle due antecedenti propoſitioni è chiara da quel, che ſi è detto, cioè

Se i parallelepipedi vguali ſono coſtituiti ſopra d'vna medeſima baſe, e collocati dalla medeſima parte, quelli haueranno la medeſim'altezza.

Perche ſe non haueranno la medeſima altezza, vno di quelli ſarà più alto dell'altro, ſe con vn piano equidiſtante alla baſe ſe ne leui la parte più alta, i rimanenti, che reſtano frà i piani paralleli, ſarebbero, per quel che ſi è dimoſtrato, frà di loro vguali, ch'è contro all'ipoteſi.

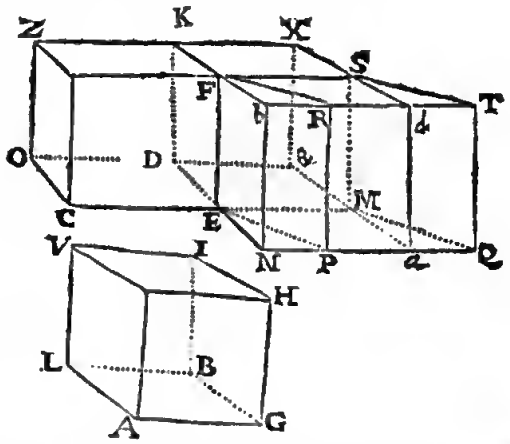
THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXI.

I ſolidi parallelepipedi, che hanno vguali baſi, e la medeſima, ò vguali altezze, ſono frà di loro vguali.

Sopra le vguali baſi AB, CD, ſiano coſtituiti i parallelepipedi AI, CK, i quali habbiano vguali altezze. Dico, che i parallelepipedi AI, CK, ſono frà di loro vguali. Suppoſto prima, che i lati GH, EF, ſiano perpendicolari alle baſi AB, CD, ſaranno GH, EF, le loro vguali altezze: ſi prolunghi il

lato

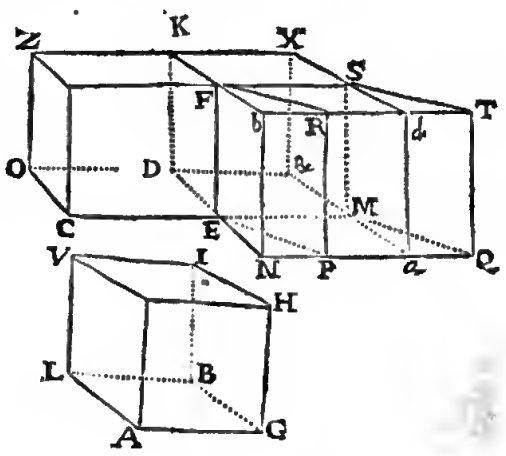
lato CE verſo M, e ſi faccia EM vguale ad LB ; nel piano OMP, ſopra la retta EM, in punto E, ſi coſtituiſca l'angolo MEP [a] vguale all'angolo BLA ; ſi faccia EP vguale ad LA, e ſi compiſca il parallelogrammo EQ; poi colle due FE,EP, [b] ſi faccia il parallelogrammo ER, e colle due FE, EM, ſi faccia il parallelogrammo ES, e ſi compiſca il parallelepipedo PQTS. Perche i lati ME,EP, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati BL, LA, ſarà ME ad EP, come BL ad LA ; fù fatto l'angolo MEP vguale all' angolo BLA, ſarà il parallelogrammo EQ ſimile, ed vguale al parallelogrammo LG. Similmente, eſſendo EF, per iporeſi, vguale ad HG, ouero VL, ed il lato EP è fatto vguale ad LA, ſarà FE ad EP, come VL ad LA ; gli angoli FEP,VLA, ſono vguali (ſtante che le rette FE,VL ſi ſuppongono perpendicolari à i piani CD, AB) ſarà il parallelogrammo FP ſimile, ed vguale al parallelogrammo VA. Di più, perche FE è vguale ad VL, e la retta EM è vguale ad LB, ſarà FE ad EM, come VL ad LB ; gli angoli VLB, FEM, ſono retti, ſarà il parallelogrammo FM ſimile, ed vguale al parallelogrammo VB; e coſi i tre parallelogrammi EQ, FP, FM, ſono ſimili, ed vguali à i corriſpondenti tre parallelogrammi LG, VA, VB; gli oppoſti [c] ſono ſimili, ed vguali, e perciò i parallelepipedi FPQS, VAGI, ſono frà di loro vguali. Si cõpiſca il parallelepipedo KEMX. Perche le rette CE,EM, per coſtruttione, fanno vna ſola retta linea, ſarà il parallelogrammo CS vn ſolo piano, ed il ſolido ZCMX ſarà vn ſolo parallelepipedo ; ſi prolunghino le rette DE, & M, ſin che concorrano colla retta PQ, continuata in qualche punto N, ed a, ſi prolunghino le rette XS,KF, ſin che concorrano con RT, come in b, & d; ſi tirino le rette bN , & da, e ſarà coſtrutto il parallelepipedo FNaS. E perche i parallelepipedi FNaS, FPQS, hanno la medeſima baſe ES, e ſono frà i medeſimi piani paralleli NT, ES, [d] pereiò ſono frà di loro vguali: ma il parallelepipedo FPQS fù dimoſtrato vguale al parallelepipedo AI, ſarà il parallelepipedo FNaS vguale al parallelepipedo AI. Di nuouo perche i parallelogrammi PM, NM, hanno la medeſima baſe EM, e ſono frà le medeſime parallele NQ, EM, perciò ſono [e] frà di loro vguali: ma il parallelogrãmo PM fù dimoſtrato vguale al parallelogrãmo AB, ouero CD, ſarà il parallelogrammo NM vguale al parallelogrammo CD ; e, preſo il parallelogrammo E&, come terza quantità, ſarà il parallelogrammo NM al parallelogrammo E&, [f] come il parallelogrammo CD al medeſimo parallelogrammo E&. Si conſideri il parallelepipedo NX, ſegato dal piano ES



a 23. del 1.
b 3. del 1.
c 34. del 11.
d 29. & 30. del 11.
e 36. del 1.
f 7. del 5.

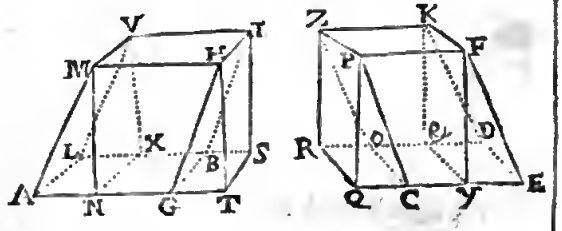
no ES equidiſtante al piano Nd, ſarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX [g] come la baſe NM alla baſe E&; ma la baſe NM alla baſe E& fù dimoſtrata eſſere come il parallelogrammo CD al parallelogrammo E&, ſarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX [h] come il piano CD al piano E&. Di più, eſſendo il parallelepipedo CX ſegato dal piano KE, parallelo al piano CZ, ſarà il parallelepipedo CK al parallelepipedo EX [k] come la baſe CD alla baſe E&; ma la baſe CD alla baſe E& fù dimoſtrata eſſere come il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX; ſarà il parallelepipedo NS al parallelepipedo EX, [l] come il parallelepipedo CK al medeſimo parallelepipedo EX. Per la qual coſa i parallelepipedi NS, CK [m] ſono frà di loro vguali: fù dimoſtrato il parallelepipedo NS vguale al parallelepipedo AI; i parallelepipedi dunque AI, CK ſono frà di loro vguali.

g 25. del 11.
h 32. del 11.
k 25. del 11.
l 32. del 11.
m 9. del 5.



Siano di nuouo ſopra le vguali baſi AGBL, OCED, i parallelepipedi VAGI, ZCEK, che habbiano vguali altezze, e non ſiano i lati GH, EF, perpendicolari alle baſi LAGB, OCED. Dico che i parallelepipedi VAGI, ZCEK, ſono frà di loro vguali. Da i punti M, H, I, V, [n] alla baſe AB, continuata, ſi faceiano eadere le rette perpendicolari MN, HT, IS, VX, e da punti Z, P, F, K, alla baſe OCED, continuata, ſi faceiano eadere le perpendicolari ZR, PQ, FY, K&. Perche le altezze de i parallelepipedi ſono frà di loro vguali, tutte le dette perpendicolari ſaranno frà di loro vguali. Si tirino le rette NX, TS, RQ, &Y, e ſaranno coſtrutti i due parallelepipedi VNTI, ZQYK, che hanno i lati eleuati perpendicolari alle baſi. Hor eſſendo la baſe XNTS vguale al piano oppoſto VMHI, ed il parallelogrāmo VMHI [o] è vguale alla baſe LAGB, ſarà la baſe LAGB vguale alla baſe XNTS. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la baſe &RQY è vguale alla baſe OCED; per la qual coſa le baſi XNTS, RQY&, ſono frà di loro vguali; i lati PQ, HT, ſono perpendicolari alle baſi, e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, i parallelepipedi VNTI, ZQYK, ſono

n 11. del 11.
o 24. del 11.



frà

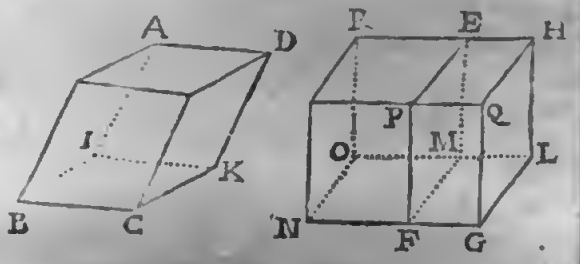
frà di loro vguali. Finalmente perche i parallelepipedi VAGI, VNTI, hanno la medesima base VMHI, e sono frà i medesimi piani paralleli MI, AS, [o] perciò sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si proverà, che i parallelepipedi ZQYK, ZCEK sono frà di loro vguali; ma i due parallelepipedi VNTI,ZQYK, furono dimostrati vguali, i parallelepipedi dunque VAGI,ZCEK, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi. [o] 29. & 30. del 11.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXII.

I solidi parallelepipedi, che hanno vguali altezze, sono frà di loro come le basi.

Siano i due parallelepipedi ABCD, EFGH, i quali habbiano la medesima, ò vguali altezze. Dico che il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, è come la base BK alla base FL. Al lato FM si applichi il parallelogrammo NM, [a] in modo, che l'angolo FMO sia vguale all'angolo GLM; à i quali s'aggiunga vgualmente l'angolo FML; i due angoli FMO, FML, saranno vguali à i due angoli FML,GLM, ma i due angoli FML,GLM, [b] sono vguali à due angoli retti, saranno i due angoli FML, FMO, vguali à due angoli retti; e le rette OM, ML, [c] costituiranno la sola retta linea OL; dal che i due parallelogrammi FO,FL, costituiscono il solo piano NL: si compisca il parallelepipedo RNGH, il quale haverà la medesima altezza, che hà il parallelepipedo ABCD. È perche la base BK è vguale alla base NM, sarà il parallelepipedo ABCD [d] vguale al parallelepipedo RNFE; e sarà il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, [e] come il parallelepipedo RNFE al medesimo parallelepipedo EFGH: ma i due RNFE, EFGH, [f] sono come le basi NM, FL; sarà il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, come la base NM, ouero BK, alla base FL, ch'era da dimostrarsi.

* vguale alla base BK



a 45. del 1.

b 29. del 11.

c 14 del 1.

d 31. del 1.

e 7. del 5.

f 25. del 11.

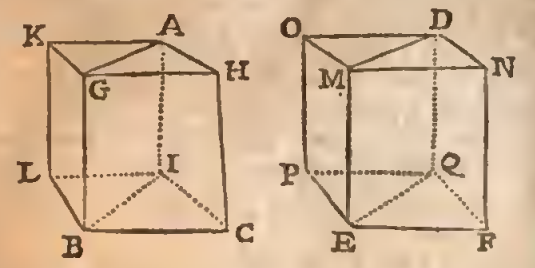
COROLLARIO I.

Da quel che si è detto è manifesto, che se saranno due Prismi di basi triangolari, i quali haueranno la medesima altezza, il Prisma al Prisma è come la base triangolare dell'vno alla base triangolare dell'altro.

Per esempio siano i Prismi di basi triangolari ABC, DEF, che habbiano

vguali

vguali altezze; co' i lati GH, HA, si faccia il parallelogrammo KH, e co' i lati BC, CI, si faccia il parallelogrammo LC, e si compisca il parallelepipedo KC, hauerà il parallelepipedo KC la medesima altezza, che hà il prisma ABC, e per la propositione 28. di questo, il parallelepipedo KC, sarà il doppio del prisma ABC. Di nuouo co' i lati MN, ND, si faccia il parallelogrãmo ON, e co' i lati EF, FQ si faccia il parallelogrammo PF; si compisca il parallelepipedo OF: e per le ragioni antedette, il parallelepipedo OF è il doppio del Prisma DEF, ed hà la medesima altezza, che hà il prisma DEF: ma i prismi ABC, DEF, per ipotesi, hanno vna medesima altezza; perciò i parallelepipedi KC, OF, haueranno vna medesima altezza; e per l'antecedente propositione, il parallelepipedo KC al parallelepipedo OF è come la base LC alla base PF: ma i parallelepipedi KC, OF, sono come i prismi ABC, DEF [a] (stante che sono il doppio de i prismi ABC, DEF) sarà dunque il prisma ABC al prisma DEF come la base LC alla base PF: ma la base LC alla base PF [b] è come la metà, cioè il triangolo IBC, alla metà, ch'è il triangolo QEF; sarà il prisma ABC al prisma DEF [c] come la base BIC alla base QEF, ch'è il nostro proposto.



a 15. del 5.

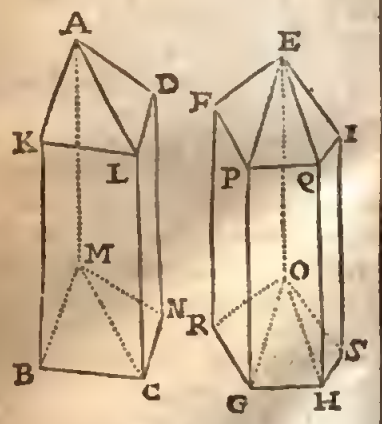
b 25. del 5.

c 11. del 5.

SCOLIO.

Quel che si è detto de i prismi di basi triangolari, si verifica ancora de i prismi, le di cui basi hanno più di tre lati.

Siano i prismi ABCD, ERGHI, di basi moltilatere, che habbiano vguali altezze. Dico che il prisma ABCD al prisma ERGH è come la base MBCN alla base ORGHS. Da gli angoli A, & E à gli angoli opposti de i poligoni AKLD, EFPQI, si tirino le rette AL, EP, EQ, e da gli angoli M, ed O, à gli angoli opposti delle basi, si tirino le rette MC, OG, OH. Perche nel prisma ERGHI i piani opposti EFPQI, ORGHS, [d] sono frà di loro simili, vguali, e paralleli; tirate le rette EP, FQ, OG, OH, i poligoni EFPQI, ORGHS, [e] saranno diuisi in triangoli di numero vguale; ed i triangoli in vno saranno simili à i triangoli corrispondenti dell'altro; e perciò il triangolo EFP sarà simile al triangolo ORG; il triangolo EPQ sarà simile al triangolo OGH; ed il tri-



d 13. defin. del 11.

e 20. del 6.

angolo

angolo EQI ſarà ſimile al triangolo OHS. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che il triangolo ALD è ſimile al triangolo MCN, ed il triangolo AKL è ſimile al triangolo MBC. In oltre perche i piani FG, PH, QS, ES, ER, [f] per la natura del priſma, ſono parallelogrammi, i lati oppoſti de' quali [g] ſono vguali, e paralleli, ſaranno tutte le rette FR, PG, QH, IS, EO, frà di loro vguali, e parallele; Hor eſſendo la retta PG vguale e parallela ad EO, ſarà EP [h] vguale, e parallela ad OG, ed il quadrilatero EPGO ſarà parallelogrammo. Similmente eſſendo QH vguale, è parallela ad EO, ſarà EQ [K] vguale, e parallela ad OH, ed il quadrilatero EOHQ ſarà paralelogrammo. E perche i tre lati EF, FP, PE, ſono vguali à i tre lati OR, RG, GO, ſtante che ſono lati oppoſti de i parallelogrammi FG, GE, ER; perciò i triangoli EFP, ORG, [l] ſono frà loro vguali; furono dimoſtrati ſimili, e ſono ne i piani paralleli FI, RS, perciò ſono frà loro ſimili, vguali, e paralleli. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i triangoli EPQ, OGH, ſono ſimili, vguali, e paralleli; e che i triangoli EQI, OHS, ſono fra loro ſimili, vguali, e paralleli. Per la qual coſa i ſolidi EOGRFP, EOGHQP, EOSHQI, ſono priſmi di baſi triangolari. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i ſolidi AMBCLK, AMNCLD, ſono priſmi di baſi triangolari. Si conſiderino i priſmi ERGO, EGHO, i quali hanno vna medeſima altezza, e per il Corollario antecedente, il priſma ERGO al priſma EGHO, è come la baſe ORG alla baſe OGH; e componendo, il priſma ERGHO al priſma EGHO, [m] è come la baſe ORGH alla baſe OGH: ma il priſma EGHO al priſma EHSO, per l'antecedente Corollario, è come la baſe OGH alla baſe OHS; ſarà per l'vgualità, il priſma ERGHO al priſma EHSO [n] come la baſe ORGHO alla baſe OHS; e componendo, tutto il priſma ERGHSO al priſma EHSO [o] è come la baſe ORGHS alla baſe OHS; ed inuertendo, il priſma EHSO à tutto il priſma ERGHSO, [p] è come la baſe OHS à tutta la baſe ORGHS. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutto il priſma ABCD al priſma ACNM, è come la baſe MBCN alla baſe MCN: ma il priſma ACNM al priſma EHSO è come la baſe MCN alla baſe OHS (ſtante che per ipoteſi, hanno altezze vguali) ſarà, per l'egualità, il priſma ABCD al priſma EHSO [q] come la baſe MBCN alla baſe OHS: fù dimoſtrato il priſma EHSO à tutto il priſma ERGHSO, come la baſe OHS à tutta la baſe ORGHS; per l'egualità, [r] ſarà tutto il priſma ABCD al priſma ERGHSO, come la baſe MBCN alla baſe ORGHS, ch'era da dimoſtrarſi.

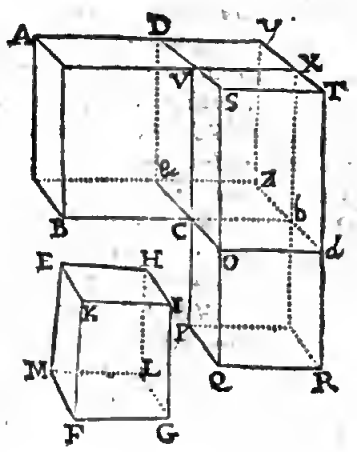
f 13. def. del 11.
g 34. del 1.
h 33. del 1.
K 33. del 1.
l 8. e 4. del 1.
m 18. del 5.
n 22. del 5.
o 18. del 5.
p Corol. alla 4. del 5.
q 22. del 5.
r 22. del 5.

COROLLARIO II.

Quindi è che i priſmi di vguali baſi, ſe ſono frà piani paralleli, ſono ancora frà di loro vguali, ſtante che, eſſendo frà piani paralleli, ſono ſotto vna medeſima altezza, e per quel che ſi è dimoſtrato, ſono frà loro come le baſi: Se dunque le baſi ſono frà di loro vguali, i priſma ſaranno ancora frà di loro vguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXIII.

I ſimili ſolidi parallelepipedi hanno triplicata proportione, che i loro lati homologhi.



Siano i ſimili parallelepipedi ABCD, EFGH. Dico che il parallelepipedo AB CD al ſimile parallelepipedo EFGHhà triplicata proportione, che il lato homologo BC al lato homologo FG. Si prolunghi il lato BC verſo b, e ſi faccia Cb [a] vguale ad FG, ouero KI; Similmente ſi prolunghi &C verſo O, e ſi faccia CO vguale ad FM; ouero EK; e ſi continui VC verſo P, e ſi faccia CP vguale ad EM, ouero KF; ſi compiſcano i parallelogrammi Ob, CQ, Pb; e ſi faccia il parallelepipedo O C R d. Perche i parallelogrammi B&, KH ſono ſimili, ſtante che i propoſti parallelepipedi ſono ſimili, ſarà l'angolo BC& vguale all'angolo KIH, ouero KEH; ma l'angolo BC& è vguale all'angolo OCb, ſarà l'angolo OCb vguale all'angolo KEH: E perche i lati bC, CO ſono vguali à i lati HE, EK, la proportione di bC à CO ſarà come quella di HE ad EK; dalche i parallelogrammi Ob, KH [b] ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Similmente eſſendo l'angolo VC& vguale all'angolo KFM, ouero KEM, e l'angolo VC& è vguale all'angolo PCO, ſarà l'angolo PCO vguale all'angolo KEM. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che l'angolo bCP è vguale all'angolo HEM. E perche i lati OC, CP ſono vguali à i lati KE, EM, ſarà OC à CP come KE ad EM; dal che i parallelogrammi OP, KM, ſono frà loro ſimili, ed vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i parallelogrammi bP, HM, ſono frà loro ſimili, ed vguali; per la qual coſa tutto il parallelepipedo CQRb [c] ſarà vguale al parallelepipedo EFGH. Co'i due lati VC, CO, ſi compiſca il parallelogrāmo VO. Eſſēdo VP vna ſola retta linea, ſarà VQ vn ſolo parallelogrammo, co' i due lati VC, Cb, ſi compiſca il parallelogrammo VCbX, ſarà tutto il parallelogrammo PX vn ſolo piano. Si compiſca il parallelepipedo VOdX; ſarà tutto il ſolido VQRX vn ſolo parallelepipedo. Si compiſca il parallelepipedo ABbY. Perche la retta &CO è vna ſola retta linea, ſarà DO vn ſolo piano, ed il ſolido DOdY vn ſolo parallelepipedo.

Perche i parallelepipedi BD, FH, ſono, per ipoteſi, frà di loro ſimili, ſarà la baſe B& [d] ſimile alla baſe MG, ouero EI; dalche la proportione di BC à C& [e] ſarà come quella di HE ad EK: ma HE ad EK è come bC à CO, ſarà BC à C& [f] come bC à CO; e permutando BC à Cb [g] ſarà come &C à CO; ma BC à Cb è come il parallelogrammo B& [h] al parallelogram-

mo

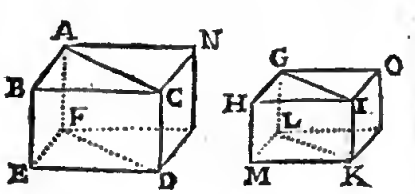
[a] 3. del 1.
[b] 1. defin. del 6.
[c] 10. d efin. del 11.
[d] 9. de fin. d el 11.
[e] 1. defin. del 6.
[f] 11. del 5.
[g] 16. del 5.
[h] 1. del 6.

mo &b, e la proportione di &C à CO, [k] è come il parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd, ſarà il parallelogrammo B& al parallelogrammo &b [l] come il medeſimo parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd; e perciò i parallelogrammi B&,&b,Cd, ſono continui proportionali. E perche il parallelepipedo BD al parallelepipedo CY, [m] è come la baſe B& alla baſe CZ, ed il parallelepipedo CY al parallelepipedo OX, è come la baſe &b alla baſe Cd; eſſendo le baſi B&,&b,Cd, continue proportionali, ſaranno i parallelepipedi BD, CY, OX, [n] continui proportionali. Di nuouo per la ſimilitudine de i parallelepipedi BD, FH, i parallelogrammi CD, GH, ouero FE, ſono ſimili; [o] e ſarà VC à C& [p] come ME ad EK, cioè come PC à CO; e permutando, ſarà VC à CP [q] come &C à CO; ma &C à CO [r] è come il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, e la proportione di VC, à CP è come il parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ, ſarà il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, [t] come il medeſimo parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ. Per la qual coſa i parallelogrammi DC, CS, CQ, ſono continui proportionali: ma i parallelepipedi CY, OX, CR, [u] ſono come le baſi DC, CS, CQ, ſtante che hanno la medeſima altezza; eſſendo le baſi CD, CS, CQ, continue proportionali, ſaranno i parallelepipedi CY, OX, CR continui proportionali; e tutti quattro i parallelepipedi BD, CY, OX, CR ſono cõtinui proportionali; ed haueremo quattro quantità, cioè la prima BD, la ſeconda CY, la terza OX, e la quarta CR, continue proportionali, e per il Lemma 8. dopo la 18. propoſitionè del 6. la prima BD alla quarta CR hà triplicata proportione di quella, che hà la prima BD alla ſeconda CY: ma BD à CY è come la baſe B& alla baſe CZ, cioè come BC à Cb; hauerà BD à CR triplicata proportione, che BC à Cb. ma Cb è fatta vguale ad FG, ed il parallelepipedo CR è dimoſtrato vguale al parallelepipedo FH; hauerà il parallelepipedo BD al parallelepipedo FH triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo BC al lato homologo FG; ch'era da dimoſtrarſi.

[k] 1. del 6.
[l] 11. del 5.
[m] 32. del 11.
[n] 11. del 5.
[o] 9. de fin. del 11.
[p] 1. defin. del 6.
[q] 16. del 5.
[r] 1. del 6.
[t] 11. del 5.
[u] 32. del 11.

SCOLIO.

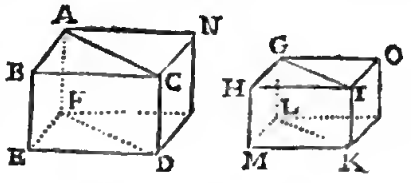
I ſimili priſmi di baſi triangolari ſono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.



Siano i ſimili priſmi AED, GMK le di cui baſi ſiano i triangoli FED LMK. Dico che il priſma AED al ſimile priſma GMK, hà triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK. Co i lati AB, BC, ſi faccia il parallelogrammo BN, e ſi compiſca il parallelepipedo EN. Similmente ſi compiſca il parallelepipedo MO perche i priſmi AED, GMK, ſono ſimili, ſarà il piano EC [a] ſimile al piano MI, ed il piano EA ſimile al piano MG; e parimente il triangolo ABC ſarà ſimile al trian-

[a] 9. defin. del 11.

golo GHI; dal che l'angolo ABC è vguale all'angolo GHI; e la proportione di AB à BC ſarà come quella di GH ad HI; per la qual coſa i parallelogrammi BN, HO, ſono frà loro ſimili. Hor eſſendo i piani EC, EA, BN, ſimili à i piani MI, MG, HO; e gli oppoſti ſono ſimili, ed vguali;

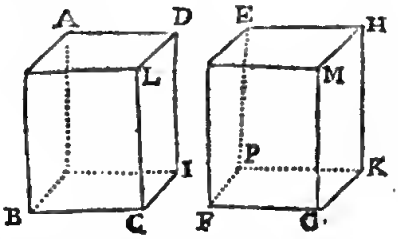


b 9. defin. del 11. *ſarà il parallelepipedo EN* b *ſimile al parallelepipedo MO; e per l'antecedente propoſitione, il parallelepipedo EN al parallelepipedo MO hauerà triplicata proportione, che*

c 15. del 5. *il lato homologo ED al lato homologo MK: ma i parallelepipedi EN, MO,* c *ſono come le loro metà, cioè come i priſmi AED, GMK; hauerà il priſma AED al priſma GMK triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK, ch'era da dimoſtrarſi.*

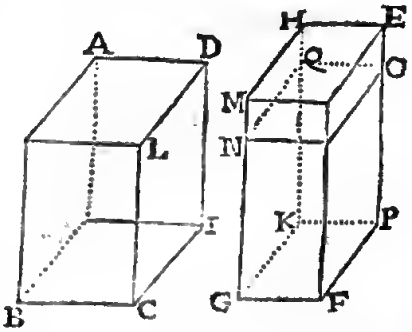
THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIV.

Gli vguali parallelepipedi hanno le baſi reciproche all' altezze; e quei parallelepipedi, che hanno le baſi reciproche all'altezze, ſono frà di loro vguali.



Siano prima i parallelepipedi ABCD, EFGH frà di loro vguali, le di cui baſi ſiano BI, FK. Dico che la baſe BI alla baſe FK, è come l'altezza del ſolido FH all'altezza del ſolido BD. Suppoſto prima, che i lati CL, GM, ſiano perpendicolari alle baſi BI, FK; ſaranno i lati CL, MG, le altezze de i ſolidi BD, FH. Hor ſe l'altezze CL, GM, ſono vguali, ſaranno i parallelepipedi BD, FH,

a 31. del 11. a come le baſi: ma i parallelepipedi BD, FH, ſono ſuppoſti vguali, perciò le baſi BI, FK ſaranno frà di loro vguali; e ſarà la baſe BI alla baſe FK, come l'altezza GM all'altezza CL.



Se l'altezze GM, CL, non ſono frà di loro vguali, vna delle due ſarà maggiore; ſuppoſto che l'altezza GM ſia maggiore di CL. Si faccia GN b vguale à CL, e dal punto N ſi faccia paſſare il piano NO c parallelo alla baſe GP. Perche i parallelepipedi ABCD, NGFO, hanno vguali altezze, perciò ſono d come le baſi BI, GP; e perche il piano NO è parallelo al

b 3. del 1.

c Scol. alla 15. del 1.

d 32. del 11.

piano

piano GP, ſarà il parallelepipedo GE al parallelepipedo GO, [e] come il piano GH al piano GQ, cioè [f] come GM à GN. In oltre, perche i ſolidi parallelepipedi BD, GE, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali, preſo il ſolido GO come terza quantità, ſarà il ſolido BD al ſolido GO, [g] come il ſolido GE al medeſimo ſolido GO: ma il ſolido GE al ſolido GO è come GM à GN, ſarà il ſolido BD al ſolido GO, [h] come GN ad NG: ſi diſſe, che il ſolido BD al ſolido GO è come la baſe BI alla baſe GP; ſara la baſe BI alla baſe GP, [i] come l'altezza MG all'altezza NG: ma NG è fatta vguale ad LC, ſarà la baſe BI alla baſe GP, come l'altezza MG all'altezza CL, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

e 25. del 11.
f 1. del 6.
g 7. del 5.
h 11. del 5.
i 11. del 5.

Di nuouo, ſuppoſto che le baſi ſiano reciproche all'altezze, cioè che la baſe BI alla baſe GP ſia come l'altezza GM all'altezza CL. Dico che i ſolidi parallelepipedi DB, GE ſono frà di loro vguali. Se le altezze CL, GM ſono frà di loro vguali, eſſendo la baſe BI alla baſe GP come l'altezza GM all'altezza CL, e l'altezza GM è poſta vguale all'altezza CL; ſarà la baſe BI vguale alla baſe FK, ed il parallelepipedo BD [m] vguale al parallelepipedo FH, ch'era da dimoſtrarſi.

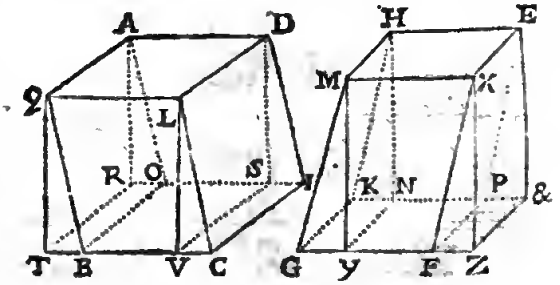
m 31. del 11.

Se l'altezze non ſono vguali, ſia l'altezza GM maggiore dell'altezza CL; ſi faccia, come prima, CN [n] vguale à CL, e dal punto N ſi faccia paſſare il piano NO, [o] parallelo alla baſe GP; ſarà il ſolido GE al ſolido GO, [p] come GM à GN; ed i parallelepipedi BD, GO, hauendo vguali altezze, [q] ſaranno come le baſi BI, GP. Perche, per ipoteſi, la baſe BI alla baſe GP è come l'altezza MG all'altezza LC, ouero NG, e la proportione di MG ad NG è come il ſolido GE al ſolido GO; ſarà la baſe BI alla baſe GP [r] come il ſolido GE al ſolido GO: ma il ſolido BD al ſolido GO è come la baſe BI alla baſe GP; ſarà il ſolido BD al ſolido GO, [t] come il ſolido GE al medeſimo ſolido GO; e perciò [u] i parallelepipedi BD, GE, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

n 3. del 6.
o Scol. alla 15. del 11.
p 25. del 11.
q 32. del 11.
r 11. del 5.
t 11. del 5.
u 9. del 5.

Siano di nuouo i parallelepipedi ABCD, EFGH, le di cui baſi ſiano OB CI, KGFP, ed i lati eleuati alle baſi, cioè CL, GM, non ſiano perpendicolari alle dette baſi. Da i punti A, D, L, Q al piano della baſe OBCI [x] ſi facciano cadere le perpendicolari AR, QT, DS, LV, e da i punti H, M, X, E, ſi facciano cadere le rette MY, HN, E&, XZ, perpendicolari al piano della baſe KGFP; le perpendicolari LV, MY &c. ſaranno le altezze de i propoſti parallelepipedi ABCD, EFGH. Nel ſolido ATVD, ſi tirino le rette TV, RS, TR, VS, e nel ſolido HYZE ſi tirino le rette YZ, Z&, &N, NY, e ſaranno deſcritti i parallelepipedi ATVD, HYZE, le di cui baſi ſono TV SR, NYZ&. Nel parallelepipedo ABCD la baſe OBCI [y] è vguale all'oppoſto parallelogrammo QD; e

x 11. del 11.

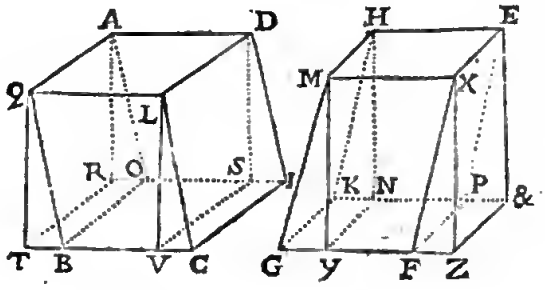


y 24. del 11.

nel

nel parallelepipedo ATVD la baſe RTVS è vguale al medeſimo parallelogrammo oppoſto QD, e perciò le baſi RTVS, OBCI, ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le baſi KGFP, NYZ&, ſono frà di loro vguali. In oltre, perche i parallelepipedi ABCD, ATVD, hanno la medeſima baſe QD, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, perciò ſono frà di loro vguali; per ſimile ragione i parallelepipedi EFGH, EZYH, ſono frà di loro vguali. Se dunque ſupponiamo il parallelepipedo ABCD vguale al parallelepipedo EFGH, ſarà il parallelepipedo ATVD vguale al parallelepipedo HYZE. E perche i lati LV, MY, ſono perpendicolari alle baſi, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, la baſe RTVS alla baſe KGFP, ſarà come l'altezza MY all'altezza LV: ma la baſe RTVS è dimoſtrata vguale alla baſe OBCI; e la baſe KGFP fù dimoſtrata vguale alla baſe NYZ&, ſarà la baſe OBCI alla baſe KGFP, come l'altezza MY all'altezza LV, e perciò le baſi ſono reciptoche all'altezze, ch'era da dimoſtrarſi.

29. & 30. del 11.



Se poi la baſe OBCI alla baſe KGFP è come l'altezza MY all'altezza LV. Dico che i parallelepipedi ABCD, EFGH, ſono frà di loro vguali. Perche la baſe OBCI alla baſe KGFP, è come l'altezza MY all'altezza LV; e la baſe OBCI è dimoſtrata vguale alla baſe RTVS; come ancora la baſe KGFP è dimoſtrata vguale alla baſe NYZ&; ſarà la baſe RTVS alla baſe NYZ&, come l'altezza MY all'altezza LV; e per quel che ſopra ſi è dimoſtrato, i parallelepipedi ATVD, HYZE, ſono frà di loro vguali: ma il parallelepipedo ATVD fù dimoſtrato vguale al parallelepipedo ABCD; ed il parallepipedo HYZE fù dimoſtrato vguale al patallelepipedo EFGH; i parallelepipedi ABCD, EFGH ſaranno frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

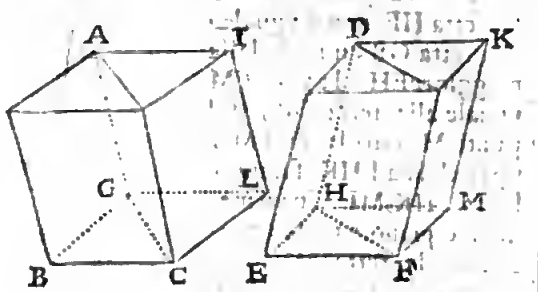
SCOLIO.

Se i priſmi di baſi triangolari ſono frà loro vguali, hanno le baſi reciproche all'altezze; e ſe le baſi ſono reciproche all'altezze, i priſmi ſono frà di loro vguali.

Siano i priſmi ABC, DEF, le di cui baſi ſiano i triangoli BGC, EHF, e ſiano prima i priſmi frà di loro vguali. Dico che la baſe BGC alla baſe EHF è come l'altezza del priſma DEF all' altezza del priſma ABC. Si compiſcano i parallelepipedi BI, EK. Perche i priſmi ABC, DEF, ſono frà

loro

loro vguali, i loro dupli, cioè i parallelepipedi BI, EK, [a] sono frà loro vguali; e sarà la base BL alla base EM, [b] come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI: ma la base BL alla base EM è come il triangolo BGC [c] al triangolo EHF, che sono loro metà; ed i parallelepipedi BI, EK, hanno le medesime altezze de i prismi; in conseguenza la base BGC alla base EHF sarà come l'altezza del prisma DEF all'altezza del prisma ABC.



a 28. del 11.
b 34. del 11.
c 34. del 1. & 15. del 5.

Di nuouo Dico che, se la base BGC alla base EHF è come l'altezza del prisma DEF all'altezza del prisma ABC, i prismi ABC, DEF, sono frà loro vguali. Perche i prismi ABC, DEF, hanno l'istessa altezza de i parallelepipedi BI, EK, ed il triangolo BGC al triangolo EHF [d] è come il doppio al doppio, cioè come il parallelogrammo BL al parallelogrammo EM; sarà il piano BL al piano EM, come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI; e per l'antecedente propositione, i parallelepipedi BI, EK, sono frà di loro vguali; e le loro metà, cioè i prismi ABC, DEF, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

d 34. del 1. & 15. del 5.

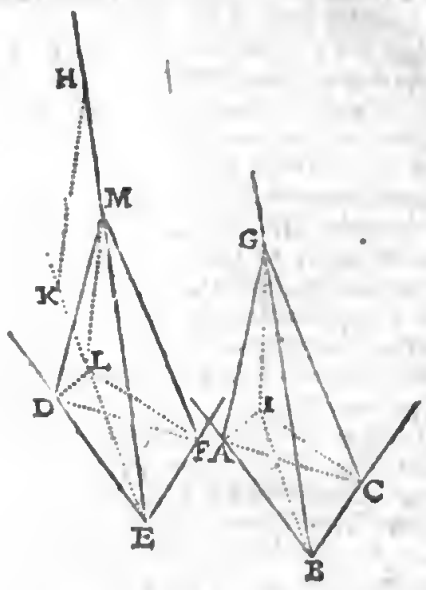
THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXV.

Se saranno due angoli piani, à i vertici de'quali siano inclinate due rette linee, che facciano i corrispondenti angoli, con quelle, che contengono i proposti angoli piani frà loro vguali; e da due qualunque punti, presi nelle rette inclinate, cadano due perpendicolari à i piani, doue sono gli angoli proposti; e da i punti, doue le perpendicolari cadono, ed i vertici de i proposti angoli, si tirino due rette linee; gli angoli contenuti da queste, e dall'inclinate, sono frà di loro vguali.

Siano gli angoli piani ABC, DEF, ed à i vertici E, & B, siano inclinate le rette BG, EH, in modo, che gli estremi H, & G, siano eleuati in alto; e sia l'angolo HED vguale all'angolo GBA, e l'angolo HEF sia vguale all'angolo GBC; e presi nelle rette EH, BG, due qualunque punti H, & G, da i quali si facciano cadere le rette HK, GI, [a] perpendicolari à i piani DEF, ABC; e da i punti L, ed I, à i punti E, & B, siano tirate le rette LE, IB.

a 11. del 11.

Dico,



Dico, che l'angolo HEL è vguale all'angolo GBI. Se la retta HE non è vguale alla retta GB, ſi tagli dalla
b 3. del 1. maggioreEH [b] la parteEM vguale alla retta GB; dal punto M ſi tiri la retta ML,
c 31. del 1. [c] parallela ad HK; ſaranno
d 34. defin. del 1. le rette HK,ML [d] in vn medeſimo piano,e perciò,continuata la retta ML concorrerà con EK in qualche punto L. Hor eſſendo ML parallela ad HK, e la retta HK è perpendicolare al piano DEF, farà la retta
e 8. del 11. ML [e] perpẽdicolare al medeſimo piano DEF: dal pũto L nel piano DEF ſi tirino le rette LD, LF, [f] ad
f 12. del 1. angoli retti con le rette ED, EF; e dal punto I nel piano ABC ſi tirino le rette IA, IC ad angoli retti colle rette AB,BC; e ſi tirino le rette MD,MF, GA, GC. Perche la retta ML è perpendicolare al piano DEF, gli angoli
g 3. defin. del 11. MLF,MLE,MLD [g] ſono retti. Similmente perche la retta GI è perpendicolare al piano ABC, gli angoli GIC,GIB,GIA, ſono retti. Nel triangolo rettangolo MLE il quadrato di ME
h 47. del 1. [h] è vguale à i quadrati de i due
K 47. del 1. lati ML,LE: ma il quadrato di LE [K] è vguale à i quadrati delle due ED, DL (ſtante che l'angolo EDL è retto) ſarà il quadrato di ME vguale à i quadrati delle tre ML, LD, DE: ma i quadrati delle due ML, LD, ſono vguali al quadrato di MD; ſarà il quadrato di ME vguale à i quadrati de
l 48. del 1. i due lati MD, DE; per la qual coſa l'angolo MDE [l] ſarà retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo GAB è retto. Di nuouo perche il
m 47. del 1. quadrato di ME [m] è vguale à i quadrati de i due lati ML, LE, ed il quadrato di LE è vguale à i quadrati de i due lati LF,FE; ſarà il quadrato di ME vguale à i quadrati delle tre ML, LF, FE: E perche i quadrati delle
n 47. del 1. due ML, LF, [n] ſono vguali al quadrato di MF, ſarà il quadrato di ME
o 48. del 1. vguale à i quadrati de i due lati MF, FE; dal che l'angolo MFE [o] ſarà retto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo GCB è retto. Si conſiderino i triangoli MEF,GBC. Perche l'angolo MEF, per ipoteſi, è vguale all'angolo GBC, e l'angolo MFE è vguale all'angolo GCB (ſtante che
p 32. del 1. gli habbiamo dimoſtrati retti) ſarà il rimanente angolo EMF [p] vguale al
q 4. del 1. reſtante angolo BGC; e ſarà ME ad EF [q] come GB à BC: ma ME è fatta
r 14. del 5. r 4. del 6. vguale alla retta GB, in conſeguenza EF [r] ſarà vguale à BC. Similmente ſarà EM ad MF [r] come BG à GC; ma EM è vguale à BG, ſarà ancora MF
u 14. del 5. [u] vguale a GC. In oltre ſi conſiderino i due triangoli MDE, GAB, de i

quali

quali gli angoli MED,GBA, per ipoteſi, ſono frà di loro vguali; gli angoli MDE,GAB, ſono vguali, perche ſono retti; ſaranno i rimanenti angoli DME, AGB [x] frà di loro vguali; e la proportione di ME ad ED [y] ſarà come quella di GB à BA; fù fatta ME vguale alla retta GB, ſarà dunque DE [z] vguale ad AB. Parimente EM ad MD [a] è come BG à GA; ma EM è vguale à GB, [b] ſarà MD vguale ad AG. Si conſiderino i due triangoli DEF, ABC. Perche i due lati DE, EF, ſono ſtati dimoſtrati vguali a i due lati AB, BC, e l'angolo DEF, per ipoteſi, è vguale all'angolo ABC; ſarà la baſe DF [c] vguale alla baſe AC; l'angolo EDF ſarà vguale all'angolo BAC; e l'angolo EFD vguale all'angolo BCA. Da gli angoli retti EDL,BAI, ſe ne leuino gli vguali angoli EDF,BAC, reſtano gli angoli LDF, IAC, frà di loro vguali. Similmente da gli angoli retti LFE, ICB, ſe ne leuino gli vguali angoli EFD,BCA, reſta l'angolo LFD vguale all'angolo ICA. Ne i triangoli LDF,IAC, il lato DF è dimoſtrato vguale al lato AC, gli angoli LDF,LFD, ſono vguali à i due angoli IAC, ICA; ſarà il lato LD [d] vguale al lato IA; e ſarà LF vguale ad IC. Ne i triangoli LDE,IAB, perche i due lati LD,DE, ſono vguali à i due lati IA, AB; e gli angoli LDE, IAB, ſono frà loro vguali, ſtante che ſono retti; ſarà la baſe LE [e] vguale alla baſe IB. Oltre a ciò ne i triangoli MLD, GIA, perche gli angoli MLD,GIA, ſono retti, ſarà il quadrato di MD [f] vguale à i quadrati de i due lati ML, LD; ed il quadrato di GA, ſarà vguale à i quadrati di GI,IA: ma il quadrato di MD è vguale al quadrato di GA, ſtante che le rette MD, GA, le habbiamo dimoſtrate vguali; perciò i quadrati delle due ML,LD, ſaranno vguali à i quadrati de i due lati GI, IA; leuatone i quadrati delle vguali DL,IA, reſta il quadrato di ML vguale al quadrato di GI; e la retta ML ſarà vguale alla retta GI. Finalmente ſi conſiderino i due triangoli MLE, GIB, de' quali il lato ME, per coſtruttione, è vguale al lato GB, il lato LE è dimoſtrato vguale al lato IB, ſaranno i due lati ME, EL, vguali à i due lati GB, BI; la baſe ML è dimoſtrata vguale alla baſe GI, ſarà l'angolo MEL [g] vguale all'angolo GBI, come fù propoſto dimoſtrare.

x 31. del 2. y 4. del 6.
z 14. del 5.
a 4. del 6.
b 14. del 5.
c 4 del 1.
d 26. del 1.
e 4. del 1.
f 47. del 1.
g 8. del 1.

COROLLARIO.

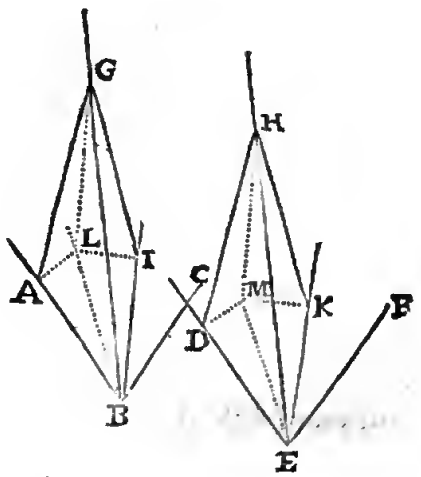
Sarà dunque manifeſto, che ſe ne i vertici di due vguali angoli piani ABC,DEF, ſaranno inclinate à quel piano due rette linee, come EM, BG, che facciano i corriſpondenti angoli con le rette, che contengono l'angolo piano, frà di loro vguali; cioè, che l'angolo MEF ſia vguale all'angolo GBC; e l'angolo MED vguale all'angolo GBA; e ſiano fatte le rette EM, BG, frà di loro vguali; le rette ML, GI, che cadono perpendicolari à i piani DEF,ABC, ſono frà di loro vguali.

SCOLIO.

Aggiungo quì il ſeguente Theorema molto neceſſario alle coſe da dimoſtrarſi.

Se l'angolo piano ABC è vguale all'angolo piano DEF, & à i vertici B, ed E, ſiano inclinate le rette GB, HE, in modo, che l'angolo GBC ſia vguale all'angolo HEF, e l'angolo GBA ſia vguale all'angolo HED; e da i punti B, ed E, ne i piani ABC, DEF, ſiano tirate le rette BI, EK, in modo, che l'angolo IBC ſia vguale all'angolo KEF. Dico, che l'angolo GBI è vguale all'angolo HEK.

a 3. del 1. b 11. del 11. *Nelle rette eleuate BG, EH ſi prendano due parti vguali,* a *come BG, EH, e da i punti G, ed H* b *ſi facciano cadere rette linee perpendicolari à i piani ABC, DEF: Se quelle cadono nelle rette BI, EK, come fanno le rette GI, HK, per l'antecedente propoſitione, gli angoli GBI, HEK, ſono frà di loro vguali. Se poi le perpendicolari cadono fuori delle rette BI, EK, come fanno le rette GL, HM; ſi tirino le rette LB, ME; ſarà, per l'antecedente propoſit. l'angolo GBL vguale all'angolo HEM. Da i punti L, ed M, ſi tirino le rette* c *LI, LA, MK, MD, ad angoli retti colle rette BI, BA, EK, ED; e ſi tirino le rette GI, GA, HK, HD. Eſtēdo le rette GL, HM, perpendicolari à i piani ABC, DEF, gli angoli GLB, GLI, GLA, HME, HMK, HMD,* d *ſono retti. Si conſiderino i triangoli rettangoli GLB, HME. Perche gli angoli GBL, HEM, ſono frà di loro vguali, e gli angoli GLB, HME, ſono retti; ſarà il rimanente angolo BGL* e *vguale al rimanente angolo EHM; dal che i triangoli GLB, HME, ſono equiāgoli; e la proportione di GB à BL* f *ſarà come quella di HE ad EM: ma GB è vguale ad HE, ſarà BL* g *vguale ad EM. Similmente BG à GL* h *ſarà come EH ad HM; ma GB è vguale ad EH,* K *ſarà GL vguale ad MH. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che ED è vguale ad AB, e che DH è vguale ad AG, e ſi conſiderino i due triangoli GLA, HMD. Perche gli angoli GLA, HMD, ſono retti, ſarà il quadrato di GA* l *vguale à i quadrati*



c 12. del 1. d 3. definit. del 1. e 32. del 1. f 4. del 6. g 14. del 5. h 4. del 6. K 14. del 5. l 47. del 1.

drati de i lati GL, LA; ed il quadrato di HD è vguale à i quadrati de i lati HM, MD: ma il quadrato di GA è vguale al quadrato di HD (ſtante che GA è dimoſtrata vguale ad HD) i quadrati de i due lati GL, LA, ſaranno vguali à i quadrati de i due lati HM, MD: ſe ne leuino i quadrati delle vguali GL, HM, reſta il quadrato di LA vguale al quadrato di DM, ed il lato AL ſarà vguale ad MD. Ne i triangoli ABL, DEM, i due lati AB, BL, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i due lati DE, EM, la baſe AL è vguale alla baſe MD, ſarà l'angolo ABL m *vguale all'angolo DEM. In oltre, eſſendo, per ipoteſi, l'angolo DEF vguale all'angolo ABC, e l'angolo FEK vguale all'angolo CBI, ſarà il rimanente angolo KED* n *vguale al rimanente angolo IBA; da i quali ſe ne leuino gli vguali angoli ABL, DEM, reſta l'angolo LBI vguale all'angolo MEK. Ne i triangoli MEK, LBI, gli angoli LIB, MKE, per coſtruttione, ſono retti; gli angoli LBI, MEK, ſono ſtati dimoſtrati vguali, i rimanenti angoli BLI, EMK,* o *ſono frà di loro vguali, ed i triangoli LBI, MEK, ſono equiangoli; e ſarà LB à BI,* p *come ME ad EK: ma LB è dimoſtrata vguale ad ME, ſarà BI* q *vguale ad EK. Similmente BL ad LI* r *ſarà come EM ad MK, il lato BL è vguale ad EM, ſarà LI* s *vguale ad MK. Si conſiderino i triangoli GLI, HMK, de' quali i due lati GL, LI, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i due lati HM, MK, l'angolo GLI è vguale all'angolo HMK, ſtante che ſono retti, ſarà la baſe GI* t *vguale alla baſe HK. Finalmente, perche i due lati GB, BI, del triangolo GBI, ſono vguali à i due lati HE, EK, del triangolo HEK; la baſe GI è dimoſtrata vguale alla baſe HK, ſarà l'angolo GBI* u *vguale all'angolo HEK, ch'era da dimoſtrarſi.* x

m 8. del 1.
n 32. del 1.
o 32. del 1.
p 4. del 6.
q 14. del 5.
r 4. del 6.
s 14. del 5.
t 4. del 1.
u 8. del 1.
x

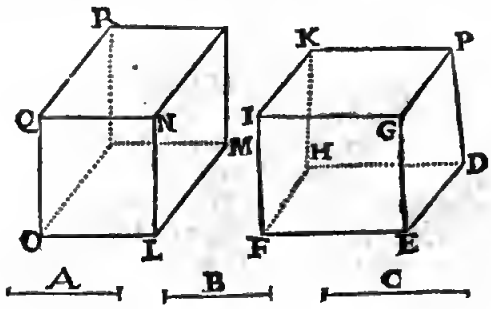
THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVI.

come A, B, C,

Se tre linee rette ſono proportionali, il ſolido parallelepipedo contenuto da quelle tre rette linee è vguale al parallelepipedo equilatero, che ſi deſcriue ſopra la media, equiangolo all'altro.

Si coſtituiſca l'angolo ſolido E, con tre angoli piani, preſi ad arbitrio, come ſono i tre angoli DEF, DEG, FEG. Si faccia poi ED a vguale ad A; ſi faccia EG vguale alla media B; e ſi faccia EF vguale à C; ſi compiſca il parallelepipedo IEDK, il quale ſarà contenuto dalle tre rette ED, EF, EG, vguali alle tre rette A, B, C. Di nuouo ſi eſponga la retta LM; e nel punto L ſi coſtituiſca l'angolo ſolido L, b vguale all'angolo ſolido E, cioè, che l'angolo piano MLO ſia vguale all'angolo DEF, l'angolo MLN ſia vguale all'angolo DEG, e l'angolo GEF vguale all'angolo

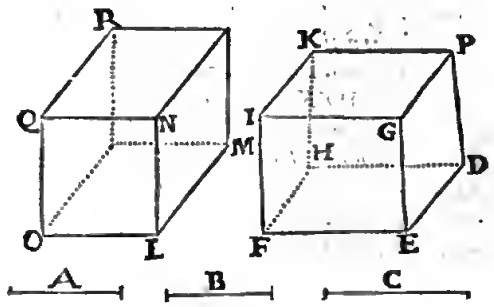
a 3. del 1.



b 23. del 11.

c 3. del 1. NLO. Si faccia ogn'vna delle rette LM, LN, LO, c vguale alla media B, e ſi compiſca il parallelepipedo QLMR; il quale ſarà equilatero, ſtante che tutti i lati de i parallelogrammi, che lo contengono, ſono vguali frà loro; e ſarà equiangolo, per coſtruttione, al parallelepipedo IEDK. Dico che i parallelepipedi QLMR, IEDK, ſono frà di loro vguali. Perche la proportione di A à B è come quella di B à C, eſſendo le tre A, B, C, vguali alle tre DE, ML, EF, ſarà DE ad ML come ML, ouero LO ad EF: ma, per coſtruttione, l'angolo FED è vguale all'angolo OLM, i parallelogrammi dunque OM, FD, hanno intorno à gli angoli vguali i lati reciprochi, e perciò ſono d frà di loro vguali. Si conſiderino gli vguali angoli piani OLM, FED, à i vertici de'quali, cioè à i punti L, ed E, ſono eleuate le rette vguali NL, GE, e l'angolo GED è vguale all'angolo NLM; come ancora l'angolo GEF è vguale all'angolo NLO; e per il corollario antecedente, le rette, che da i punti N, & G, cadono perpendicolari à i piani OLM, FED, ſono frà di loro vguali; per la qual coſa l'altezze de i parallelepipedi QLMR, IEDK, ſono frà di loro vguali: furono dimoſtrate le baſi OM, FD, frà di loro vguali; i parallelepipedi dunque QLMR, IEDK, e ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

d 14. del 6.



e 31. del 11.

SCOLIO.

La conuuerſa dell'antecedente propoſitione ſi dimoſtra facilmente nel ſeguente modo

Se il parallelepipedo contenuto da tre rette linee è vguale, ed equiangolo al parallelepipedo equilatero, deſcritto ſopra la linea intermedia, quelle tre rette linee ſono proportionali.

Sia il parallelepipedo IEDK contenuto dalle tre rette A, B, C, il quale ſia equiangolo, ed vguale al parallelepipedo equilatero QLMR, deſcritto ſopra la media B. Dico, che le tre rette A, B, C, ſono proportionali. S'intenda fatta la coſtruttione dell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che i parallelepipedi QLMR, IEDK, hanno vguali altezze, dal che il ſolido LR al

a 32. del 11. *ſolido KE a ſarà come la baſe OM alla baſe FD: ma i ſolidi RL, KE ſi ſuppon-*

b 14. del 5. *gono vguali, perciò le baſi OM, FD, b ſono frà di loro vguali. E perche l'angolo OLM è vguale, per ipoteſi, all'angolo FED, perciò i parallelogrammi OM,*

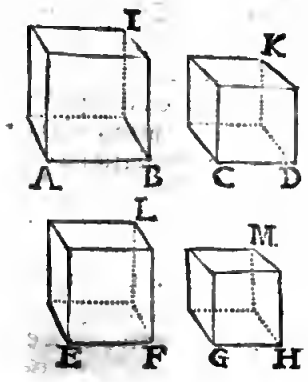
FD,

FD, c haueranno intorno à gli angoli vguali i lati reciprochi; e farà FE ad LM, come OL ad ED. Ma OL, per ipoteſi, è vguale ad LM, farà EF ad LM, come la medeſima LM ad ED, cioè farà la retta C alla retta B, come la medeſima B ad A, ch'era da dimoſtrarſi.

c 14. del 6.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se quattro linee rette ſono proportionali, i parallelepipedi ſimili, e ſimilmente deſcritti ſopra di eſſe, ſono proportionali: e ſe i parallelepipedi ſimili, e ſimilmente poſti, ſono proportionali, i loro lati homologhi ſono proportionali.



Habbia prima AB à CD la medeſima proportione, che hà EF, à GH, ed i parallelepipedi AI, CK, deſcritti ſopra le due AB, CD, ſiano ſimili, è ſimilmente poſti, cioè che le due AB, CD, ſiano loro lati homologhi; e ſopra le due EF, GH, ſiano deſcritti i parallelepipedi EL, GM, ſimili, e ſimilmenre poſti. Dico che il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK, è come il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM. Perche i ſolidi parallelepipedi AI, CK, ſono ſimili, hauerà il ſolido AI al ſolido CK triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo AB al laro homologo CD: ma, per ipoteſi, AB à CD è come EF à GH, hauerà il ſolido AI al ſolido CK [b] triplicata proportione di quella, che hà EF à GH: ma il ſolido parallelepipedo EL al ſimile parallelepipedo GM [c] hà la medeſima triplicata proportione di quella, che hà EF, à GH; hauerà il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK l'iſteſſa proportione, che hà il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. Di nuouo, ſuppoſto che il parallelepipedo AI al ſimile parallelepipedo CK ſia come il parallelepipedo EL al ſimile parallelepipedo GM. Dico che AB à CD è come EF à GH. Perche i parallelepipedi AI, CK, ſi ſuppongono ſimili, e ſimilmente poſti, hauerà il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK [d] triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo AB al lato homologo CD: ma, per ipoteſi, il ſolido AI al ſolido CK è come il ſolido EL al ſolido GM, hauerà il ſolido EL al ſolido GM [e] triplicata proportione di quella, che hà AB à CD. E perche il parallelepipedo EL al ſimile parallelepipedo GM [f] hà triplicata proportione di quella, che hà EF à GH; hauerà AB à CD l'iſteſſa proportione, che hà EF à GH, ch'era da dimoſtrarſi.

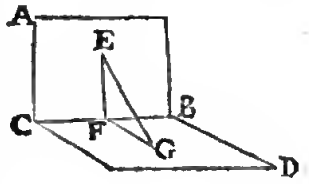
a 33. del 11.
b 11. del 5.
c 33. del 11.
d 33. del 11.
e 11. del 5.
f 33. del 11.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se vn piano è perpendicolare ad vn altro piano, e da qualche punto preſo in vno di quei piani ſi faccia cadere vna retta perpendicolare all'altro piano, quella caderà nella loro commune ſettione.

Sia il piano AB, perpendicolare al piano CD, e la loro commune ſettione ſia la retta CB; e preſo nel piano AB qualunque punto E, dal quale ſi faccia cadere vna retta perpendicolare al piano CD. Dico che quella cade nella commune ſettione CB. Se non cade nella commune ſettione CB, cada fuori, ſe è poſſibile, e ſia quella la retta EG; dal punto G ſi tiri la retta GF [a] perpendicolare alla retta CB, e ſi tiri la retta EF. Perche i piani CD, AB, ſi congiungono ad angoli retti, e la retta GF, ch'è nel piano CD, fà angoli retti colla commune ſettione CB; per la definitione 4. di queſto, la retta GF ſarà perpendicolare al piano AB, e perciò l'angolo GFE [b] ſarà retto. Similmente perche la retta EG è perpendicolare al piano CD, l'angolo EGF [c] ſarà retto; per la qual coſa, nel triangolo EGF, gli angoli EGF, EFG, non ſono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propoſitione del primo. Non dunque la perpendicolare cade fuori della commune ſettione CB, ma cade in eſſa commune ſettione CB, come fà la retta EF, ch'era da dimoſtrarſi.



a 12. del 1.

b 3. defin. del 11.

c 3. defin. del 11.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

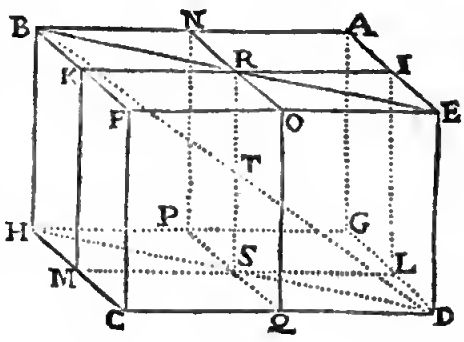
Se i lati di due piani oppoſti d'vn parallelepipedo ſono diuiſi in due parti vguali, la commune ſettione de i piani, che paſſano per le oppoſte diuiſioni, e la diagonale d'eſſo parallelepipedo, ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, la di cui diagonale ſia BD, ed i lati de i due piani oppoſti BE, HD, ſiano diuiſi in due parti vguali ne i punti O, I, N, K, Q, L, P, M; e per le oppoſte diuiſioni paſſino i piani KMLI, NPQO, i quali ſi ſeghino ſcambieuolmente, e la commune ſettione ſia la retta RS. Dico che la retta RS, e la diagonale BD, ſi ſegaranno ſcambieuolmente in due parti vguali. Si tirino le rette RB, RE, SD, SH. Perche DL è vguale, e paparallela ad MC, ſarà CD [a] vguale, e parallela ad ML. Similmente perche CQ è vguale, e parallela ad HP, ſa-

a 33. del 1.

rà

rà PQ [b] vguale, e parallela ad HC, e ſarà ancora [c] parallela à GD; dal che i quadrilateri QM, QL, [d] ſono parallelogrammi, e ſarà CQ [e] vguale ad MS, e la retta QD vguale ad SL: ma CQ, per ipoteſi, è vguale à QD, ſarà MS vguale ad SL. E perche la retta LD, per ipoteſi, è vguale ad MH, i due lati DL, LS, del triangolo DLS, ſaranno vguali à i due lati HM, MS, del triangolo HMS; l'angolo DLS [f] è vguale all'angolo HMS (ſtante che DG è parallela ad HC) ſarà la baſe DS [g] vguale alla baſe HS, e l'angolo LSD vguale all'angolo MSH; vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo MSD, i due angoli HSM, MSD, ſaranno vguali à i due angoli MSD, DSL: ma i due angoli MSD, DSL, [h] ſono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque HSM, MSD, ſono vguali à due angoli retti; e perciò le rette HS, SD, [K] coſtituiſcono vna ſola retta linea. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che la retta BR è vguale alla retta RE, e che le due BR, RE coſtituiſcono vna ſola retta linea. In oltre perche i lati ED, BH, ſono vguali, e paralleli al lato FC, i due BH, ED, ſaranno frà di loro vguali, e paralleli: per la qual coſa le rette BE, HD, [m] che congiungono gli eſtremi, ſono frà di loro vguali, e parallele, e le loro metà BR, SD, ſono frà di loro vguali, e parallele. E perche le parallele BE, HD, ſono ſegate dalle rette BD, RS, [n] perciò ſono in vn medeſimo piano; ed in cõſeguenza le rette BD, RS, ſi ſegano ſcambieuolmẽte in qualche punto T. Di più, eſſendo le rette BE, HD, parallele, e ſono ſegate dalla retta BD, gli angoli alterni TDS, TBR, [o] ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i triangoli TRB, TSD. Perche l'angolo TDS è vguale all'angolo TBR, e gli angoli al vertice STD, RTB, [p] ſono frà di loro vguali, i due angoli STD, SDT, ſaranno vguali à i due angoli RTB, RBT; il lato SD è dimoſtrato vguale al lato RB; i due rimanenti lati ST, TD, [q] ſaranno vguali à i reſtanti due lati RT, TB; cioè ST ſarà vguale ad RT, e la retta DT ſarà vguale à TB, ch'era da dimoſtrarſi.



b 33. del 11.
c 30. del 1.
d 35. defin. del 1.
e 34. del 1.
f 29. del 1.
g 4. del 1.
h 13. del 1.
K 14. del 1.
l 9. del 11.
m 33. del 1.
n 7. del 11.
o 29. del 1.
p 15. del 1.
q 26. del 1.

COROLLARIO.

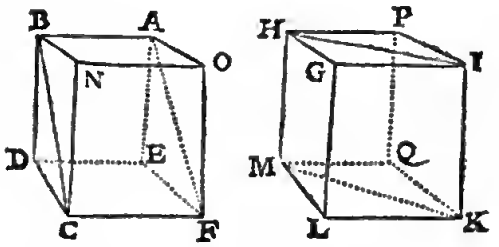
Appare da quel che ſi è detto, che tutte le diagonali d'vn parallelepipedo ſi ſegano ſcambieuolmente in due parti vguali in vn ſol punto; Come per eſſempio nel punto T, doue tutti ſono ſegati dalla commune ſettione RS in due parti vguali.

THEO-

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XXXX.

Se due prismi hanno vguali altezze, e di essi vno habbia per base vn parallelogrammo, e l'altro vn triangolo, ed il parallelogrammo sia il doppio del triangolo; quei due prismi saranno frà di loro vguali.

Siano i due prismi vgualmente alti ABCDEF, GHIKLM, il primo de' quali habbia per base il parallelogrammo DCFE, e la base dell'altro sia il triangolo MLK; e sia il parallelogrammo DCFE il doppio del triangolo MLK. Dico che il prisma ABCDEF è vguale al prisma GHIKLM. Co'i due lati BD, DC, si compisca il parallelogrammo DN, ed haueremo i tre parallelogrammi DN, DF, DA. Si facciano gli opposti, in modo, che si compisca il parallelepipedo DO. Di nuouo co'i due lati ML, LK, si faccia il parallelogrammo LQ, e si compisca il parallelepipedo LP; haueranno i parallelepipedi CA, LP, le medesime altezze de' prismi, e perciò saranno vgualmente alti. Perche il parallelogrammo LQ [a] è il doppio del triangolo MLK, ed il parallelogrammo CE, per ipotesi, è il doppio del medesimo triangolo MLK; sarà il parallelogrammo LQ vguale al parallelogrammo CE: ma le altezze de i proposti parallelepipedi, per ipotesi, sono frà loro vguali; i parallelepipedi dunque CA, LP, che hanno le basi vguali, e l'altezze vguali, [b] sono frà di loro vguali. E perche il piano BCFA diuide il parallelepipedo AC [c] in due parti vguali; ed il piano HMKI diuide il parallelepipedo LP in due parti vguali; si come tutto il parallelepipedo AC è vguale à tutto il parallelepipedo LP, cosi la metà dell'vno, cioè il prisma ABCDEF, è vguale alla metà dell'altro, cioè al prisma GHIKLM, come fù proposto dimostrare.



a 34. del 1.

b 31. del 11.

c 28. del 11.

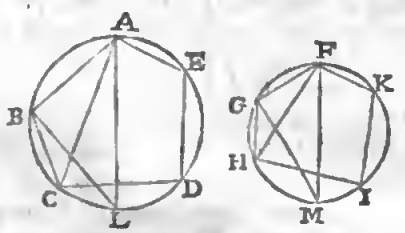
Fine del Vndecimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO DVODECIMO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I poligoni ſimili deſcritti ne i circoli, ſono frà di loro, come i quadrati de i diametri.

SIANO i poligoni ſimili ABCDE,FGHIK, deſcritti ne i circoli ABLD, FGMI, i di cui diametri ſiano AL,FM. Dico che il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM. Perche i poligoni ABCDE,FGHIK, per ipoteſi, ſono ſimili, perciò [a] ſaranno equiangoli, ed i lati intorno à gli angoli vguali ſono proportionali. Sia dunque l'angolo ABC vguale all'angolo FGH; ſi tirino le rette AC,FH. Eſſendo AB à BC, come FG à GH, i triangoli ABC,FGH [b] ſaranno equiangoli, e ſarà l'angolo ACB vguale all'angolo FHG. Si tirino le rette BL,GM. Gli angoli BCA,BLA, [c] che ſono nella medeſima portione BCDA, ſono frà di loro vguali; e ſimilmente gli angoli GHF, GMF, nella medeſima portione GMKF, ſono frà di loro vguali: ma gli angoli BCA,GHF, furono dimoſtrati vguali; gli angoli dunque BLA, GMF, ſaranno frà di loro vguali. E perche gli angoli LBA, MGF, ne i ſemicircoli ABL,FGM, [d] ſono frà di loro vguali, ſtante che ſono retti, ſaranno i due angoli ALB, ABL, del triangolo ALB, vguali à i due angoli FMG, FGM, del triangolo FMG; ed il rimanente angolo BAL [e] ſarà vguale al reſtante angolo GFM; dal che i triangoli ABL,FGM, ſono equiangoli; e ſarà AL ad AB [f] come FM ad FG; e permutando, AL ad FM [g] ſarà come BA ad FG. S'intendano ſopra i diametri AL,FM, deſcritti due quadrati. Perche i quadrati ſono poligoni ſimili, ed i poligoni ſimili



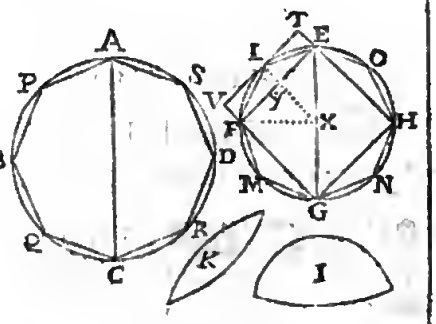
a 1. defin. del 6.
b 6. del 6.
c 21. del 3.
d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 5.

ABCDE,FGHIK ſono deſcritti ſopra i lati homologhi AB,FG, eſſendo AL ad FM, come AB ad FG, ſarà il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM, [h] come il poligono ABCDE al ſimile poligono FGHIK, ch'era da dimoſtrarſi.

h 22.del 6.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

I circoli hanno l'iſteſſa proportione, che i quadrati de i loro diametri.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, i di cui diametri ſiano le rette AC, EG. Dico che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD, al circolo EFGH; ouero, che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH. Se il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG non è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH, ſia, ſe è poſſibile, il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD ad vn altra quantità I, la quale ò ſia minore, ouero maggiore del circolo EFGH; e ſuppoſto prima che la quantità I ſia minore del circolo EFGH, per quanto è il piano K, ſaranno i due I, & K, inſieme giunti, vguali al circolo EFGH.

a 6.del 4.

S'iſcriua nel circolo EFGH [a] il quadrato EFGH, il quale per lo Scolio alla 9. propoſitione del 4. ſarà la metà del quadrato circoſcritto intorno al medeſimo circolo. Hor perche il quadrato circoſcritto è maggiore del circolo, la metà del quadrato circoſcritto ſarà maggiore della metà del circolo EFGH: ma il quadrato EFGH è la metà del quadrato circoſcritto; ſarà il quadrato EFGH maggiore della metà del circolo EFGH. Si diuidano gli archi FE,EH, HG, GF, [b] in due parti vguali ne i punti L,O,N,M, e ſi tirino le rette EL,LF,FM,MG,GN,NH,HO,OE; dal centro X al punto L ſi tiri la retta XL, la quale ſegarà la retta FE in qualche punto Y; e nel punto L ſi ponga la retta VLT, [c] che faccia angoli retti colla retta XL; toccarà la retta VT [d] il circolo nel punto L; ſi tiri la retta XF. Perche gli archi FL,LE, ſono fra di loro vguali, gli angoli LXF,LXE, [e] ſaranno frà di loro vguali. E perche i lati EX, XY, ſono vguali à i due lati FX,XY, e gli angoli FXY,EXY, ſono frà di loro vguali, ſarà FY [f] vguale ad EY, e perciò la retta XL [g] ſega la retta FE ad angoli retti in Y; per la qual coſa le rette VT,FE, [h] ſono frà di loro parallele; e continuata la retta VT, ſin che concorra co' i lati GF,HE, prolungati in T, ed V, ſarà il quadrilatero VFET [K] parallelogrammo; il quale [l] ſarà il doppio del triangolo LFE. E perche il parallelogrammo VFET è mag-

b 30. del 3.
c 11. del 1.
d Corol. alla 16. del 3.
e 27. del 3.
f 4. del 1.
g 3. del 3.
h 28. del 1.
K 35. defin. del 1.
l 41. del 1.

giore

giore della portione FLE, la metà del parallelogrammo VFET ſarà maggiore della metà della portione FLE: ma il triangolo FLE è la metà del parallelogrammo VFET, ſarà il triangolo LFE maggiore della metà della portione FLE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli altri triangoli OEH, NHG, MGF, ſono maggiori delle metà delle portioni EOH, HNG, GMF; e perciò tutti i detti triangoli, inſieme giunti, ſaranno maggiori di tutte le portioni giunte inſieme. Se di nuouo ſi diuidano gli archi EO, OH, HN &c. in due parti vguali, e ſi tirino le corde, che ſottendono quei piccioli archi, ſaranno in quelle picciole portioni deſcritti altri triangoli, i quali giũti inſieme, dimoſtraremo come prima ſi è fatto, che ſarãno maggiori delle metà delle portioni, giunte inſime, e cõ queſt'ordine ſi proceda nell'altre portioni, che reſtano fuori di queſti triangoli. Hor dal circolo EFGH ſe ne detragga il quadrato EFGH, ch'è maggiore della metà; e dalle portioni, che reſtano, ſe ne leuino i triangoli, che ſono maggiori della metà di eſſe portioni, e dall'altre portioni, che reſtano, ſe ne leuino gli altri triangoli, che ſono più della metà di eſſe portioni, e con queſt'ordine ſi proceda, fin che tutte le portioni vltime reſtate, giunte inſieme, [m] ſiano minori della quantità K; e ſuppoſto che il tutto ſia fatto, e le portioni reſtate ſiano le notate EO, OH, HN, NG, GM, MF, FL, LE, le quali, giunte inſieme, ſiano minori della quantità K. Perche le due K, ed I, giunte inſieme, ſono vguali al circolo EFGH, dalle due K, ed I, ſe ne leui la quantità K, e dal circolo ſe ne leuino le dette portioni EO, OH, HN, NG &c. che ſono minori di K, reſterà il poligono ELFMGNHO, maggiore della quantità I. S'iſcriua nel circolo ABCD il poligono APBQCRDS ſimile al poligono ELFMGNHO; il che ſi fà nell'iſteſſo modo, col quale ſi è iſcritto il poligono ELFMGNHO nel circolo EFGH; per l'anteceedente propoſitione, ſarà il poligono APQRS al ſimile poligono ELMNO, come il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG: ma il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per ipoteſi, è come il circolo ABCD alla quantità I, ſarà il poligono APQRS al poligono ELMNO, [n] come il circolo ABCD alla quantità I; e permutando, il poligono APQRS al circolo ABCD, [o] ſarà come il poligono ELMNO alla quantità I: ma il poligono APQRS è minore del circolo ABCD, ſarà il poligono ELMNO [p] minore della quantità I; fù dimoſtrato maggiore, ſarà il poligono ELMNO maggiore, è minore della quantità I, ch'è impoſſibile. Nõ dunque la quãtità I è minore del circolo EFGH; e perciò il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG nõ è come il circolo ABCD ad vna quãtità minore del circolo EFGH. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, non è come il circolo EFGH ad vna quantità minore del circolo ABCD.

Di nuouo, ſuppoſto che la quantità I ſia maggiore del circolo EFGH. Si concepiſca la quãtità I al circolo ABCD eſſere come il circolo EFGH ad vn altra quantità, che per eſempio ſia K; permutando, ſarà la quantità I al circolo EFGH, [q] come il circolo ABCD alla quantità K: ma la quantità I è poſta maggiore del circolo EFGH, ſarà il circolo ABCD [r] maggiore della quantità K; cioè la quantità K ſarà minore del circolo

m 1. del 10.

n 11. del 5.

o 6. del 5.

p 4. del 5.

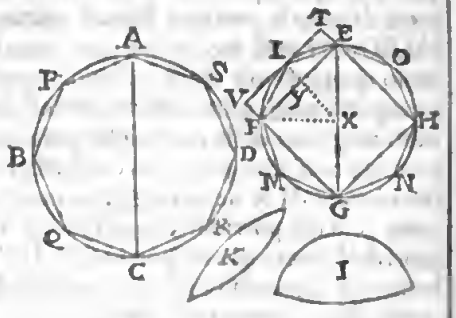
q 16. del 5.

r 14. del 5.

ABCD. Perche il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per coſtruttione, è come il circolo ABCD alla quantità I, inuertendo la quantità I al circolo ABCD [t] ſarà come il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC; ma la quantità I al circolo ABCD, per coſtruttione, è come il circolo EFGH alla quantità K, ſarà il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, [u] come il circolo EFGH alla quantità K, minore del circolo ABCD, ch'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato antecedentemente. Non dunque la quantità I è maggiore del circolo EFGH, ne meno, per quel che ſi è dimoſtrato, è minore, in conſeguenza la quantità I ſarà vguale al circolo EFGH. Hor eſſendo il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD alla quantità I, e la quantità I è vguale al circolo EFGH, ſarà il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD al circolo EFGH, ch'era da dimoſtrarſi.

t Coral. all. 4. del 5.

u 1. del 5.



COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che i circoli ſono frà di loro come i ſimili poligoni iſcritti in eſſi, ſtante che tanto i circoli, come i poligoni ſimili, deſcritti in eſſi, ſono come i quadrati de i diametri.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

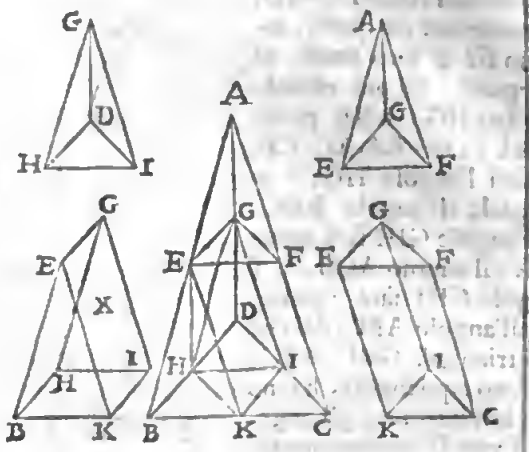
Ogni Piramide di baſe triangolare ſi diuide in due Piramidi di baſi triangolari, ſimili, ed vguali frà di loro, e ſimili à tutta la Piramide; & in due priſmi vguali, che giunti inſieme, ſono maggiori della metà della Piramide.

Sia la Piramide ABCD, la di cui baſe triangolare ſia DBC, ed il vertice A; ſi diuidano tutti i lati di eſſa Piramide [a] in due parti vguali ne i punti E,F,G,K,I,H, e ſi tirino le rette EF,FG,GE,KI,IH,HK,IG,HG,KE, HE, e ſarà diuiſa la Piramide ABCD, nelle due Piramidi AEFG,GHID, le di cui baſi ſono i triangoli EGF,HDI, ed i vertici A,& G; e ne i due ſolidi EGIKBH,FGEKCI, i quali, come dimoſtreremo, ſono priſmi, cioè il priſma EGIKBH hà le faccie oppoſte EBK,GHI triangolari, e la baſe HBKI è parallelogrammo, e l'altro priſma FGEKCI hà per baſe il trian-

a 10. del 1.

golo

golo IKC, al quale è opposto il triangolo EGF; e questi due prismi sono separati dal parallelogrammo EGIK, ch'è piano commune dell'vno, e l'altro. Dico che le due Piramidi AEFG,GHID, sono frà di loro simili, ed vguali, ed ogn'vna è simile à tutta la Piramide ABCD, e che i due prisma EGIKBH, FGEKCI, sono frà di loro vguali, e giunti insieme, sono maggiori della metà della Piramide ABCD. Perche i lati AD,AB, sono diuisi in due parti vguali in G, ed E, sarà la proportione di AG à GD come quella di AE ad EB; per la qual cosa la retta EG [b] sarà parallela al lato BD. Similmente essendo i lati AB, BD, diuisi in due parti vguali in E, & H, per la medesima ragione sarà EH parallela à GD. Parimente essendo i lati DA, DB, DC, diuisi in due parti vguali in G, H, ed I, per le cose dette, la retta HG è parallela ad AB, la retta GI è parallela ad AC, e la retta HI è parallela al lato BC. E finalmente, essendo i lati CD, DB, BC, diuisi in due parti vguali in H, K, ed I, la retta KI sarà parallela à BD, e la retta HK è parallela à DC; e perciò tanto il quadrilatero EHDG, quanto il quadrilatero EBHG, ed il quadrilatero GICF, come il quadrilatero HBKI, è parallelogrammo; e sarà GD [c] vguale ad EH, la retta EG vguale ad HD, EG sarà vguale ad HB, e la retta GH vguale ad EB, ouero AE; e similmente HI sarà vguale à BK, la retta IG vguale ad FC, ouero AF, e la retta GF vguale ad IC, ouero DI. Si considerino i due triangoli AGE, GDH, de' quali i lati AG, GE, sono vguali à i due lati GD, DH, la base AE è vguale alla base GH, sarà il triangolo AGE [d] vguale, ed equiangolo al triangolo GDH: dalche i lati intorno à gli angoli vguali [e] sono proportionali, e perciò sono fra loro simili. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli AGF, GDI, sono frà loro simili, ed vguali. In oltre, perche le rette HD, DI, sono parallele alle due EG, GF, sarà l'angolo HDI [f] vguale all'angolo EGF. Ne i triangoli EGF, HDI, i due lati HD, DI, sono stati dimostrati vguali à i due lati EG, GF, e l'angolo HDI vguale all'angolo EGF, sarà la base HI [g] vguale alla base EF, i rimanenti angoli DHI, DIH, saranno vguali à i restanti angoli GEF, GFE, ed il triangolo DHI vguale al triangolo GEF. E perche i triangoli GEF, DHI, sono equiangoli, haueranno perciò [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, ed in conseguenza [k] saranno frà loro simili; si che i triangoli GEF, DHI, sono frà loro simili, ed vguali. Si considerino i triangoli AEF, GHI, de' quali i due lati EA, AF, per quel che si è dimostrato, sono vguali,



b 2. del 6.

c 34. del 1.

d 8. e 4. del 1.

e 4. del 6.

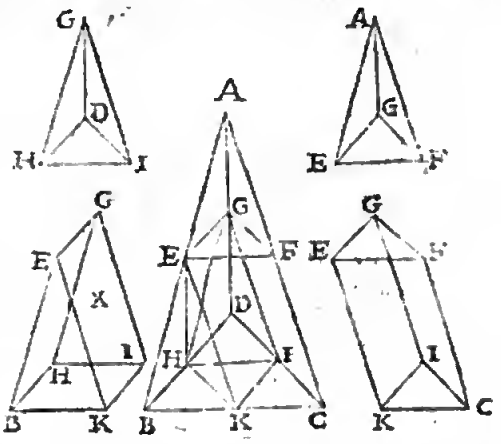
f 10. del 11.

g 4. del 1.

h 4. del 6.

k 1. defin. del 6.

à i due lati HG, GI, la baſe EF è vguale alla baſe HI, ſarà il triangolo AEF [l] vguale, ed equiangolo al triangolo GHI, e perciò [m] ſono frà loro ſimili, ed vguali. Hor eſſendo i quattro triangoli AGE, AGF, AEF, EGF, ſimili, ed vguali à i quattro triangoli GDH, GDI, GHI, DHI, le piramidi AEFG, GHID, contenute da quelli, ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Di più eſſendo i lati HG, GI, IH, paralleli à i lati BA, AC, CB, ſarà l'angolo HGI [n] vguale all'angolo BAC, l'angolo GIH ſarà vguale all'angolo ACB, e l'angolo GHI ſarà vguale all'angolo ABC; dal che i triangoli GHI, ABC, ſono equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli vguali [o] proportionali, e perciò [p] ſono ſimili frà loro. Nel triangolo DAB la retta GH è dimoſtrata parallela ad AB, e per il Coroll. alla 4. del 6, i triangoli DGH, DAB, ſono ſimili frà loro. Parimente eſſendo GI parallela ad AC, ſarà il triangolo DIG ſimile al triangolo DCA; ed eſſendo HI parallela al lato BC, ſarà il triangolo DHI ſimile al triangolo DBC: ſi che i quattro triangoli GHI, GDH, GDI, IDH, ſono ſimili à i quattro triangoli ABC, ADB, ADC, CDB; perciò la piramide GHID [q] ſarà ſimile alla piramide ABCD. Di più, eſſendoſi dimoſtrato, che il triangolo DBC è ſimile al triangolo DHI, e che il triangolo GEF è ſimile al medeſimo triangolo DHI, i triangoli DBC, GEF, [r] ſaranno frà di loro ſimili. E perche le rette EG, GF, EF, ſono parallele à i lati DB, DC, BC, ſarà il triangolo AGE [t] ſimile al triangolo ADB, il triangolo AGF ſimile al triangolo ADC, ed il triangolo AEF ſarà ſimile al triangolo ABC; dal che le piramidi AEGF, ABDC [u] ſono ſimili frà di loro. Per la qual coſa le piramidi AEGF, GHDI, ſono ſimili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna è ſimile à tutta la piramide ABCD, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



Di nuouo, perche i lati BA, BC, ſono diuiſi in due parti vguali in E, & K, ſarà BK à KC come BE ad EA, e perciò le rette EK, FC [x] ſono frà di loro parallele; ſù moſtrata GI parallela ad FC, ſarà EK [y] parallela ad IG: e perche le rette EG, GF, EF, furono dimoſtrate parallele alle tre BD, DC, CB, i quadrilateri EKIG, GICF, EKCF ſono parallelogrammi, ed in conſeguenza i loro lati oppoſti [z] ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa i lati EG, GF, EF, ſono vguali, e paralleli à i lati KI, IC, CK, ed i triangoli GEF, IKC, [a] ſono frà loro equiangoli, vguali, e paralleli; ed eſſendo equiangoli, i lati intorno à gli angoli vguali [b] ſono proportionali, e perciò [c] ſono frà loro ſimili. Hor eſſendo i triangoli EGF, KIC, frà

loro

l 8, e 4. del 1.
m 4. del 6.
n 10. del 10.
o 4. del 6.
p 1. defin. del 6.
q 9. defin. del 11.
r 11. del 6.
t 10. del 11. & 4. del 6.
u 9. defin. del 11.
x 2. del 6.
y 9. del 11.
z 34. del 1.
a 8. & 4. del 1.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.

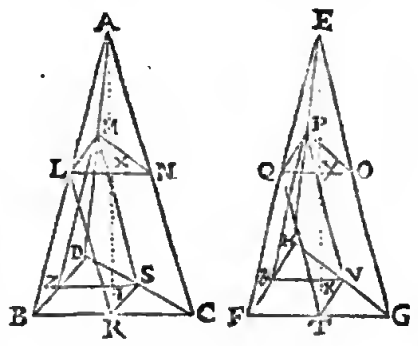
loro ſimili, vguali, è paralleli, ed i quadrilateri EKIG,GFCI,FCKE, ſono parallelogrammi, per la definitione 13. di queſto, il ſolido EGFCKI è priſma. Similmente eſſendo i tre lati EB, BK, KE vguali, e paralleli à i tre lati GH,HI,IG, i triangoli EBK, GHI [d] ſaranno ſimili, vguali, e paralleli. E perche i quadrilateri EKIG, EBHG, BHIK, furono dimoſtrati parallelogrammi, per la citata definitione 13. di queſto, il ſolido GEB KIH è ancora priſma, la di cui baſe è il parallelogrammo HBKI, il quale è [e] il doppio del triangolo HKI, cioè il doppio del triangolo IKC. E perche gli antedetti priſma ſono frà i piani paralleli EGF, DBC, cioè hanno vna medeſima altezza, eſſendo la baſe parallelogramma BI il dop-doppio della baſe triangolare IKC, ſarà il priſma GEBKIH [f] vguale al priſma GEFCIK. Finalmente nel parallelogrammo KD il lato HK [g] è vguale al lato DI, fù dimoſtrato il lato BK vguale al lato HI, ed il lato BH, per coſtruttione, è vguale al lato HD, i tre lati dunque BH,HK,KB, ſono vguali à i tre lati HD,DI,IH, dal che i triangoli HBK, DHI, [h] ſono frà loro equiangoli, ed vguali; ed eſſendo equiangoli, hanno i lati [K] intorno à gli angoli vguali proportionali, e perciò [l] ſono ſimili. Parimente eſſendo i quadrilateri EBHG, EHDG, parallelogrammi, ſarà EB [m] vguale ad HG, ed il lato EH ſarà vguale al lato GD: ma BH è vguale ad HD, i tre lati dunque EH,HB,BE, ſono vguali à i tre lati GD,DH,HG; e per le ragioni antedette, ſarà il triangolo EHB [n] ſimile, ed vguale al triangolo GDH; ed oltre à ciò, eſſendo i tre lati EH, HK, KE, vguali à i tre lati GD,DI,IG, ſaranno i triangoli EHK, GDI [o] frà loro ſimili, ed vguali; e tutta la piramide EHBK [p] ſarà ſimile, ed vguale alla piramide GDHI. E perche il priſma GEBKIH, che hà la baſe parallelogramma, è maggiore della piramide EBKH, ſtante che la contiene, ſarà il medeſimo priſma maggiore della piramide GHID: ma il priſma EGFCKI di baſe triangolare è vguale al priſma GEBKIH, ſarà il priſma di baſe triangolare EGFCKI maggiore della piramide GHID, cioè maggiore della piramide AEFG. Per la qual coſa i due priſmi GEBKIH, GEFCKI, giunti inſieme, ſono maggiori delle due piramidi GHID, AFEG; ed in conſeguenza ſono maggiori della metà di tutta la piramide ABCD, il che era da dimoſtrarſi.

d 10. dell' 11. & 4. del 1, e 4. del 6.
e 34. del 1.
f 40. del 11.
g 34 del 1.
h 8, & 4. del 1.
K 4. del 6.
l 1. defin. del 6.
m 34. del 1.
n 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
o 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
p 10. defin. del 11.

LEMMA.

Se ſaranno due piramidi di baſi triangolari, e d'vguali altezze, ogn'vna delle quali ſia diuiſa in due piramidi ſimili, ed vguali frà loro, e ſimili à tutta la piramide, et in due priſmi vguali frà loro, che giunte inſieme, ſiano maggiori della metà della piramide, come ſi diſſe nell'antecedente propoſitione; ciaſcun priſma in vna, al corriſpondente priſma nell'altra, ſarà come la baſe di tutta la piramide alla baſe dell'altra piramide.

Siano le piramidi ABCD, EFGH, le di cui baſi triangolari ſiano DBC, HFG, e l'altezze vguali ſiano le perpendicolari AI, EK, ed ogn'vna di eſſe piramidi ſia diuiſa in due piramidi, e due priſmi, ſecondo le conditioni dell'antecedente propoſitione. Dieo che il priſma LMNCRS al priſma OPQGTV è come la baſe della piramide ABCD alla baſe della piramide EFGH; cioè come la baſe DBC alla baſe HFG. Perche i piani LMN, BDC, per quel che fù dimoſtrato nell'antecedente propoſitione, ſono paralleli, perciò ſegano le rette AI, AC, [a] proportionalmente, e ſarà AN ad NC come AX ad XI: ma AN, per coſtruttione, è vguale ad NC, ſarà AX vguale ad XI. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che ET è vguale ad TK; e perche tutta l'altezza AI è ſuppoſta vguale all'altezza EK, perciò la metà XI ſarà vguale alla metà TK; dal che i priſmi LMNCRS, OPQGTV, ſono [b] come le baſi RSC, VTG. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le rette RS, TV, ſono parallele à i lati DB, HF, ſarà il triangolo DBC [c] ſimile al triangolo SRC, ed il triangolo HFG ſarà ſimile al triangolo VTG. Inoltre perche i lati BC, FG, ſono diuiſi in due parti vguali in R, & T, ſarà BC à CR come FG à GT, per la qual coſa il triangolo DBC al ſimile triangolo SRC ſarà come il triangolo FHG [d] al ſimile triangolo VTG; e permutando, il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo SRC [e] al triangolo VTG: ma il triangolo SRC al triangolo VTG è come il priſma LMNCRS al priſma OPQGTV; ſarà il priſma LMNCRS al priſma OPQGTV, [f] come il triangolo DBC al triangolo HFG: Ma i priſmi LMNCRS, OPQGTV, ſono vguali à i priſmi MLRBZS, PQTFGV, il priſma ancora MLRBZS al priſma PQTFGV ſarà, come la baſe BDC alla baſe FHG, eh'era da dimoſtrarſi.



a 17. del 11.

b Corol. alla 32 del 11.

c Corol. alla 4. del 6.

d 22. del 6. e 16. del 5.

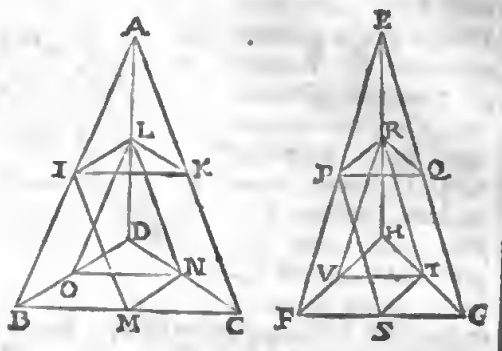
f 12. del 5.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se ſaranno due piramidi di vguali altezze, che habbiano le baſi triangolari, ed ogn'vna di eſſe ſia diuiſa in due piramidi ſimili, ed vguali frà loro, e ſimili à tutta la piramide, & in due priſmi vguali, che, giunti inſieme, ſiano maggiori della metà di tutta la piramide; ed ogn'vna di quelle piramidi, che riſulta da tal diuiſione, ſia diuiſa in due altre piramidi, e due priſmi, come la prima; e le piramidi, che riſultano da queſta diuiſione, ſiano ſimilmente diuiſe in due piramidi, e due priſmi, come prima, e con-

queſt'

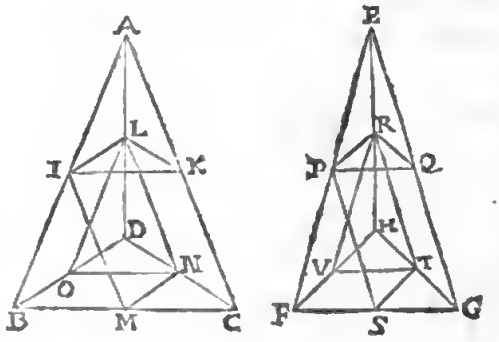
queſt'ordine in infinito; tutti i priſmi, che riſulteranno da queſte diuiſioni in vna piramide, giunti inſieme, à tutti i priſmi nell'altra piramide, ſono come la baſe della piramide alla baſe dell'altra piramide.



Sopra le baſi triangolari DBC,HFG, ſiano coſtituite le piramidi ABCD,EFGH, di vguali altezze, ed ogn' vna ſia diuiſa, come nella terza propoſitione, in due piramidi ſimili, ed vguali,e ſimile à tutta la piramide,& in due priſmi frà loro vguali, che giunti inſieme,ſiano maggiori della metà di tutta la piramide, e le piramidi in vna di eſſe ſiano le notate AIKL,LOND, e nell'altra ſiano EPQR, RVTH; parimente i priſmi in vna di eſſe ſiano i notati LIBMNO, ILKCMN, e nell'altra ſiano RPFSTV, PRQGST; e di nuouo ogn'vna delle piramidi AIKL,LOND, EPQR, RVTH, ſia ſimilmente diuiſa in due piramidi, e due priſmi, come prima; ed ogn'vna delle piramidi, che riſultano da queſta diuiſione, ſi diuida parimente in due piramidi, e due priſmi, nell'iſteſſo modo di prima, e con queſt'ordine ſi proceda in infinito. Dico che tutti i priſmi, che ſi fanno nella piramide ABCD à tutti i priſmi, che ſi fanno nella piramide EFGH, ſono come la baſe DBC alla baſe HFG. Perche le piramidi AIKL,LOND ſono frà di loro ſimili, ed vguali, ſarà la baſe ILK [a] vguale alla baſe ODN: ma il triangolo ILK [b] è vguale al triangolo MNC, ſtante che ſono le baſi oppoſte del priſma,ſarà il triangolo DON vguale al triangolo MNC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo HVT è vguale al triangolo TSG. Si dimoſtri come ſi fece nell'antecedente Lemma, che il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo NMC al triangolo TSG,ſarà ancora il triangolo DBC al triangolo HFG, come il triangolo LIK al triangolo PRQ, e ſarà il triangolo DBC al triangolo HFG come il triangolo DON al triangolo HVT. Di nuouo il priſma ILKCNM al priſma PRQGST, per l'antecedente Lemma, è come la baſe DBC alla baſe HFG, ed il priſma LIBMNO al priſma RPFSTV è come la baſe BDC alla baſe HFG, ſaranno gli antecedenti inſieme, cioè l'aggregato de i due priſmi LIBCKD, à i conſeguenti inſieme, ch'è l'aggregato de gli altri due priſmi RPFGQH, [c] come l'antecedente BDC al conſeguente FHG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i priſmi nella piramide AIKL, giunti inſieme, à i priſmi nella piramide EPQR, giunti inſieme, ſono come la baſe ILK alla baſe PRQ, cioè come la baſe BDC alla baſe FHG: e ſimilmente tutti i priſmi nella piramide LOND à tutti i priſmi nella piramide RVTH, [d] ſono come la

[a] 10. d'eſin. del 11.
[b] 13. defin. del 11.
[c] 11. del 5.
[d] 12. del 5.

baſe ODN alla baſe HVT, cioè come la baſe BDC alla baſe FHG. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che tutti i priſmi in ogn'altra piramide fatta in ABCD à tutti i priſmi nella corriſpondente piramide fatta in EFGH, eſſere come la baſe BDC alla baſe FHG, e per la 12. propoſitione del 5. tutti gli antecedenti inſieme, che ſono i priſmi fatti nella piramide ABCD, à tutti i conſeguenti inſieme, che ſono i priſmi fatti nella piramide EFGH, ſaranno come l'antecedente BDC al conſeguente FHG. Per la qual coſa tutti i priſmi à tutti priſmi ſono come la baſe BDC alla baſe FHG, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

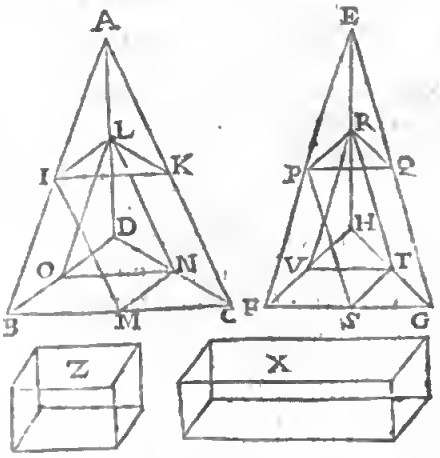
Le piramidi di baſi triangolari, che hanno la medeſim' altezza, ſono come le loro baſi.

Sopra le baſi triangolari DBC, HFG, ſiano coſtituite le piramidi d'vguali altezze ABCD, EFGH. Dico, che la baſe DBC alla baſe HFG è come le piramide ABCD alla piramide EFGH, cioè come la piramide ABCD ad vna quantità vguale alla piramide EFGH. Se la baſe BDC alla baſe HFG non è come la piramide ABCDad vna quantità vguale alla piramide EFGH, s'intenda la baſe DBC alla baſe HFG eſſere come la piramide ABCD alla quantità X, la quale ò ſarà minore, ò maggiore della piramide EFGH. Sia nel primo luogo la quantità X minore della piramide EFGH, per quanto è il ſolido Z, in modo, che i due ſolidi X, & Z, giunti inſieme, ſiano vguali alla piramide EFGH. Si diuida la piramide EFGH nelle due piramidi EPQR, RVTH, ſimili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna ſimile à tutta la piramide EFGH, e ne i due priſmi RPF STV, PRQGST, vguali frà di loro, e che, giunti inſieme, ſiano maggiori della metà della piramide EFGH, nel modo, che ſi fece alla terza propoſitione di queſto: E ſimilmente ſia diuiſa ogn'vna delle piramidi EPQR, RVTH, in due piramidi, e due priſmi, nel modo fatto alla citata 3. propoſit. di queſto, ed ogn'vna di quelle piramidi, che riſultano da queſta diuiſione, ſi diuidano in due altre piramidi, e due priſmi, come prima, e con queſt'ordine ſi proceda fin che le piramidi, che riſultano dall'vltima diuiſione, giunte inſieme, a ſiano minori del ſolido Z: e ſuppoſto, che, fatta queſta ſucceſſiua diuiſione, le piramidi reſtate ſiano EPQR, RVTH,

a 1. del 10.

le

le quali, giunte insieme, siano minori del solido Z. Perche i due solidi Z, ed X, giunti insieme, sono vguali alla piramide EFGH, derratro da i due solidi Z, ed X, il solido Z, e dalla piramide EFGH detrattane le piramidi EPQR, RVTH, che sono minori del solido Z, restano i due prismi RPF STV, PRQGST, maggiori del solido X. Sia poi diuisa la piramide ABCD nel modo, ch'è stata diuisa la piramide EFGH, per l'antecedente propositione, i prismi, che sono nella piramide ABCD, à i prismi, che sono nella piramide EFGH, hanno l'istessa proportione, quale hà la base DBC alla base HFG: ma la base DBC alla base HFG è come la piramide ABCD al solido X, saranno i prismi, fatti nella piramide ABCD, à i prismi fatti nella piramide EFGH, [b] come la piramide ABCD al solido X; e permutando, i prismi nella piramide ABCD alla piramide ABCD, [c] saranno come i prismi nella piramide EFGH al solido X: ma i prismi nella piramide ABCD sono minori della medesima piramide ABCD, saranno i prismi nella piramide EFGH [d] minori del solido X: e perche i prismi nella piramide EFGH furono dimostrati maggiori del solido X, sarebbero i prismi della piramide EFGH maggiori, e minori del solido X. Non dunque il solido X è minore della piramide EFGH; e perciò la base DBC alla base HFG non è come la piramide ABC ad vna quantità minore della piramide EFGH: Nell'istesso modo si dimostrerà, che la base HFG alla base DBC non è come la piramide EFGH ad vna quantità minore della piramide ABCD.



b 11. del 5.

c 16. del 5.

d 14. del 5.

Di nuouo, suppostо, che X sia maggiore della piramide EFGH, s'intenda come X alla piramide ABCD, così la piramide EFGH ad vn'altra quantità, che per essempio sia il solido Z; e permutando, sarà il solido X alla piramide EFGH, [e] come la piramide ABCD al solido Z: ma il solido X, per suppositione, è maggiore della piramide EFGH, sarà la piramide ABCD [f] maggiore del solido Z, cioè il solido Z sarà minore della piramide ABCD. In oltre, perche la base DBC alla base HFG, per iporcsi, è come la piramide ABCD al solido X, inuertendo, sarà il solido X alla piramide ABCD, [g] come la base HFG alla base DBC; ma il solido X alla piramide ABCD, per costruttione, è come la piramide EFGH al solido Z, sarà la base HFG alla base BDC, [h] come la piramide EFGH al solido Z, ch'è minore della piramide ABCD; il che è contro à quel che si è dimostraro. Non dunque il solido X è maggiore della piramide EFGH, ne meno, per quel che si è dimostraro, è minore, & in conseguenza il solido X

e 16. del 5.

f 14. del 5.

g Corol. alla 4. del 6.

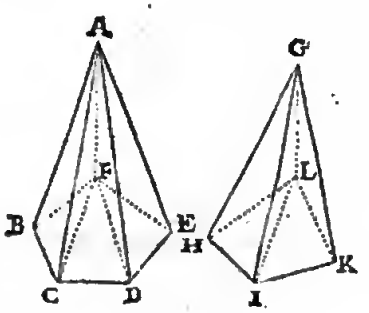
h 11. del 5.

è vguale alla piramide EFGH. E perche la baſe DBC alla baſe HFG è come la piramide ABCD al ſolido X, eſſendo il ſolido X vguale alla piramide EFGH, ſarà la baſe DBC alla baſe HFG, come la piramide ABCD alla piramide EFGH, eh'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Le piramidi di vguali altezze, che hanno le baſi poligone, ſono frà loro come le baſi.

Siano le piramidi d'vguali altezze ABCDEF, GHIKL, le di cui baſi FBCDE, LHIK ſiano di molti lati, cioè di più di tre lati. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL è come la baſe BCDEF, alla baſe HIKL. Da gli angoli F, ed L, à gli angoli oppoſti ſi tirino le rette FC, FD, LI, in modo, che le baſi BCDEF, HIKL ſiano diuiſe in triangoli, ſaranno diuiſe le piramidi ABCDEF, GHIKL, in tante piramidi di baſi triangolari, per quanti triangoli ſono nelle baſi BCDEF, HIKL. Perche le piramidi ABCF, ACDF, di baſi triangolari, hanno la medeſim'altezza, per l'antecedente propoſitione, la piramide ABCF alla piramide ACDF, è come la baſe FBC alla baſe FCD; e componendo, la piramide ABCDF alla piramide ACDF a ſarà come la baſe BCDF alla baſe FCD: ma la piramide ACDF alla piramide d'vguale altezza ADEF, è come la baſe CDF alla baſe FDE; per l'vgualità, la piramide ABCDF alla piramide ADEF b ſarà come la baſe BCDF alla baſe FDE: e componendo, tutta la piramide ABCDEF alla piramide ADEF, c ſarà come la baſe BCDEF alla baſe FDE. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che la piramide GHIKL alla piramide GIKL è come la baſe HIKL alla baſe LIK; ed inuertendo, la piramide GIKL alla piramide GHIKL, d è come la baſe LIK alla baſe HIKL. In oltre, perche la piramide ABCDEF alla piramide ADEF è come la baſe BCDEF alla baſe FDE, e la piramide ADEF alla piramide d'vguale altezza GIKL, è come la baſe FDE alla baſe LIK per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GIKL, e ſarà come la baſe BCDEF alla baſe LIK: ma la piramide GIKL alla piramide GHIKL è come la baſe LIK alla baſe HIKL; ſarà, per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL, f come la baſe BCDEF alla baſe HIKL, eh'era da dimoſtrarſi.



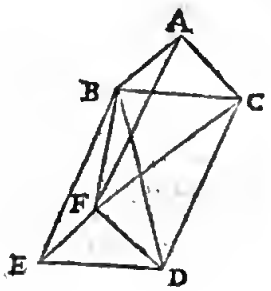
a 18. del 5.
b 22. del 5.
c 18. del 5.
d Coroll. alla 4. del 6.
e 22. del 5.
f 22. del 5.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Ogni priſma di baſi triangolari ſi diuide in tre vguali piramidi di baſi triangolari.

Sia il priſma ABCDEF, le di cui baſi triangolari ſiano gli oppoſti triangoli ABC, FED. Dico, che il priſma ABCDEF ſi diuide in tre piramidi vguali di baſi triangolari. Ne i tre parallelogrammi BEDC, DCAF, ABEF, ſi tirino le diagonali BD, CF, FB, ſarà il triangolo BED [a] vguale al triangolo BDC; e nel parallelogrammo AFDC, il triangolo AFC ſarà vguale al triangolo CFD. Si conſiderino le due piramidi, le di cui baſi ſono i triangoli BED, BDC, ed il vertice F; cioè le piramidi FBED, FDCB, le quali hanno vna medeſima altezza; e ſarà la piramide FEDB alla piramide FDCB, [b] come la baſe BED alla baſe BDC: ma le baſi BED, BDC, ſono ſtate dimoſtrate vguali. Le piramidi dunque FEDB, FDCB [c] ſono frà di loro vguali. Di nuouo ſi conſiderino due altre piramidi, le di cui baſi ſono i triangoli FDC, FCA, ed il vertice B, cioè le piramidi BDCF, BFCA, le quali hanno vna medeſima altezza, ſarà la piramide BFDC alla piramide BFCA, [d] come la baſe FDC alla baſe FCA: ma le baſi FDC, FCA, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono frà di loro vguali, in conſeguenza le piramidi BFDC, BFCA, [e] ſono frà di loro vguali: ma la piramide BFDC fù dimoſtrata vguale alla piramide BFED; le tre piramidi dunque BFED, BFDC, BFCA, ſono frà di loro vguali, ch'era dimoſtrarſi.



a 34. del 1.

b 5. del 12.

c 14. del 5.

d 5. del 12.

e 14. del 5.

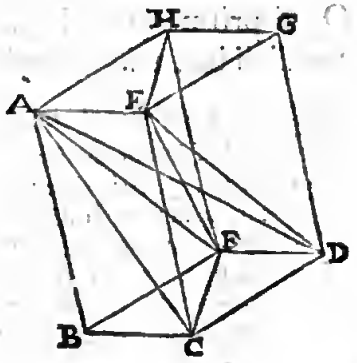
COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua, che ogni piramide è la terza parte del priſma vgualmente alto, e che hà la medeſima baſe.

Sopra la baſe poligona BCDE ſia poſta la piramide ABCDE, ed il priſma vgualmente alto ACDH, ed i piani oppoſti AG, BD, ſiano diuiſi in triangoli di numero vguali colle rette HF, EC, ſarà diuiſo il priſma ACDH in tanti priſmi di baſi triangolari, per quanti ſono i triangoli nella baſe BCDE; e ſarà diuiſa la piramide ABCDE in tante piramidi di baſi triangolari, per quanti ſono i triangolari in eſſa baſe BCDE; ſi tirino le rette DF, EF, e ſi conſiderino le due

trian-

piramidi ACDE,FCDE,le quali hanno la medeſima baſe CDE,e ſono ſotto la
f 5. del 12. & 14. del 5. *medeſim'altezza, perciò f ſono frà di loro vguali: ma la piramide FCDE, per l'antecedente propoſitione, è la terza parte del priſma FCDGH, ſarà la piramide ACDE la terza parte del priſma FCDGH; per la qual coſa la piramide di baſe triangolare è la terza parte del priſma vgualmente alto, e che hà la medeſima baſe. In oltre, perche la piramide ABCE, per l'antecedente propoſitione, è la terza parte del priſma HAFECB, e la piramide ACDE è la terza parte del priſma FCDGH, ſarà tutta la piramide ABCDE la terza parte di tutto il priſma ABCDGH. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe nella baſe*

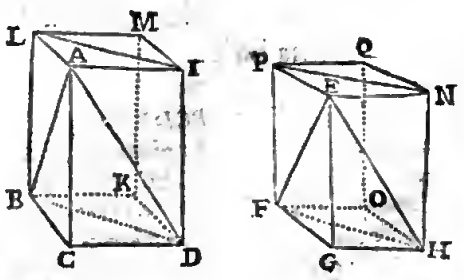


BCDE ſaranno più triangoli, poiche in quanti triangoli è diuiſa la baſe BCDE, in tanti priſma di baſi triangolari ſarà diuiſo il priſma ABCDGH, ed in altretante piramidi ſarà diuiſa la piramide ABCDE, ogn'vna delle quali ſarà la terza parte di quel priſma poſto ſopra la medeſima baſe; e perciò tutta la piramide, compoſta di quelle piramidi di baſi triangolari, ſarà la terza parte di tutto il priſma, compoſto di quei priſmi di baſi triangolari. D'onde ſi conclude, che ogni piramide è la terza parte del priſma vgualmente alto, e che hà la medeſima baſe, come ſi diſſe. Intendaſi però di quei priſmi, la di cui baſe ſia vno di quei piani oppoſti, che nel priſma deuono eſſere ſimili, vguali, e paralleli.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Le ſimili piramidi di baſi triangolari ſono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le ſimili piramidi ABCD, EFGH, le di cui baſi ſiano i triangoli BCD, FGH, e ſiano le baſi BCD, FGH, ſimili frà loro; per la ſimilitudine delle piramidi, gli altri triangoli in vno ſaranno ſimili à gli altri triangoli nell'altro: ſia dunque il triangolo ACD a ſimile al triangolo EGH, il trian-
a 9. de fin. del 11. golo ABC ſimile al triangolo EGF, ed il triangolo ABD ſimile al triangolo EFH. Dico, che la piramide ABCD alla piramide EFGH, hà triplicata proportione, che il lato homologo CD al lato homologo GH. Co'i lati AC, CD, ſi faccia il parallelogrammo CI; co'i



due

due AC, CB, ſi faccia il parallelogrammo CL, e co'i due lati BC, CD, ſi faccia il parallelogrammo CK; ſi compiſca il parallelepipedo LCDM. Nell'iſteſſo modo ſi compiſca il parallelepipedo PGHQ. Si tirino le diagonali LI, PN. Il parallelogrammo LBDI [b] diuide il parallelepipedo LCDM ne i due priſmi LAIDCB, LMIDKB, vguali frà loro, e di baſi triangolari, e ſarà tutto il parallelepipedo LCDM à tutto il parallelepipedoPGHQ, [c] come il priſma LAIDCB al priſmaPENHGF. E perche la piramide ABCD [d] è la terza parte del priſma LAIDCB, e la piramide EFGH è la terza parte del priſma PENHGF, i detti priſmi ſaranno vguali multiplici di eſſe piramidi, e ſarà il priſma LAIDCB al priſma PENHGF, [e] come la piramide ABCD, alla piramide EFGH. In oltre, perche i triangoli ACD, EGH, ſono frà loro ſimili, ſarà l'angolo ACD [f] vguale all'angolo EGH, e la proportione di AC à CD, come quella di EG, à GH; per la qual coſa i parallelogrammi CI, GN, ſono frà loro ſimili. Parimente eſſendo i triangoli ACB, EGF, frà loro ſimili, per le ragioni antedette, i parallelogrammi CL, GP, ſono frà loro ſimili; ed eſſendo i triangoli BCD, FGH, frà loro ſimili, per l'iſteſſa ragione i parallelogrammi CK, GO, ſono frà loro ſimili; dal che i tre parallelogrammi CI, CL, CK, ſono ſimili à i tre corriſpondenti parallelogrammi GN, GP, GO; gli oppoſti ſono ſimili à queſti, e perciò il parallelepipedo LCDM [g] ſarà ſimile al parallelepipedo PGHQ; e per la propoſitione 33. dell'11. il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH: ma il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ è come il priſma LAIDCB al priſma PENHGF, ed il priſma LAIDCB al priſma PENHGF, è come la piramide ABCD alla piramide EFGH, hauerà la piramide ABCD alla piramide EFGH, [h] triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH, il che era da dimoſtrarſi

b 28. del 11.

c 15. del 5.
d 7. del 12.

e 15. del 5.

f 1. definit. del 6.

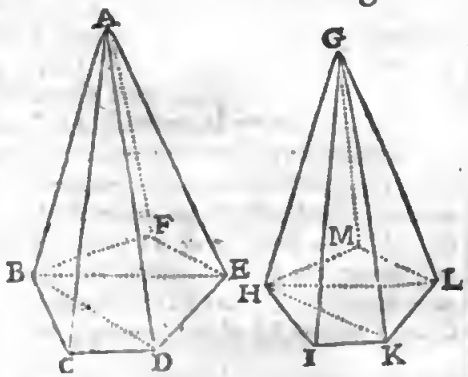
g 9. definit. del 11.

h 11. del 5.

SCOLIO.

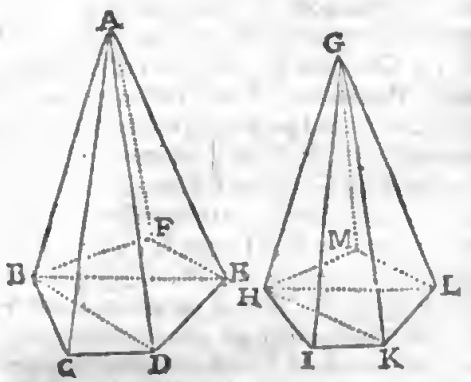
Coll'antecedente propoſitione facilmente ſi dimoſtra, che le piramidi ſimili, le di cui baſi ſiano più di tre lati, ſono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le piramidi ABCDEF, GHIKLM, ſimili frà di loro, le di cui baſi ſiano i ſimili poligoni BCDEF, HIKLM. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKLM hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo FE al lato homologo LM. Perche i poligoni ABCDEF, HIKLM ſono ſimili ſarà, CD à DE come IK à KL, e ſarà DE ad EF come KL ad LM;



a 1. definit. del 6.

LM ; e permutandoſi, ſarà CD ad IK, [b] *come DE à KL, e la proportione di DE à KL ſarà come quella di EF ad LM. Si diuidano i poligoni ſimili BCDEF, HIKLM* [c] *in triãgoli di numero vguale, colle rette BD, BE, HK, HL: ſarà il triangolo BCD ſimile al triãgolo HIK, il triangolo BDE ſarà ſimile al triangolo HKL, ed il triangolo BEF ſarà ſimile al triãgolo HLM; e la proportione di CB à BD ſarà come quella di IH ad HK; come ancora la proportione di CD à DB ſarà come quella di IK à KH. Perche le propoſte piramidi ſono ſimili, ſarà il triangolo ABC* [d] *ſimile al triangolo GHI, ed il triangolo ACD ſarà ſimile al triangolo GIK; dal che la proportione di AB à BC* [e] *ſarà come quella di GH ad HI; ma CB à BD è come IH ad HK, per l'egualità, ſarà AB à BD* [f] *come GH ad HK. Parimẽte GK à KI è come AD à DC, fù moſtrata CD à DB eſſere come IK à KH, ſarà per l'egualità, AD à DB* [g] *come GK à KH; ed inuertendo BD à DA* [h] *ſarà come HK à KG. Hor eſſendo AB à BD come GH ad HK, e la proportione di BD à DA è come quella di HK à KG, ſarà per l'egualità, AB ad AD* [k] *come HG à GK; dal che i triangoli ABD, GHK, ſono equiangoli, hanno i lati* [l] *intorno à gli angoli vguali, e perciò* [m] *ſono frà loro ſimili. E perche i quattro triangoli ABC, ACD, ADB, BCD, ſono ſimili à i quattro triangoli GHI, GIK, GKH, HIK, perciò le piramidi ABCD, GHIK,* [n] *ſono frà loro ſimili. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la piramide ABDE è ſimile alla piramide GHKL; e che la piramide ABEF è ſimile alla piramide GHLM; ed hauerà la piramide ABCD alla piramide GHIK* [o] *triplicata proportione, che il lato homologo CD al lato homologo IK: ma CD ad IK è come DE à KL, hauerà la piramide ABCD alla piramide GHIK* [p] *triplicata proportione, che il lato DE à KL: ma la piramide ABDE alla ſimile piramide GHKL* [q] *hà la medeſima triplicata proportione, che hà il lato homologo DE al lato homologo KL, ſarà la piramide ABCD alla piramide GHIK,* [r] *come la piramide ABDE alla piramide GHKL. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la piramide ABDE alla piramide GHKL è come la piramide ABEF alla piramide GHLM. Per la qual coſa tutti gli antecedenti inſieme, che compongono la piramide ABCDEF, à tutti i conſeguenti inſieme, che compongono la piramide GHIKLM,* [s] *ſono come vno antecedente, ch'è la piramide ABEF, ad vn conſeguente, ch'è la piramide GHLM. Ma la piramide ABEF alla ſimile piramide GHLM* [u] *hà triplicata proportione, che il lato homologo FE al lato homologo ML, hauerà tutta la piramide ABCDEF à tutta la piramide GHIKLM* [x] *triplicata proportione, che il lato homologo FE al lato homologo ML, ch'era da dimoſtrarſi.*



proportionali

COROL-

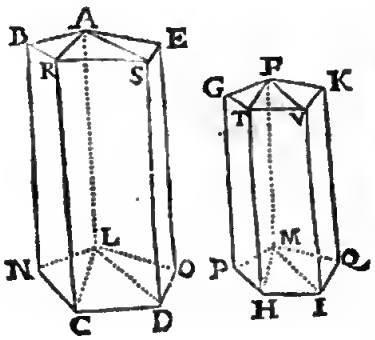
COROLLARIO.

Appare da quel che ſi è detto, che le piramidi ſimili, di baſi poligone, ſi diuidono in piramidi ſimili, di numero vguale.

SCOLIO.

Nell'iſteſſo modo ſi proua, che i priſmi ſimili, di baſi poligone, hanno triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano i ſimili priſmi ABCDE, FGHIK, di baſi poligone. Dico che il priſma ABCDE al priſma FGHIK hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ. Perche i priſmi ſono frà loro ſimili, perciò i piani, che contengono vno di eſſi, a ſono ſimili à i corriſpondenti piani, che contengono l'altro; per il che le baſi NCDOL, PHIQM, BRSEA, GTVKF, ſono frà loro ſimili. Si diuidano queſte baſi colle rette LC, LD, MH, MI, AR, AS, FT, FV, in triangoli di numero vguale, ſaranno i triangoli nelle baſi NO, BE, b ſimili à i corriſpondenti triangoli, che ſono nelle baſi PQ, GK; ed i triangoli, che ſono nelle baſi BE, GK, ſaranno ſimili à i corriſpondenti triangoli delle baſi NO, PQ, e ſarà l'angolo NCL c vguale all'angolo PHM, e l'angolo LCD vguale all'angolo MHI; ed oltre à ciò la proportione di NC à CL ſarà come quella di PH ad HM. Inoltre perche i piani CB, CS, ſono ſimili à i corriſpondenti piani HG, HV, ſarà l'angolo RCN d vguale all'angolo THP, e l'angolo RCD vguale all'angolo THI: ma per la ſimilitudine de' poligoni NCDO, PHIQ, gli angoli NCD, PHI, ſono frà loro vguali, per lo Scolio alla 35. propoſitione del 11. ſarà l'angolo RCL vguale all'angolo THM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo CRA è vguale all'angolo HTF. E perche le rette RC, AL, come lati de i parallelogrammi CB, BL, e ſono vguali, e parallele al lato NB: ſarà RC vguale, e parallela ad AL; dal che le due AR, LC, ſono f vguali, e parallele, ed il quadrilatero ARCL g è parallelogrammo. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrilatero FTHM è parallelogrammo. Di più, perche i piani CB, HG, ſono frà loro ſimili, ſarà RC à CN h come TH ad HP: ma NC à CL è come PH ad HM, per l'egualità, ſarà RC à CL, k come TH ad HM; l'angolo RCL fù dimoſtrato vguale all'angolo THM, in conſeguenza il parallelogrammo ARCL l ſarà ſimile al parallelogrammo FTHM. E perche i tre lati AB, BR, RA, ſono vguali à i tre lati LN, NC, CL, i triangoli ABR, LNC, m ſono frà loro vguali, furono dimoſtrati ſimi-



a 9. defin. del 11.

b 20. del 6.

c 1. defin. del 6.

d 1. defin. del 6.

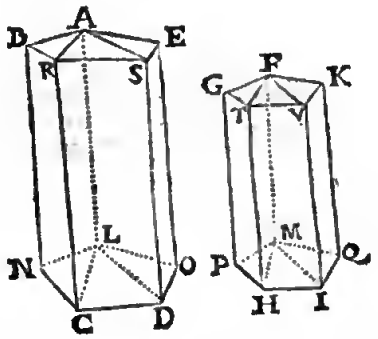
e 34. del 1.

f 33. del 1. g 35. defin. del 1.

h 1. defin. del 6.

k 22. del 5. l 1. defin. del 6. m 8. e 4. del 1.

li, in conſeguenza ſono ſimili, ed vguali, e ſono ancora paralleli, ſtante che
n 13. defin. del 11. *i piani BE, NO, ſono paralleli; per la qual coſa il ſolido ABRCNL* n *è priſma. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il ſolido FGTHPM è priſma, e che tutti*
o 9. defin. del 11. *gli altri ACDL, ADLO, FHIM, FIQM, ſono priſmi. E perche i triangoli ABR, LNC, ſono ſimili à i triangoli FGT, MPH, ed i parallelogrammi AB NL, BNCR, ARCL, ſono ſimili à i corriſpondenti parallelogrammi FGPM, GPHT, FTHM; ſarà il priſma ABRCNL* o *ſimile al priſma FGTHPM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il priſma ACDL è ſimile al priſma FHIM ed il priſma ADLO è ſimile al priſma FIMQ. Di nuouo perche le baſi NO,*
p 1. defin. del 6. *PQ ſono ſimili; ſarà NC à CD* p *come PH ad HI; e permutando, NC à*
q 16. del 5. *PH* q *ſarà come CD ad HI; Similmente CD à DO ſarà come HI ad IQ; e*
r 16. del 5. *permutando, CD ad HI* r *ſarà come DO ad IQ. Finalmente perche il priſma di baſe triangolare ANLC al ſimile priſma FPMH, per lo Scolio alla 33. propoſitione dell'* 11. *hà triplicata proportione, che il lato homologo NC al lato homologo PH, e la proportione di NC à PH è come quella di CD ad HI, hauerà il priſma ANLC al priſma FPMH* s *triplicata proportione di quella, che*
t 11. del 5. u Scol. alla 33. del 11. *hà CD ad HI: ma il priſma ACLD al ſimile priſma FHIM* u *hà la medeſima triplicata proportione, che hà il lato CD al lato HI, ſarà il priſma*
x 11. del 5. *ANLC al priſma FPMH,* x *come il priſma ACLD al priſma FHMI. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il priſma ACLD al priſma FHMI è come il priſma ADLO al priſma FIMQ. Per la qual coſa tutti gli antecedenti inſieme, cioè i priſmi, che compongono tutto il priſma ABCDE, à tutti i conſeguenti inſieme, che ſono i priſmi, che compongono tutto il priſma*
y 12. del 5. *FGHIK* y *ſaranno come vn' antecedente ad vn conſeguente, cioè come*
z Scol. alla 33. del 11. *il priſma ADLO al priſma FIMQ. Ma il priſma ADLO al priſma FIMQ* z *hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo*
& 11. del 5. *IQ, hauerà tutto il priſma ABCDE à tutto il priſma FGHIK, & triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ, che era da dimoſtrarſi.*



COROLLARIO.

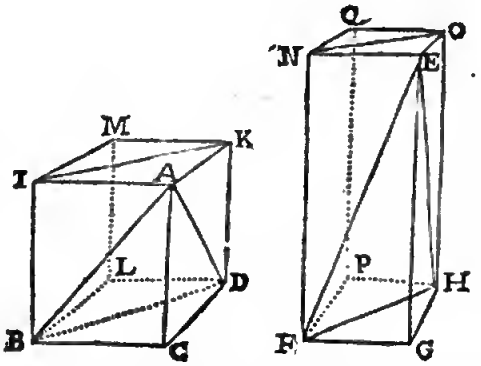
Appare da quel che ſi è dimoſtrato, che i ſimili priſmi di baſi poligone, ſi diuidono in ſimili priſmi di numero vguale.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le vguali piramidi di baſi triangolari hanno le baſi re-

cipro-

ciproche alle altezze; e quelle piramidi di baſi triangolari, delle quali le baſi ſono reciproche alle altezze, ſono frà di loro vguali.



Siano le vguali piramidi, di baſi triangolari, ABCD, EFGH. Dico che la proportione della baſe BCD alla baſe FGH, è come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Co' i lati AC, CB, ſi faccia il parallelogrammo CI, co'i lati AC, CD, ſi faccia il parallelogrammo CK, e co' i lati BC, CD, ſi faccia il parallelogrammo CL; e ſi compiſca il parallelepipedo CM. Nell'iſteſſo modo ſi compiſca il parallelepipedo GQ; ſi tirino le rette IK, NO; ed haueremo ciaſcuno de i parallelepipedi CM, GQ, [a] diuiſo in due priſmi di baſi triangolari, i quali hanno le medeſime altezze delle propoſte piramidi. E perche la piramide ABCD, per ipoteſi, è vguale alla piramide EFGH, i loro tripli, [b] cioè i priſmi IBCDKA, NFGHOE, ſono frà di loro vguali; & i doppij di queſti priſmi, cioè i parallelepipepi CM, GQ, [c] ſaranno frà di loro vguali: per la qual coſa la baſe BCDL alla baſe FGHP [d] ſarà come l'altezza del parallelepipedo GQ all'altezza del parallelepipedo CM: Ma la baſe BCDL alla baſe FGHP [e] è come il triangolo BCD al triangolo FGH, e l'altezze de i parallelepipedi, e delle piramidi ſono le medeſime; ſarà dunque il triangolo BCD, ch'è baſe della piramide ABCD, al triangolo FGH, ch'è baſe della piramide EFGH, [f] come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 28. del 11.
b 7. del 12.
c 28. del 11. d 34. del 11.
e 15. del 5.
f 11. del 5.

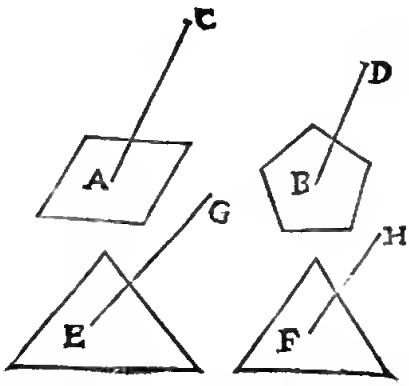
Di nuouo, ſuppoſto che la baſe BCD alla baſe FGH ſia, come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Dico che le piramidi ABCD, EFGH, ſono frà di loro vguali. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione. Perche il triangolo BCD al triangolo FGH [g] è come il parallelogrammo CL al parallelogrammo GP, e per ipoteſi, il triangolo BCD al triãgolo FGH è come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, ſarà il parallelogrammo CL al parallelogrammo GP, come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD, cioè come l'altezza del parallelepipedo GQ all'altezza del parallelepipedo CM; per la qual coſa i parallelepipedi GQ, CM, [h] ſono frà di loro vguali, e le loro metà, cioè i priſmi IBCDKA, NFGHOE, [k] ſono frà di loro vguali. E perche le piramidi [l] ſono le terze parti de i priſmi, eſsẽdo i priſmi frà di loro vguali, le loro terze parti, cioè le piramidi ABCD, EFGH, ſono frà di loro vguali, che era da dimoſtrarſi.

g 15. del 5.
h 34. del 11.
k 28. del 11. l 7. del 12.

SCOLIO.

Il medeſimo ſi dimoſtra nelle piramidi, è ne i priſmi, che non hanno le baſi triangolari.

Le piramidi vguali, ò priſmi vguali, che non hanno le baſi triangolari, le loro baſi ſono reciproche all'altezze; e ſe le baſi ſono reciproche all'altezze, quelle piramidi, ouero priſmi, ſono frà di loro vguali.



Siano A, & B, le baſi di due piramidi vguali, ò di due priſmi vguali, le di cui altezze ſiano AC, BD. Dico che la baſe A alla baſe B è come l'altezza BD all'altezza AC. Per la 25. propoſitione del 6. ſi faccia il triangolo E vguale alla baſe A, e ſi faccia il triangolo F vguale alla baſe B. Se i piani A, & B, ſono baſi di due piramidi, ſopra la baſe L, ſi erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide AC; e ſopra la baſe F ſi erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide BD; e ſe i piani A, & B, ſono baſi di due priſma, s'intenda eretto ſopra la baſe E vn priſma, che habbia l'altezza AC, e ſopra la baſe F s'intenda eretto vn priſma, che habbia l'altezza BD, in modo, che i piani verticali ſiano triangoli ſimili, vguali, e paralleli alle baſi E, ed F. Perche le piramidi, ò priſmi eretti alle baſi A, ed E, hanno la medeſima altezza, la loro proportione ſarà [a] *come quella delle baſi: ma le baſi A, ed E, per coſtruttione, ſono frà loro vguali, perciò le piramidi, ouero i priſmi eretti ſopra le baſi A, ed E, ſaranno frà loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che le piramidi, ò priſmi eretti ſopra le baſi B, ed F, ſono frà di loro vguali. Se dunque le piramidi, ò priſmi eretti alle baſi A, & B, ſono frà loro vguali, le piramidi ancora, ò priſmi eretti ſopra le baſi E, ed F ſono frà loro vguali: ma le piramidi vguali, e priſmi vguali eretti ſopra i triangoli E, ed F,* [b] *hanno le baſi reciproche all'altezze, ſarà la baſe E alla baſe F, come l'altezza FH all'altezza EG. Ma le baſi E, ed F ſono vguali alle baſi A, & B, e l'altezze EG, FH, per coſtruttione, ſono vguali all'altezze AC, BD: ſarà la baſe A alla baſe B, come l'altezza BD all'altezza AC, che era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

Di nuouo, ſuppoſto che la baſe A alla baſe B ſia come l'altezza BD all'altezza AC. Dico che le piramidi, ouero priſmi eretti ſopra le baſi A, & B, ſono frà di loro vguali; cioè le piramidi vguali frà loro, ed i priſmi vguali frà loro. S'intenda fatta la medeſima coſtruttione di prima; e ſi dimoſtri, come ſo-

pra

a 32. del 11. e ſuo Scol.

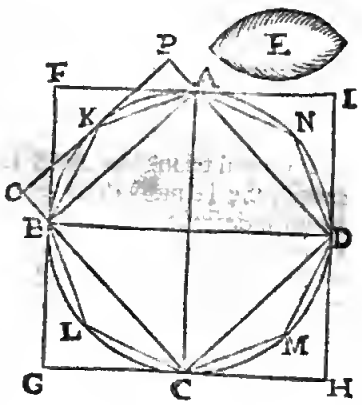
b 6. del 12. & Scol. alla 34. del 11.

pra si fece, che le piramidi erette alle basi E, F, sono vguali alle piramidi erette alle basi A, & B, e che i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti alle basi A, & B. Perche la base A alla base B, per ipotesi, è come l'altezza BD all'altezza AC, essendo le basi A, & B, vguali alle basi E, ed F, e l'altezze AC, BD, vguali all'altezze EG, FH, sarà la base E alla base F, come l'altezza FH all'altezza EG : per la qual cosa le piramidi erette alle basi triangolari E, ed F, come ancora i prismi eretti alle basi triangolari E, ed F, e sono frà loro vguali. Ma le piramidi erette sopra le basi E, ed F, furono dimostrate vguali alle piramidi erette sopra le basi A, & B, ed i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti sopra le basi A, & B, essendo le piramidi, ò prismi eretti sopra le basi E, ed F, frà di loro vguali, saranno le piramidi, ouero i prismi eretti sopra le basi A, & B, frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 9.del 12.& Scol. alla 34.del 12.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che hà la medesima base, e la medesima altezza.



Habbia il cono, e cilindro, vna medesima altezza, è la commune base sia il circolo ABCD. Dico che il cono è la terza parte del cilindro. Se il cono non è la terza parte del cilindro, ne meno il cilindro sarà il triplo del cono, ma sarà ò maggiore, ò minore del triplo del cono. Sia prima il cilindro maggiore, che il triplo del cono per quanto è il solido E, sarà il triplo del cono, col solido E, vguale al cilindro. Si descriua [a] nel proposto circolo il quadrato ABCD, ed intorno al medesimo circolo si circoscriua [b] il quadrato FGHI, e per lo Scolio alla 9. propositione del quarto, il quadrato ABCD sarà la metà del quadrato circoscritto FGHI, e presi poi i quadrati ABCD, FGHI, come basi di due parallelepipedi, sopra i quali si concepiscano descritti due parallelepipedi, che habbiano la medesim'altezza, quale hà il cono, e cilindro proposto. Perche i parallelepipedi, che hanno la medesim'altezza [c] sono come le basi, però il parallelepipedo, la di cui base è il quadrato ABCD, al parallelepipedo, la di cui base è il quadrato FGHI, sarà come la base ABCD alla base FGHI: ma il quadrato ABCD è la metà del quadrato FGHI, il parallelepipedo dunque descritto sopra il quadrato ABCD, sarà la metà del parallelepipedo descritto sopra il quadrato FGHI. Hor perche il parallelepipedo sopra la base FGHI è maggiore del cilindro, che hà per base il circolo ABCD (stante che lo contiene) però la metà del paral-

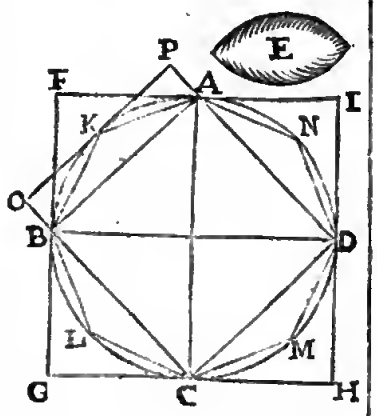
a 6.del 4.

b 7.del 4.

c 32.del 11.

lelepi-

lepipedo ſopra la baſe FGHI, ſarà maggiore, che la metà del cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD; ma il parallelepipedo ſopra la baſe ABCD è la metà del parallelepipedo ſopra la baſe FGHI, il parallelepipedo dũque ſopra il quadrato ABCD ſarà maggiore della metà del cilindro, che ha per baſe il circolo ABCD. Si ſeghino d gli archi AB, BC, CD, DA, in due parti vguali, ne i punti K, L, M, N, e ſi tirino le rette AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, AN; E per il punto K ſi faccia paſſare e la retta OP in modo, che tocchi il circolo nel punto K, e continuata concorra co' i lati DA, CB, prolongati, come in O, & P, e ſi dimoſtri, come ſi fece nella 2. prop. di queſto, che OP è parallela ad AB. Sopra il triangolo AKB, e ſopra il rettangolo APOB, ſi concepiſcano deſcritti due priſmi, che ambidue habbiano l'iſteſſa altezza del cono, e cilindro propoſto. Perche il triangolo AKB è la metà del rettangolo APOB, il priſma, la di cui baſe è il triangolo AKB, ſarà la metà del priſma deſcritto ſopra la baſe APOB (ſtante che i priſmi d'vguale altezza ſono f come le baſi.) E perche il piano APOB contiene la portione AKB del circolo, pertiò il priſma, deſcritto ſopra il piano APOB, ſarà maggiore della portione del cilindro deſcritto ſopra la portione AKB; per la qual coſa la metà del priſma, deſcritto ſopra il piano APOB, ſarà maggiore della metà della portione del cilindro ſopra la portione AKB: ma il priſma deſcritto ſopra il triangolo AKB è la metà del priſma ſopra la baſe APOB; il ptiſma dũque ſopra il triangolo AKB ſarà maggiore; che la metà della portione del cilindro deſcritta ſopra la portione AKB. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che i priſmi deſcritti ſopra i triangoli BLC, CMD, DNA, ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro, le di cui baſi ſono le portioni BLC, CMD, DNA, del circolo, le quali hanno la medeſima altezza, che il cono, e cilindro propoſto; e per conſeguenza tutt' i priſmi, deſcritti ſopra i detti triangoli, inſieme giunti, ſono maggiori della metà di tutte le portioni del cilindro, deſcritte ſopra le dette portioni del circolo. Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC &c. ſaranno diuiſi g in due parti vguali, e da i punti A, K, B, L, C &c. alle diuiſioni, ſiano tirate rette linee, e ſopra i triangoli coſtrutti ſi concepiſcano priſmi vgualmente alti col cono, e cilindro propoſto, ſi moſtrerà, come prima ſi fece, che tutti quei priſma di baſi triangolari, giunti inſieme, ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro propoſto, le quali hanno per baſi le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA del circolo. E con queſt' ordine ſi proceda in infinito. Se dunque dal cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD ſe ne leua più della metà; cioè ſe ne leui il parallelepipedo, deſcritto ſopra del quadrato ABCD; e dalle portioni, che reſtano del cilindro (le quali hanno per baſe le portioni AKB, BLC, CMD, DNA)



d 30. del 3.

e Corol. alla 17. del 3.

f Scolio alla 32. del 11.

g 30. del 3.

ſe

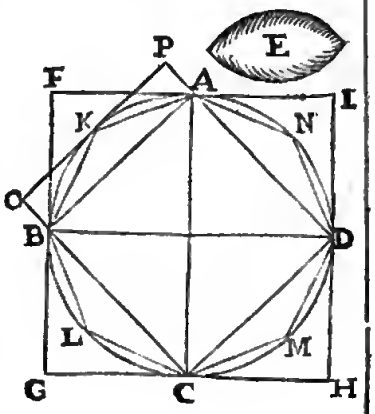
ſe ne leui vna quantità, che ſia più della metà, cioè ſe ne leuino i priſmi deſcritti ſopra i triangoli AKB, BLC, CMD, DNA; E ſimilmente dalle portioni del cilindro, che reſtano, ſe ne leui più della metà, nel modo, che antecedentemente ſi è fatto; e con queſt'ordine ſi proſeguiſca, ſempre leuando dalle portioni reſtate più della metà; ſi peruenirà finalmente a tal diminutione, che l'vltime portioni [h] del cilindro reſtate, giunte inſieme, ſaranno minori del ſolido E. Suppoſto che ſia fatta queſta continua detrattione, e le vltime portioni reſtate del cilindro ſiano quelle deſcritte ſopra le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, le quali, giunte inſieme, ſiano minori del ſolido E. Perche il triplo del cono, che hà per baſe il circolo ABCD, col ſolido E, inſieme giunti, ſono vguali al cilindro, che hà per baſe il medeſimo circolo ABCD; ſe da queſto cilindro ſi leuino le antedette portioni reſtate, e dal triplo del cono, col ſolido E, ſe ne leui il ſolido E, ch'è maggiore delle portioni detratte dal cilindro; reſterà il priſma, la di cui baſe è il poligono AKBLCMDN, e che hà la medeſima altezza del cono, è cilindro, maggiore del triplo del detto cono. Per la qual coſa il cono, la di cui baſe è il circolo ABCD, ſarà minore della terza parte del priſma, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN: ma la piramide deſcritta ſopra il medeſimo poligono, che hà la medeſima altezza col priſma, è la terza parte di eſſo priſma, come ſi è moſtrato alla 7. propoſitione, e ſuo Scolio; la piramide dunque, che hà per baſe il detto poligono, ſarà maggiore del cono di vguale altezza, che hà per baſe il circolo ABCD. Hor perche il circolo ABCD contiene il detto poligono, il cono, che hà per baſe il circolo ABCD, conterrà la piramide della medeſima altezza, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN: ma ſi è dimoſtrato, che queſta piramide è maggiore del cono, la parte ſarebbe maggiore del tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il cilindro è maggiore, che il triplo del cono.

[h] 1. del 12.

Suppoſto di nuouo, che il cilindro ſia minore, che il triplo del cono, ſarà dunque il cono maggiore della terza parte del cilindro. Hor ſia il cono maggiore della terza parte del cilindro, per quanto è il ſolido E; ſarà la terza parte del cilindro, col ſolido E, vguale al cono. Siano deſcritti i quadrati ABCD, FGHI, come prima, e ſopra di eſſi ſiano deſcritte due piramidi, che habbiano la medeſima altezza, che il cono, e cilindro. Perche le piramidi, che hanno la medeſima altezza, per la 6. propoſitione, ſono come le baſi; eſſendo il quadrato ABCD la metà del quadrato FGHI, la piramide ſopra la baſe ABCD, ſarà la metà della piramide ſopra la baſe FGHI. In oltre perche il quadrato FGHI contiene il circolo ABCD, però la piramide ſopra il quadrato FGHI ſarà maggiore, che il cono, che hà per baſe il circolo ABCD; e la metà della piramide ſopra la baſe FGHI, ſarà maggiore della metà del detto cono: ma la piramide, che hà per baſe il quadrato ABCD, è la metà della piramide ſopra del quadrato FGHI, ſarà la piramide, che hà per baſe il quadrato ABCD, maggiore, che la metà del cono ſopra del circolo ABCD. Si diuidano gli archi AB, BC, CD, DA, e ſi faccia tutta la coſtruttione di prima: poi ſopra il triangolo AKB, e ſopra il rettangolo APOB, s'intendano erette due piramidi, che habbiano la medeſima altezza, che il

cono,

cono, e cilindro propoſto, cioè che il detto cono, e queſta piramide habbiano vn medeſimo vertice. Perche le piramidi, che hanno la medeſima altezza, per la propoſ. 6. ſono come le baſi, eſſendo il triangolo AKB la metà del rettangolo APOB, ſarà la piramide ſopra il triangolo AKB la metà della piramide ſopra il rettangolo ABOP. Hor perche il rettangolo ABOP è maggiore della portione AKB del circolo; la piramide ſopra il rettangolo APOB, che hà la medeſima altezza del cono, ſarà maggiore della portione del cono, che hà per baſe la portione AKB del circolo; e la metà della piramide ſopra APOB, ſarà maggiore, che la metà della parte del cono ſopra la portione AKB del circolo. Ma la piramide ſopra AKB è vguale alla metà della piramide ſopra APOB; la piramide dunque ſopra AKB ſarà maggiore, che la metà della parte del cono ſopra la portione AKB del circolo. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'altre piramidi ſopra i triangoli BLC, CMD, DNA, ſono maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per baſi le portioni BLC, CMD, DNA, del circolo; e ſaranno tutte le dette piramidi di baſi triangolati inſieme, maggiori delle metà delle parti antedette del cono, inſieme giunte. Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſi diuidano in due parti vguali, e da i punti A, K, B, L, C, M, D, N, alle diuiſioni, ſi tirino rette linee, le piramidi deſcritte ſopra i triangoli coſtrutti, le quali habbiano la medeſima altezza col cono, iuſieme giunte, ſi moſtreranno maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per baſe le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, inſieme giunte. E con queſt'ordine ſi procederà in infinito. Se dunque dal cono, che hà per baſe il circolo ABCD, ſe ne leua vna quantità maggiore della metà, cioè ſe ne leui la piramide deſcritta ſopra il quadrato ABCD; e dalle parti reſtate del cono, cioè quelle, che hanno per baſe le portioni AKB, BLC, CMD, DNA, del circolo, ſe ne leui vna quantità maggiore della metà, cioè ſe ne leuino le piramidi, che hanno per baſe i triangoli AKB, BLC, CMD, DNA; e di nuouo dalle patti reſtate del cono, ſe ne leui vna quantità maggiore della metà, e con queſt'ordine, facendo ſempre la detrattione dalle parti reſtate, per vna quantità maggiore della metà, finalmente reſteranno tali portioni di Cono, che inſieme giunte, ſaranno minori del ſolido E. Suppoſto, che ſia fatta la continua detrattione, e le parti reſtate del cono ſiano quelle, che hanno per baſe le portioni AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, del circolo, le quali, giunte inſieme, ſiano minori del ſolido E. Hor perche la terza parte del Cilindro, inſieme col ſolido E, è poſta vguale al cono, che hà per baſe il circolo ABCD, ſe dal cono ſe ne leuano le dette parti reſtate; e dalla terza parte del cilindro,



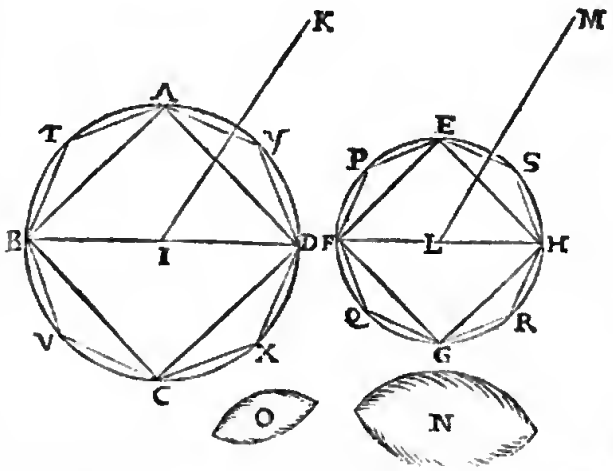
K 1. del 10.

col

col ſolido E, ſe ne leua il ſolido E, ch'è maggiore delle dette parti detratte dal cono; reſterà la piramide, la di cui baſe è il poligono AKBLC MDN, che hà la medeſima altezza, che il cilindro, maggiore della terza parte del cilindro, per la qual coſa il triplo di queſta piramide ſarà maggiore di tutto il cilindro. E perche il triplo della piramide, per la 7. propoſ. e ſuo Scolio, è vguale al priſma, che hà la medeſima baſe, ed altezza con eſſa piramide; però il priſma, deſcritto ſopra del poligono AKBLC MDN, ſarà maggiore, che il cilindro, la di cui baſe è il circolo ABCD, ed hà la medeſima altezza col detto priſma. Ma il poligono, che è baſe del detto priſma, è contenuto dal circolo ABCD, ch'è baſe del cilindro, però il priſma, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN, ſarà contenuto dal cilindro della medeſima altezza, che hà per baſe il circolo ABCD: per la qual coſa il detto priſma ſarà minore del cilindro: ma è ſtato moſtrato maggiore, ſarebbe maggiore, e minore, ch'è impoſſibile. Non dunque il Cilindro è maggiore, che il triplo del cono, ne meno, per quel che ſi è moſtrato, è minore, e perciò il cilindro, che hà per baſe il circolo ABCD, ſarà il triplo del cono della medeſima altezza, e che hà per baſe il medeſimo circolo ABCD. Per la qual coſa il detto cono ſarà la terza parte del cilindro, della medeſima altezza, e baſe, ch'era da dimoſtrarſi.

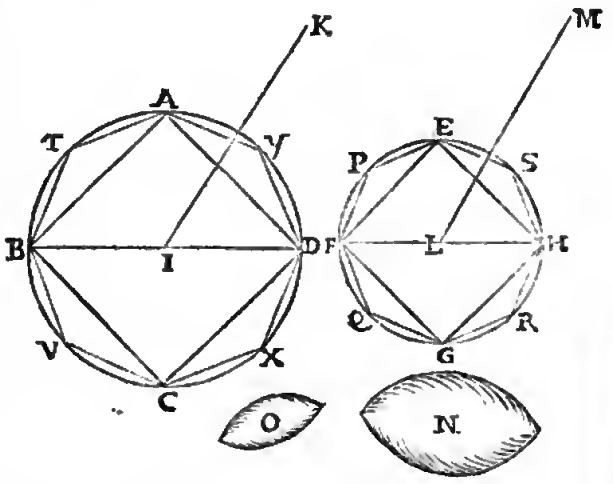
THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

I Coni, e Cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono frà loro come le baſi.



Siano eſpoſti i coni, e Cilindri, le di cui baſi ſiano i circoli ABCD, EFGH, e l'altezze vguali IK, LM. Dico che la baſe ABCD alla baſe EFGH è come il cono al cono; ed ancora come il cilindro al cilindro; cioè che la baſe ABCD alla baſe EFGH, è come il cono, ò cilindro KBCDA, ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE. Se la baſe ABCD alla baſe EFGH non è come il cono, ò cilindro KBCDA ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE, ſia la baſe ABCD alla baſe EFGH,

come il cono KBCDA alla quantità N, sarà il solido N, ò maggiore, ò minore del cono MFGHE. Suppoſto prima, che il solido N ſia minore del cono MFGHE, per quanto è il solido O, in modo, che i due solidi N, ed O, insieme giunti, siano vguali al cono EFGHM. Nel circolo EFGH si descriua [a] il quadrato EFGH; si diuidano gli archi EF, FG, GH, HE, [b] in due parti vguali ne i punti P, Q, R, S; si tirino le rette EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE; e si dimoſtri, come



a 6. del 4.

b 30. del 3.

si fece nella ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, che ſe dal cono EFGHM ſe ne detrae la piramide, che hà per baſe il quadrato EFGH, e l'altezza LM, e dalle parti reſtate del cono, ſe ne detraggono le piramidi, che hanno per baſe i triangoli EPF, FQG, GRH, HSE, e l'altezza ML; e dall'altre parti reſtate dal cono ſe ne detrae ſimilmente più della metà, e con queſt'ordine in infinito, finalmente ſi peruerrà à tanta diminutione, che le parti reſtate del cono, insieme giunte, [c] saranno minori del solido O. Suppoſto che ſia fatta la continua detrattione, e le parti reſtate del cono ſiano quelle, che hanno per baſe le portioni EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, del circolo, le quali, giunte insieme, ſono minori del ſolido O. E perche il cono EFGHM è vguale à i due solidi N, ed O, giunti insieme, ſe dal cono EFGHM ſi leuano le antedette parti, reſtate, e da i ſolidi N, ed O insieme, ſi leui il ſolido O, ch'è maggiore delle parti detratte dal cono, reſterà la piramide, che hà per baſe il poligono EPFQGRHS, e l'altezza LM, maggiore del ſolido N. Suppoſto queſto.

c 1. del 10.

Si deſcriua nel circolo ABCD il poligono ATBVCXDY ſimile al poligono EPFQGRHS, e ſi tirino i diametri BD, FH. Perche per la 6. propoſitione, le piramidi della medeſima altezza ſono come le baſi, però la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il poligono ATBVCXDY al poligono EPFQGRHS: ma il poligono al poligono, per il Corollario alla 2. propoſitione di queſto, è come il circolo ABCD al circolo EFGH; ſarà la piramide alla piramide, come [d] il circolo ABCD al circolo EFGH. Et eſſendo, per ipoteſi, il circolo ABCD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al ſolido N; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il cono ABCDK al ſolido N; e permutando, la piramide ATBVCXDYK al co-

d 11. del 5.

no

ABCDK, e sarà come la piramide EPFQGRHSM al solido N: ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK (stante che è contenuta da esso cono nell'istesso modo, che il poligono è contenuto dal circolo,) però sarà f minore del solido N: la piramide EPFQGRHSM fù antecedentemente mostrata maggiore, sarà la piramide EPFQGRHSM maggiore, è minore del solido N, ch'è impossibile. Non dunque il solido N è minore del cono EFGHM; onde è impossibile, che il circolo ABCD al circolo EFGH sia come il cono ABCDK ad vna quantità minore dell' cono EFGHM. Nell'istesso modo si mostrerà essere impossibile, che il circolo EFGH al circolo ABCD sia come il cono EFGHM ad vn altra quantità minore del cono ABCDK.

* la piramide EPFQGRHSM

e 16. del 5.

f 14. del 5.

Sia di nuouo il solido N maggiore del cono EFGHM. S'intenda come il solido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn altra quantità, che sia il solido O; e permutando, il solido N al cono MFGHE g sarà come il cono KBCDA al solido O: ma il solido N è posto maggiore del cono MFGHE, sarà il cono KBCDA h maggiore del solido O; cioè il solido O sarà minore del cono KBCDA. In oltre perche il circolo ABCD al circolo EFGH, per ipotesi, è come il cono ABCDK al solido N, inuertendo, il circolo EFGH al circolo ABCD K sarà come il solido N al cono ABCDK: ma, per costruttione, il solido N al cono ABCDK è come il cono EFGHM al solido O, sarà il circolo EFGH al circolo ABCD, come il cono EFGHM al solido O: ma il solido O è dimostrato minore del cono ABCDK; il circolo dunque EFGH al circolo ABCD, sarà come il cono EFGHM ad vna quantità minore del cono ABCDK, che è contro quello, che si è concluso nella prima parte. Non dunque il solido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno, per quel che si è mostrato, è minore; sarà dunque il solido N vguale al cono EFGHM. Ed essendo il circolo ABCD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al solido N, & il solido N è mostrato vguale al cono EFGH; sarà il circolo ABCD al circolo EFGH come il cono ABCDK al cono EFGHM, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

g 16. del 5.

h 14. del 5.

K Corol. alla 4. del 5.

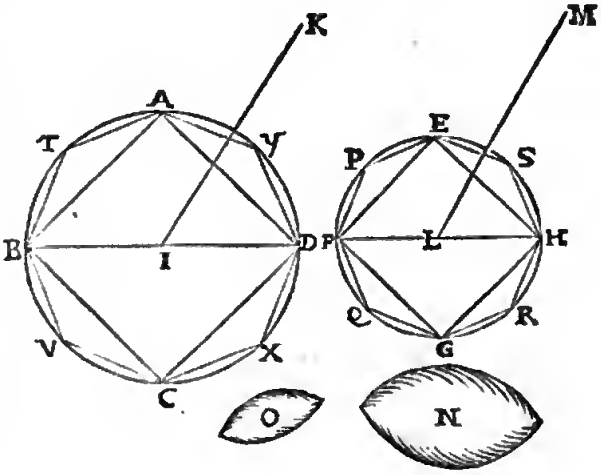
l 11. del 5.

Perche per l'antecedente propos. il cono è la terza parte del cilindro, che hà la medesima altezza, e base, ne segue il cilindro, che hà per base il circolo ABCD, e l'altezza IK, essere multiplice del cono ABCDK, come il cilindro, che hà per base il circolo EFGH, e l'altezza LM, è multiplice del cono EFGHM; e perciò il cilindro, la di cui base è ABCD, al cilindro, la di cui base è EFGH, m sarà come il cono ABCDK al cono EFGHM: ma si è dimostrato, che il cono ABCDK al cono EFGHM è come il circolo ABCD al circolo EFGH; sarà il cilindro, che hà per base il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, e l'altezza LM, come il circolo ABCD al circolo EFGH; cioè come la base alla base. Per la qual cosa i coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le loro basi, ch'era da dimostrarsi.

m 15. del 5.

COROLLARIO.

Perche il cono KABCD al cono MEFGH è come il circolo ABCD al circolo EFGH, ed il cilindro. la di cui baſe è il circolo AB CD, al cilindro, la di cui baſe è il circolo EFGH, è parimente come il circolo ABCD al circolo EFGH; ſarà il cono ABCDK al cono EFGHM, come[n] il cilindro, la di cui baſe è il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui baſe è il circolo EFGH, e l'altezza LM. D'onde è manifeſto, che i cilindri, i quali hanno le medeſime baſi, che i coni, e le medeſime altezze, ſono frà di loro come i coni.

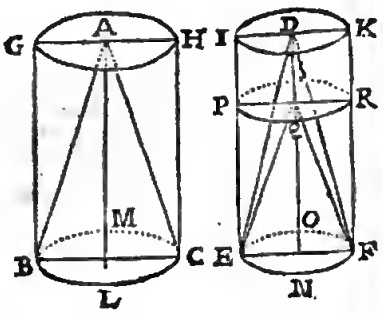


n 11. del 5.

SCOLIO DEL CLAVIO.

I coni, e cilindri, che ſono come le baſi, hanno vna medeſima altezza.

Habbia il cono ABC al cono DEF, ouero il cilindro GBCH al cilindro IEFK, l'iſteſſa proportione, che hà la baſe BLCM alla baſe ENFO. Dico che i coni ABC, DEF, ouero i cilindri GBCH, IEFK, hanno la medeſima altezza. Se non hanno la medeſima altezza, uno de i due ſarà più alto. Supponiamo, che il più alto ſia il cono DEF, ouero il cilindro IEFK. Sia ſegato il cono DEF, ò cilindro IEFK,



da

* parallelo alla baſe ENFO

da qualche piano PQRS talmente, che l'altezza interpoſta frà i piani PQRS, ENFO, ſia vguale all'altezza del cono ABC, ouero del cilindro GBCH. Si conſiderino i coni, cioè ABC, ed il cono, la di cui baſe è il circolo ENFO, ed il vertice nel piano PQRS, i quali hanno le medeſime baſi, ed altezze co'i cilindri GBCH, PEFR, e per il Coroll. antecedente, il cono ABC al cono interpoſto frà i piani PR, EF, ſarà come il cilindro GBCH al cilindro PEFR: ma il cono ABC al cono interpoſto frà i piani PR, EF,* [a] *è come la baſe BLCM alla baſe ENFO (ſtante che hanno la medeſima altezza) ſarà il cilindro GBCH al cilindro PEFR,* [b] *come la baſe BC alla baſe EF: ma la baſe BC alla baſe EF, per ipoteſi, è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK, ſarà dunque il cilindro GBCH al cilindro PEFR,* [c] *come il medeſimo cilindro GBCH al cilindro IEFK; imperciochè i cilindri PEFR, IEFK,* [d] *ſono frà di loro vguali; la parte ſarà vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il cono DEF è più alto, che il cono ABC, ma hanno la medeſima altezza, che era prima da dimoſtrarſi.*

a 11. del 12.
b 11. del 5.
c 11. del 5.
d 9. del 5.

Di nuouo perche i cilindri GBCH, PEFR, hanno per coſtruttione, la medeſima altezza, per la propoſ. antecedente, il cilindro GBCH al cilindro PEFR ſarà come la baſe BLCM alla baſe ENFO: ma, per ipoteſi, la baſe BLCM alla baſe ENFO è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK; il cilindro dunque GBCH al cilindro IEFK [e] *ſarà come il medeſimo cilindro GBCH al cilindro PEFR; dal che i cilindri PEFR, IEFK* [f] *ſono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il cilindro IEFK è più alto, che il cilindro GBCH, ma hanno la medeſima altezza. Per la qual coſa i coni, e cilindri, che ſono come le baſi, hanno la medeſima altezza, ch'era da dimoſtrarſi.*

e 11. del 5.
f 9. del 5.

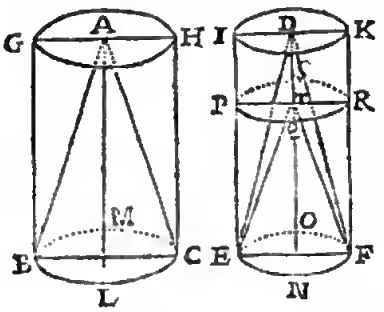
COROLLARIO.

Da qui è manifeſto, che i coni, ò cilindri, i quali hanno la medeſima altezza, e le baſi vguali, ſono frà di loro vguali, ſtante che i coni, ò cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono come le baſi, ſi che ſe le baſi ſono vguali, quei coni, ò cilindri ſaranno frà di loro vguali.

E ancora manifeſto, che gli vguali coni, ò cilindri, che hanno vguali baſi, ò la medeſima, haueranno vna medeſima altezza.

Nell'antecedente figura ſiano i coni vguali ABC, DEF, ouero i cilindri vguali GBCH, IEFK, che habbiano le vguali baſi BC, EF. Dico che hanno la medeſima altezza. Se non hanno la medeſima altezza, vno ſarà più alto dell'altro, ſuppoſto che il cono DEF, ouero il cilindro IEFK, ſia il più alto. Si faccia paſſare il piano PR, che ſeghi il cono, ò cilindro, e ſia equidiſtante alla baſe EF talmente, che l'altezza interpoſta frà i piani PQRS, ENFO, ſia vguale all'altezza del cono ABC, ò del cilindro GBCH; ſopra la baſe EF ſi concepiſca eleuato il cono TEF, il di cui vertice ſia nel piano PQR.

Perche



Perche i coni ABC, TEF, ed i cilindri GBCH, PEFR hanno vna medeſima altezza, e per la propoſitione antecedente, il cono ABC al cono TEF, ed il cilindro GBCH al cilindro PEFR, ſarà come la baſe BC alla baſe EF: e perche le baſi ſono frà di loro vguali, perciò il cono ABC ſarà vguale al cono TEF, ed il cilindro GBCH vguale al cilindro PEFR: ma per ipoteſi, il cono ABC è vguale al cono DEF, ed il cilindro GBCH è vguale al cilindro IEFK, ne ſegue il cono TEF eſſere vguale al cono DEF, ed il cilindro PEFR vguale al cilindro IEFK, la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il cono DEF ò cilindro IEFK, e più alto: ma hanno la medeſima altezza.

Di più gli vguali coni, è cilindri, che hanno la medeſima altezza, hanno le baſi vguali, ſtante che, per l'antecedente propoſitione, i coni, e cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono come le baſi. Se dunque i coni ſono frà di loro vguali, ò i cilindri ſono frà di loro vguali, le baſi ancora ſaranno frà di loro vguali.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

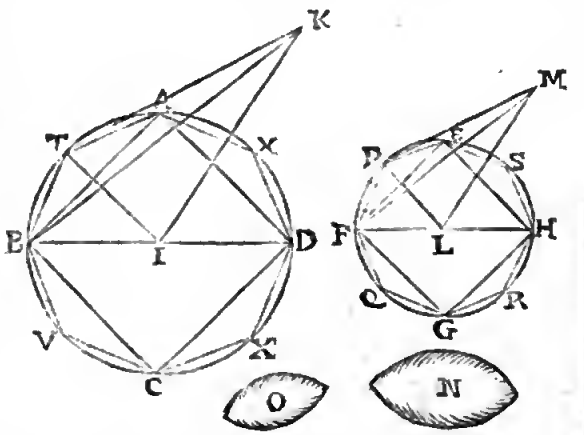
I ſimili coni, e cilindri hanno triplicata proportione, che i diametri delle loro baſi.

Siano le baſi de i ſimili coni, e cilindri, i circoli ABCD, EFGH, le aſſi IK, LM, & i diametri delle baſi ſiano BD, FH; e ſuppoſto prima, che li propoſti coni, e cilindri ſiano retti. Dico, che il cono al cono, & il cilindro al cilindro, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. Se il cono al cono, & il cilindro al cilindro, non hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ſi prenda qualche ſolido N talmente, che il cono ABCDK al ſolido N habbia triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH; il ſolido N ò ſarà minore, ò maggiore, ò vguale al cono EFGHM.

Suppoſto prima, che il ſolido N ſia minore del cono EFGHM, per quanto è il ſolido O; sì che i due ſolidi O, & N, inſieme giunti, ſiano vguali al cono EFGHM. Si faccia la medeſima coſtruttione, e dimoſtratione, come nell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri la piramide, la di cui baſe è il poligono EPFQGRHS, ed il vertice M, eſſere maggiore del ſolido N. Si tirino poi le rette BK, TK, PM, FM, i triangoli KTB, MPF, ſaranno due di quelli, che contengono le piramidi ATBVCXDYK, EPFQQGRHSM; ſi tirino le rette TI, PL. Perche i coni ABCDK, EFGHM, ſono ſimili, per la 24. definit. dell'11. la proportione dell'aſſe KI al diametro BD ſarà come l'aſſe ML al diametro FH; e preſa la metà de i conſequenti, per lo ſcolio dopo la propoſ. 22. del quinto, KI ad IB ſarà come ML ad LF: ma gli angoli KIB, MLF, ſono retti, ſtante che i coni ſo-

no ſup-

no ſuppoſti retti,ſaranno i triangoli KIB,MLF [a] equiangoli,cioè l'angolo KBI vguale all'angolo MFL, e l'angolo BKI vguale all'angolo LMF; e ſarà KB à BI [b] come MF ad FL.Per l'iſteſſa ragione i triangoliKIT,MLP ſono ſimili, e ſarà KT, à TI come MP à PL. In oltre perche i poligoni ATBVCXDY, EPFQGRHS, per coſtruttione, ſono ſimili, gli archi TB, PF ſaranno frà loro ſimili; e perciò gli angoli TIB, PLF ſono frà loro vguali;dal che i triãgoli iſoſceli ITB,LFP,ſono frà di loro ſimili,e la proportione di IB à BT [c] ſarà come quella di LF ad FP, come ancora IT à TB ſarà come LP à PF.Hor eſſendoſi dimoſtrato,che KB à BI,è comeMF ad FL,e la proportione di BI à BT è come quella di FL ad FP, per l'egualità, ſarà KB à BT,[d] come MF ad FP. Similmente eſſendoſi dimoſtrato, che KT à TI è come MP à PL, e la proportione di TI à TB è come quella di PL à PF, per l'egualità,ſarà KT à TB [e] come MP PF; ed inuertendo,BT à TK [f] ſarà come FP à PM. Parimẽte eſſendoſi dimoſtrato KB à BT,come MF ad FP,ed è BT à TK,come FP à PM. per l'egualità,BK à KT [g] ſarà come MF ad FP,dal che i triãgoli KTB,MPF,ſarãno frà loro [h] ſimili.Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,che tutti gli altri triãgoli,che circõdano la piramide ATBVCXDYK, ſono ſimili à i corriſpõdenti triãgoli,che circondano la piramide EPFQGRHSM.E perche i poligoni,che ſono baſi di eſſe piramidi,ſono ſimili per coſtruttione,i lati di eſſi poligoni ſaranno di moltitudine vguali; dal che i triangoli ſimili, che circondano le derte piramidi,ſono di numero vguale, e per la 9.definit.dell'11. le piramidi ſaranno frà di loro ſimili;e per l'8.prop.di queſto,ſaranno in triplicata proportione de i loro lati hõmologhi;cioè la piramideKBIT alla piramide MFLP hà triplicata proportione,che il lato BT al lato homologo EP.Di più perche i triãgoli ITB,LPF,ſono ſimili,ſarà TB à BI [k] come PF ad FL; e permutando,TB à PF [l] ſarà come BI ad FL: ma BI ad FL è come il doppio BD al doppio FH,però TB à PF [m] ſarà come BD ad FH.E perche la piramide alla piramide ſi diſſe hauer [c] triplicata proportione, che TB à PF; e la retta TB à PF è come BD ad FH, hauerà la piramide alla piramide triplicata proportione, che BD ad FH: ma il cono ABCDK al ſolido N ſi diſſe hauere la medeſima proportione triplicata,che hà BD ad FH; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM è come il cono ABCDK [n] al ſolido N: e permutando, la piramide ATBVCXDYK al conoABCDK [o] ſarà come la piramideEPFQGRHSM

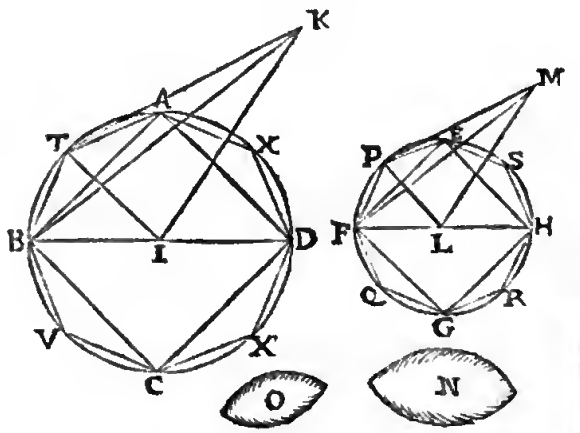


al ſo-

a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1.defin. del 6.
d 22. del 5.
e 22. del 5.
f Coroll.alla 4. del 5.
g 22.del 5.
h 4 definit. del 6.
k 1. definit. del 6.
l 16. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.

al ſolido N. Ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK (ſtante, che la baſe della piramide è contenuta dalla baſe del cono) ſarà la
p 14. del 5 piramide EPFQGRHSM [p] minore del ſolido N. E perche fù moſtrata maggiore, ſarebbe maggiore, è minore del ſolido N, ch'è impoſſibile. Non dunque il ſolido N è minore del cono EFGHM. Per la qual coſa è impoſſibile, che il cono ABCDK habbia triplicata proportione ad vna quantità minore del cono EFGHM, di quella, che hà BD ad FH. E nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà eſſere impoſſibile, che il cono EFGHM, habbia ad vna quãtità minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà FH à BD.

Di nuouo, ſuppoſto che N ſia maggiore del cono EFGHM. Perche i
q 1. definit. del 6. triangoli FLP, BIT, ſono ſimili, ſarà PF à TB, [q] come FL à BI, e duplicando gli conſeguenti, PF a TB ſarà come FH à BD. In oltre, perche il cono ABCDK al ſolido N hà triplicata proportione, che BD ad FH, e per quel che ſi è moſtrato la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, hà parimẽte triplicata proportione, che BD ad FH, ſarà il cono ABCDK al ſolido N come la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM; ed inuertendo, il ſolido N al cono ABCDK, ſarà come la piramide EPFQGRHSM alla piramide ATBVCXDYK: ma la piramide EPFQGRHSM alla ſimile piramide ATBVCXDYK, per l'8. propoſitione, hà triplicata proportione, che il lato PF al lato homologo TB, hauerà il ſolido N al cono ABCDK [r] triplicata proportione, che PF à TB: ma PF à TB è dimoſtrata eſſere come FH à BD, ne ſegue la proportione del ſolido N al cono ABCDK eſſere triplicata della proportione, che hà FH à BD. Suppoſto queſto. S'intenda come il ſolido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn'altra quantità, che ſia il ſolido O. Se dunque il ſolido N al cono ABCDK è come il cono EFGHM alla quantità O, & il ſolido N è poſto maggiore del cono EFGHM,
r 14. del 5. ſarà ancora il cono ABCDK [u] maggiore del ſolido O. Hor eſſendoſi dimoſtrata la proportione del ſolido N al cono ABCDK eſſere triplicata, che la proportione di HF è DB, & il ſolido N al cono ABCDK, per coſtruttione, è come il cono EFGHM al ſolido O; hauerà il cono EFGHM al ſolido O triplicata proportione, che HF à DB: ma il ſolido O è dimo-



u 14. del 5.

ſtrato

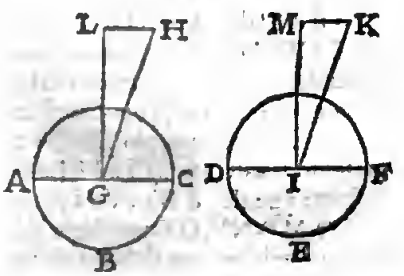
ſtrato minore del cono ABCDK, il cono dunque EFGHM hauerà ad vn ſolido minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà HF à DB; contro à quello, che s'è concluſo nella prima parte. Non dunque il ſolido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno è minore, in conſeguenza il ſolido N ſarà vguale al cono EFGHM.

Finalmente perche il cono ABCDK al ſolido N hà triplicata proportione, che BD ad FH, & il ſolido N è vguale al cono EFGHM, hauerà il cono ABCDK al cono EFGHM triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH.

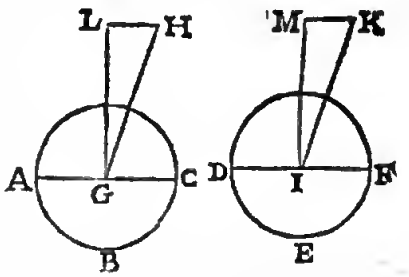
E perche il cono [x] è la terza parte del cilindro, che hà la medeſima baſe, ed altezza; la proportione dunque del cono al cono ſarà come il cilindro al cilindro: ma ſi è dimoſtrata la proportione del cono al cono eſſere triplicata, che la proportione de i diametri delle baſi; ne ſegue la proportione del cilindro al cilindro eſſere triplicata, che la proportione del diametro della baſe al diametro della baſe. Per la qual coſa i coni, & i cilindri ſimili, ſono in triplicata proportione, che i diametri delle baſi, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo. x 10. del 12.

Di nuouo ſi dimoſtrerà col P. Clauio, che i ſimili cilindri ſcaleni, ſono in triplicata proportione de i diametri delle loro baſi.

Siano le baſi de i ſimili coni, e cilindri ſcaleni, i circoli ABC, DEF, e le aſſi ſiano GH, IK. Dico, che il cono ABCH al cono DEFK, & il cilindro al cilindro hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro AC al diametro DF. Si concepiſcano ſopra le medeſime baſi ABC, DEF, due coni, e cilindri retti, i quali habbiano la medeſim'altezza co'coni, e cilindri ſcaleni, le di cui aſſi ſiano GL, IM. Si faccia paſſare vn piano per le rette LG, GH, ed vn'altro per le rette IM, IK, i quali ſeghino le baſi ABC, DEF, per le rette AC, DF; perche i punti G, & I ſono i centri de i circoli, però le rette AC, DF, ſaranno i diametri di eſſi circoli; & eſſendo le aſſi LG, MI perpendicolari à i piani ABC, DEF, i piani, che paſſano per le rette LG, GH, [y] ed MI, IK, ſono retti, cioè perpendicolari alle baſi ABC, DEF; per la qual coſa le perpendicolari, che cadono da i punti H, & K, ſopra le baſi ABC, DEF, [z] caderanno nelle communi ſettioni GC, IF, e gli angoli HGC, KIF, ſaranno le inclinationi, che fanno le aſſi alle baſi ABC, DEF; e per la ſimilitudine de i coni, e cilindri, gli angoli HGC, KIF ſaranno frà di loro vguali. Ma gli angoli CGL, FIM, ſono ancora frà loro vguali, ſtante che ſono retti; i reſtanti angoli dunque HGL, KIM, ſono [a] frà di loro vguali. Si tirino le rette LH, MK. Perche i coni, e cilindri retti, ſi ſono poſti hauere la medeſim'altezza, che i ſcaleni, però le rette LH, MK, ſono parallele à i diametri AC, DF; dal che gli angoli in L, ed M, ſono retti, ed i reſtanti angoli H, & K, ſono frà di y 19. del 11. z 38. del 11. a 32. del 1.



loro vguali. Si che i triangoli GHL,IKM, [b] ſono equiangoli, e la proportione di GH à GL ſarà come [c] quella di IK ad IM; e permutando, GH ad IK,ſarà come [d] GL ad IM. Di nuouo perche i coni,e cilindri ſcaleni ſono ſuppoſti ſimili, la proportione di HG ad AC, [e] ſarà come KI à DF;e permutando,HG ad IK ſarà come AC ad FD: [f] ma GH ad IK è dimoſtrata eſſere come LG ad MI,ſarà dunque LG ad MI [g] come AC à DF; e permutando, LG ad AC [h] ſarà come MI ad FD. Per la qual coſa i coni, e cilindri retti, le di cui baſi ABC, DEF, e le aſſi LG, MI,ſarãno frà loro ſimili,e per quel che ſi è moſtrato nella prima parte, la proportione del cono retto ABCL al cono retto DEFM,e del cilindro retto al cilindro retto,ſarà triplicata, che la proportione del diametro AC al diametro DF. Hor perche i coni, e cilindri ABCL, ABCH, hanno la medeſim'altezza, e ſono ſopra la medeſima baſe ABC, per il Coroll. all'11. propoſitione di queſto, il cono retto ABCL ſarà vguale al cono ſcaleno ABCH, ed il cilindro ABCL ſarà vguale al cilindro ABCH. E per l'iſteſſa ragione il cono DEFM ſarà vguale al cono DEFK, ed il cilindro DEFM ſarà vguale al cilindro DEFK. Per la qual coſa il cono ABCL al cono DEFM ſarà come il cono ABCH al cono DEFK; ed il cilindro ABCL al cilindro DEFM, ſarà come il cilindro ABCH al cilindro DEFK. Ma ſi è dimoſtrato il cono, ò cilindro ABCL, al cono, ò cilindro DEFM, hauere triplicata proportione di quella,che hà il diametro AC al diametro DF,ne ſegue il cono ABCH al cono DEFK, ed il cilindro ABCH al cilindro DEFK, hauere triplicata proportione,che il diametro AC al diametro DF; e perciò i ſimili coni,e cilindri,ò che ſiano retti, ouero ſcaleni,hanno triplicata proportione, che i diametri delle baſi, ch'era da dimoſtrarſi.



b 32. del 1. c 4. del 6. d 16. del 5. e 1. definit. del 6. f 16. del 5. g 11. del 5. h 16. del 5.

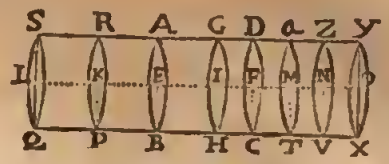
THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se il cilindro è ſegato da vn piano equidiſtante alle baſi, il cilindro al cilindro ſarà come l'aſſe all'aſſe.

Sia il cilindro ABCD ſegato dal piano GH, parallelo à gli oppoſti piani AB,CD,il quale ſegarà ancora l'aſſe EF in qualche punto I. Dico,che il cilindro ABHG al cilindro GHCD è come l'aſſe EI all'aſſe IF. S'intenda continuato il propoſto cilindro da ambe due le parti, e con eſſo ſia prolungato il rettangolo EBCF; e nell'aſſe EF [a] ſiano preſe quante parti ſi vogliano EK,KL,vguali ad EI,e ſiano ancora preſe le parti FM,MN,NO, ciaſcuna vguale ad IF; e da i punti I, K,L,M, N,O, [b] ſi tirino le rette IH, KP,LQ,MT,NV,OX,parallele alla retta EB,ouero FC,le quali tutte [c] ſaranno vguali, e parallele frà di loro. Si concepiſca poi muouerſi il rettangolo LQXO intorno all'aſſe LO, poſto immobile, il lato QX nella intiera reuolutione, per la definitione 21. dell'11. deſcriuerà le ſuperficie cilindrica,e le rette LQ,KP,IH,MT,NV,OX, per il terzo poſtulato,deſcriueranno i circoli QS, PR, HG,TA,VZ,XY: e per la definit. 21. dell'11. il

a 3. del 1. b 31. del 1. c 34. del 1.

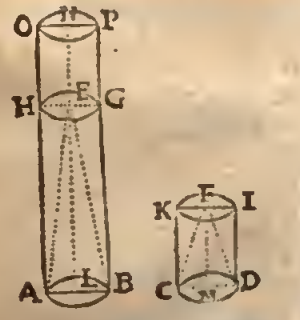
ſolido SQXY ſarà cilindro, e le portioni, SQPR, RPBA, ABHG, GHCD, DCTa, aTVZ, ZVKY, ſono cilindri di baſi vguali, ſtante che i circoli, che hanno i ſemidiametri vguali ſono frà di loro vguali. E perche le parti LK, KE, EI, per coſtruttione, ſono vguali, ed vgualmente inclinate à i circoli SQ, RP, GH, però i cilindri SQPR, RPBA, ABHG, haueranno vguali altezze; hanno, per quel che ſi è detto, baſi vguali, e per il Coroll. alla propoſ. 11. ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i cilindri GHCD, DCTa, aTVZ, ZVXY, ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa la retta LI ſarà multiplice di EI, come il cilindro QHGS è multiplice del cilindro ABHG. E per l'iſteſſa ragione la retta IO ſarà multiplice di IF, come il cilindro GHXY è multiplice del cilindro GHCD. Hor ſe LI è vguale ad IO, i cilindri SQHG, GHXY, haueranno vguali altezze; ſono poſti ſopra vguali baſi, e per il Corollario all'11. propoſitione, ſono frà di loro vguali. Similmente ſe LI è maggiore di IO, il cilindro SQHG ſarà maggiore del cilindro GHXY; e ſe LI è minore di IO, il cilindro SQHG ſarà minore del cilindro GHXY. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia EI, la ſeconda IF, la terza il cilindro ABHG, e la quarta il cilindro GHCD. Perche LI, multiplice della prima, ſe è maggiore di IO, multiplice della ſeconda, ancora il cilindro SQHG, multiplice della terza, è maggiore del cilindro GHXY, multiplice della quarta; e ſe LI è vguale, ò minore di IO, anco il cilindro SQHG ſarà vguale, ò minore del cilindro GHXY: per la 6. defin. del 5. libro, la proportione dell'aſſe EI, prima quantità, all'aſſe IF, ſeconda quantità, ſarà come il cilindro ABHG, terza quantità, al cilindro GHCD, quarta quantità. Per la qual coſa ſe vn cilindro è ſegato da vn piano, che ſia parallelo alle baſi oppoſte, quello ſarà ſegato in due cilindri, talmente, che il cilindro al cilindro ſarà come l'aſſe all'aſſe; ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

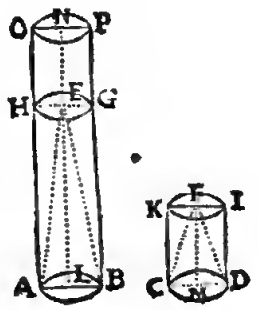
I coni, e cilindri poſti ſopra vguali baſi ſono come le loro altezze.

Siano prima ſopra le baſi vguali AB, CD, due coni retti EBA, FDC, e due cilindri retti HABG, KCDI, le di cui aſſi, ò altezze ſiano le rette LE, MF. Dico, che il cono EBA al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza LE all'altezza MF. S'intenda continuato il cilindro HABG verſo HG, e l'aſſe LE verſo N; a ſi tagli EN vguale ad MF, ed



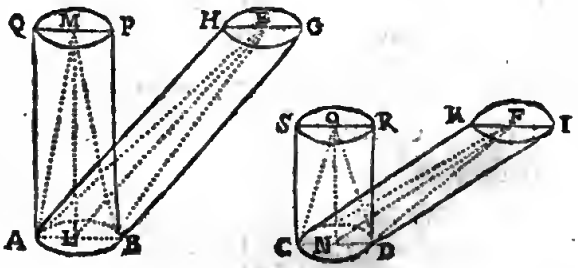
a 3. del 6.

intorno al centro N s'intenda il circolo OP, equidistante al circolo HG, e per la defin. 21. il solido OHGP è cilindro. Perche i circoli HG, CD sono frà di loro vguali, e le assi NE, FM, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Coroll. alla propositione 11. i cilindri KCDI, OHGP, saranno frà di loro vguali; e perciò il cilindro HABG al cilindro OHGP, sarà come il medesimo cilindro HABG [b] al cilindro KCDI: ma il cilindro HABG al cilindro OHGP, per l'antecedente propositione, è come l'asse LE all'asse EN, sarà il cilindro HABG al cilindro KCDI, [c] come l'asse LE all'asse EN, cioè all'asse MF. Finalmente essendo il cono EAB la terza parte [d] del cilindro HABG, ed il cono FCD è la terza parte del cilindro KCDI, ne segue il cilindro HABG al cilindro KCDI, essere [e] come il cono EAB al cono FCD: ma si è dimostrato, che il cilindro HABG al cilindro KCDI, è come l'asse EL all'asse FM, il cono dunque EAB, al cono FCD, [f] è come l'asse LE all'asse FM. Per la qual cosa i coni retti, e cilindri retti, che hanno vguali basi, sono come le loro altezze, eh'era da dimostrarsi nel primo luogo.



b 7. del 5.
c 11. del 5.
d 10. del 12.
e 15. del 5.
f 11. del 5.

Supposto di nuouo, che i coni EAB, FCD, ed i cilindri HABG, KCDI, posti sopra le vguali basi AB, CD, siano scaleni; le di cui altezze siano ML, ON. Dico, che il cono EAB al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza ML all'altezza ON. Sopra le basi AB, CD, siano costrutti i coni retti MAB, OCD, ed i cilindri retti QABP, SCDR, i quali habbiano le medesime altezze ML, ON, e per quel che si è dimostrato nella prima parte, il cono retto MAB al cono retto OCD, come ancora il cilindro retto QABP al cilindro retto SCDR, è come l'altezza ML all'altezza ON. In oltre perche i cilindri QABP, HABG, sono posti sopra la medesima base AB, & hanno la medesima altezza, per il Coroll. all'11. propositione, sono frà di loro vguali; e per l'istessa ragione i cilindri SCDR, KCDI, sono frà di loro vguali; dal che il cilindro QABP al cilindro SCDR, sarà come il cilindro HABG al cilindro KCDI: ma il cilindro QABP al cilindro SCDR, per quel che si è dimostrato nella prima parte, è come l'altezza ML all'altezza ON, il cilindro dunque HABG al cilindro KCDI, sarà come l'altezza ML all'al-



tezza

tezza ON. Di più perche il cilindro HABG, per la 10. propoſit. di queſto, è il triplo del cono EAB, ed il cilindro KCDI è il triplo del cono FCD, ſarà il cilindro HABG al cilindro KCDI, g come il cono EAB al cono FCD; ma ſi è dimoſtrato il cilindro HABG al cilindro KCDI, eſſere come l'altezza ML all'altezza ON; ſarà il cono EAB al cono FCD, h come l'altezza ML all'altezza ON. Per la qual coſa i coni, e cilindri, che hanno vguali baſi, ſono frà di loro come le altezze, ch'era da dimoſtrarſi.

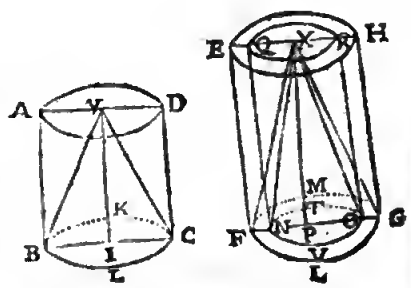
g 15. del 5.

h 11. del 5.

SCOLIO.

La conuerſa facilmente la faremo nel ſeguente modo.

I coni, e cilindri, i quali hanno l'iſteſſa proportione, che le loro altezze, ſe non hanno la medeſima baſe, haueranno le baſi vguali.



Siano i cilindri ABCD, EFGH, ed i coni TBC, XFG, le di cui altezze ſiano le rette TI, XP, ed habbia il cilindro ABCD al cilindro EFGH, ouero il cono TBC al cono XFG, l'iſteſſa proportione, che le loro altezze. Dico che le baſi BC, FG ſono frà di loro vguali: Se le baſi non ſono frà di loro vguali, vna ſarà maggiore dell'altra: ſuppoſto che la baſe FG ſia maggiore della baſe BC, ſarà dunque il ſemidiametro PG maggiore del ſemidiametro IC. Si tagli PO vguale ad IC; nel piano MFLG, intorno al centro P coll'interuallo PO, ſi deſcriua il circolo NVOT, ſopra la baſe NVOT s'intenda eleuato il cilindro QNOR all'altezza XP, e ſopra la medeſima baſe NVOT, alla medeſima altezza XP, ſia deſcritto il cono XNVOT. Perche i cilindri ABCD, QNOR, ſono ſopra le vguali baſi BC, NO, per l'antecedente propoſitione, il cilindro ABCD al cilindro QNOR ſarà come l'altezza TI all'altezza XP: mà, per ipoteſi, il cilindro ABCD al cilindro EFGH, è come l'altezza TS alla medeſima altezza XP; ſarà dunque il cilindro ABCD al cilindro QNOR a come il medeſimo cilindro ABCD al cilindro EFGH; dal che i cilindri QNOR, EFGH b ſono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque la baſe FG è maggiore della baſe BC, mà ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, ch'eſſendo il cono TBC al cono XFG, come l'altezza TI all'altezza XP, le baſi FG, BC, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 11. del 5.

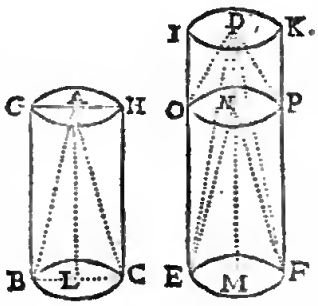
b 9. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Gli vguali coni, e cilindri, hanno le baſi reciproche

alle

alle altezze; e quei coni, e cilindri, che hanno le basi reciproche alle altezze, sono frà di loro vguali.



Siano gli vguali coni ABC,DEF,e gli vguali cilindri GBCH, IEFK, le di cui basi BC,EF, e le altezze AL, DM. Dico che la base BC alla base EF è come l'altezza DM all'altezza AL. Se le altezze AL,DM,sono frà di loro vguali, saranno i cilindri GBCH,IEFK, come le basi: ma i cilindri GBCH,IEFK, [p] per ipotesi,sono frà loro vguali, saranno le basi BC, EF frà di loro vguali; per la qual cosa la base BC alla base EF sarà come l'altezza DM all'altezza AL, che era da prouarsi.

p 11.del 12.

Se le altezze AL, DM, sono ineguali; sia la maggiore DM; si tagli da DM [a] la parte NM, vguale ad AL, e per il punto N si concepisca passare il piano OP, equidistante al piano EF, in modo, che ne risulti il cilindro OEFP, e per la 14.propositione, il cilindro IEFK al cilindro OEFP, sarà come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i cilindri GBCH, IEFK, per ipotesi, sono fra di loro vguali,preso il cilindro OEFP, come terza quantità, sarà il cilindro GBCH al cilindro OEFP; come [b] il cilindro IEFK [b] al medesimo cilindro OEFP; ma il cilindro GBCH al cilindro OEFP è come la base BC alla base EF [c] (stante che le altezze AL, NM sono per costruttione, vguali) il cilindro dunque IEFK al cilindro OEFP, [d] sarà come la base BC alla base EF: ma il cilindro IEFK al cilindro OEFP, è come DM ad NM; sarà dunque la base BC alla base EF, [e] come DM ad NM; la retta NM è vguale ad AL, sarà la base BC alla base EF, come l'altezza DM all'altezza AL; ch'era da dimostrarsi. Ne i coni, se l'altezza DM è vguale all'altezza AL,essendo i coni ABC, DEF, vguali, per il Corollario all'11.propositione, le basi BC, EF sono frà loro vguali, e però la base BC alla base EF, sarà come l'altezza DM all'altezza AL.

a 3.del 1.
b 7.del 5.
c 14.del 12.
d 11.del 5.
e 11.del 5.

Se l'altezza DM è maggiore dell'altezza AL, si faccia NM vguale ad AL, e si formi il cono ENF, e per la 14.propositione,il cono DEF al cono NEF sarà come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i coni ABC,DEF, sono supposti vguali, sarà il cono ABC al cono NEF, come il cono DEF [f] al medesimo cono NEF; ma il cono ABC al cono NEF [g] è come la base BC alla base EF (stante che le altezze NM, AL sono vguali) sarà la base BC alla base EF [h] come il cono DEF al cono NEF: E perche si disse che il cono DEF al cono NEF è come DM ad NM,sarà la base BC alla base EF [K] come l'altezza DM all'altezza NM,ouero AL ch'era da dimostrarsi.

f 7.del 5.
g 11. del 12.
h 11.del 5.
K 11. del 5.

Di nuouo sia la base BC alla base EF come l'altezza DM all'altezza AL. Dico che i cilindri IEFK, GBCH sono frà di loro vguali; e similmente i coni DEF,ABC, sono frà di loro vguali. Se le altezze AL,DM,

sono

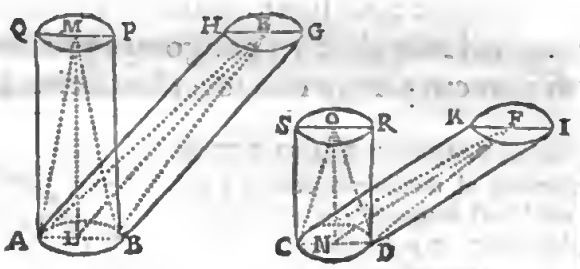
ſono fra di loro vguali, eſsendo BC ad EF, come DM ad AL, e le rette DM, AL, ſono vguali, le baſi ancora BC, EF, [l] ſaranno fra di loro vguali; ſi che i cilindri GBCH, IEFK, hanno le altezze, e baſi vguali, e per il Corollario all'vndecima propoſitione di queſto, i cilindri GBCH, IEFK, ſono fra di loro vguali; e per la medeſima ragione i coni ABC, DEF, ſono fra di loro vguali. Se l'altezza DM è maggiore di AL, ſi faccia la coſtruttione come prima, ſarà NM vguale ad AL: ma i cilindri, che hanno vguali altezze, per l'vndecima propoſitione, ſono come le baſi; ſarà la baſe BC alla baſe EF, come il cilindro GBCH al cilindro OEFP. Suppoſto queſto. Perche per ipoteſi, BC ad EF è come DM ad AL, ed AL, è vguale ad NM, ſarà BC ad EF, come DM ad NM; ma DM ad NM, per la 14. propoſitione, è come il cilindro IEFK al cilindro OEFP, ſarà il cilindro IEFK al cilindro OEFP, [m] come BC ad EF; ſi è moſtrato BC ad EF eſſere come il cilindro GBCH al cilindro OEFP; il cilindro dunque IEFK al cilindro OEFP [n] ſarà come il cilindro GBCH al medeſimo cilindro OEFP. Per la qual coſa i cilindri GBCH, IEFK, ſono frà di loro vguali. Finalmente perche DM è altezza commune del cono DEF, e del cilindro IEFK, ed AL è altezza commune del cono ABC, e del cilindro GBCH, eſſendoſi dimoſtrato che i cilindri GBCH, IEFK, ſono frà di loro vguali, le loro terze parti ſaranno frà di loro vguali: ma i coni, per la 10. propoſitione, ſono la terza parte de i cilindri, ne ſegue i coni ABC, DEF, eſſere frà di loro vguali. Per la qual coſa i coni, e cilindri de'quali le baſi ſono reciproche all'altezze, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

l 14. del 5.

m 11. del 5.

n 11. del 5.

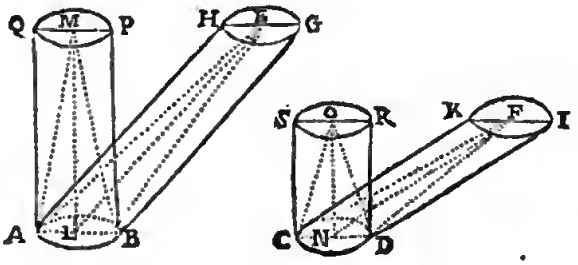
Il medeſimo ſi dimoſtra de i coni, e cilindri ſcaleni, Siano i coni EAB, FCD ed i cilindri HABG, KCDI, le di cui baſi AB, CD, e le altezze ML, ON. Dico prima, che ſe il cono EAB è vguale al cono FCD, & il cilindro HABG è vguale al cilindro KCDI, la proportione della baſe AB alla baſe CD [o] ſarà come l'altezza ON all'altezza ML. Sopra le baſi AB, CD, ſi coſtituiſcano i coni retti MAB, COD, ed i cilindri retti QABP, SCDR, che habbiano le medeſime altezze ML, ON. Perche i coni MAB EAB, hanno la medeſima altezza ML, e ſono ſopra la medeſima baſe AB, per il Corollario all'11. propoſitione, ſono frà di loro vguali. E ſimilmente i loro tripli, cioè i cilindri QABP, HABG, ſono fra di loro vguali. Per l'iſteſſa ragione il cono OCD è vguale al cono FCD, ed il cilindro SCDR è vguale al cilindro KCDI: ma i coni EAB, FCD ſono, per ipoteſi, frà di loro vguali, perciò i coni MAB, OCD, ſono frà di loro vguali; e ſimilmente i cilindri QABP, SCDR, ſono frà di loro vguali; e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, la baſe AB alla baſe



o 14. del 12.

CD,

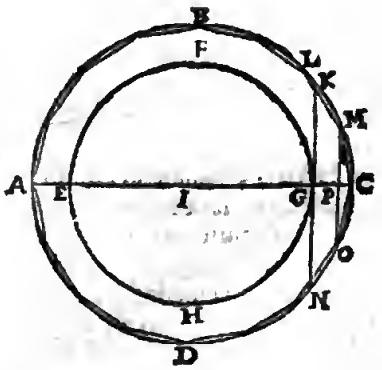
CD, ſarà come l'altezza NO all'altezza LM, che era prima da dimoſtrarſi.



Di nuouo, ſuppoſto, che AB à CD ſia come NO ad LM. Dico che i coni EAB, FCD, ſono frà di loro vguali, e parimente i cilindri HABG, KCDI, ſono frà di loro vguali. Suppoſta la medeſima coſtruttione. Ne i cilindri retti QABP, SCDR, eſſendo la baſe AB alla baſe CD, come l'altezza ON all'altezza ML, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, i cilindri QABP, SCDR, ſono fra di loro vguali, come ancora i coni MAB, OCD ſono frà di loro vguali: ma i cilindri QABP, SCDR, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i cilindri HABG, KCDI, ed i coni MAB, OCD, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i coni EAB, FCD, ne ſegue i cilindri HABG, KCDI, eſſere frà di loro vguali, come ancora i coni EAB, FCD, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVI.

Dati due circoli intorno di vn medeſimo centro, deſcriuere nel maggiore vn poligono equilatero, che i lati ſiano di numero paro, e non tocchino il circolo minore.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, intorno al medeſimo centro I; ſi vuole nel maggior circolo ABCD deſcriuere vn poligono equilatero, che i lati ſiano di numero paro, e che non tocchino il circolo minore EFGH. Per il centro I ſi tiri il diametro AC, il quale ſegarà la circonferenza del circolo interno ne i punti per eſſempio E, & G, nel punto G, [a] ſopra il diametro AC, ſi erigga la perpendicolare GK, concorrente colla circõferenza del circolo eſterno in qualche punto K; e per il Corollario alla 16. propoſitione del 3. la retta KG toccarà il circolo FGH nel punto G. Perche l'arco AKC è maggiore dell'arco KC, ſe ne detragga la metà AB, e dal reſtante BC, ſe ne leui la metà BL, e di nuouo dal reſtante LC ſe ne leui la metà LM, e con

a 11. del 1.

queſt'

queſt'ordine in infinito, ſi peruerrà finalmente [b] ad vna quantità minore di KC; ſuppoſto che quella ſia l'arco MC, ſi tiri la retta MC. Dico che la retta MC ſarà vno de i lati di quel poligono, che ſi è propoſto deſcriuere. Si diuida l'arco BL nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono in LC; e di nuouo l'arco AB, (che è vguale à BC) ſi diuida nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti BC; ſiche il ſemicircolo ABC ſarà diuiſo in parti vguali, e ciaſcuna di quelle parti ſarà vguale ad MC; ſi diuida poi l'arco ADC nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono nell'arco ABC; ſarà diuiſa tutta la circonferenza del circolo ABCD in parti vguali, e di numero paro; ſi tirino le rette, che ſottendono quegli archi, e ſarà deſcritto il poligono equilatero, e di lati di numero paro. Dico finalmente, che i lati di queſto poligono non toccano la circonferenza del circolo interno. Dal punto M ſi faccia cadere [c] la retta MP perpendicolare al diametro AC. Perche gli angoli KGP, MPG ſono retti, le rette KG, MP, ſono [d] frà di loro parallele; e perche la retta KG tocca il circolo interno nel ſolo punto G, la retta dunque MP cade totalmente fuori del circolo FGH, ne può mai toccarlo in neſſun punto, ſtante che non può mai concorrere colla retta KN, per la diffinitione delle parallele. Hor ſe la retta MO non può mai toccare il circolo FGH, molto meno lo può toccare la retta MC, la quale è più lontana dal circolo FGH di quello, che è la retta LO; e per l'iſteſſa ragione neſſun'altro lato del poligono deſcritto toccarà il detto circolo, ſtante che il circolo FGH, è vgualmente diſtante dal circolo ABCD; per la qual coſa nel circolo maggiore ſi è deſcritto il poligono equilatero, di lati di numero paro, il quale non tocca il circolo minore, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

[b] 1. del 10.

[c] 12. del 1.

[d] 28. del 1.

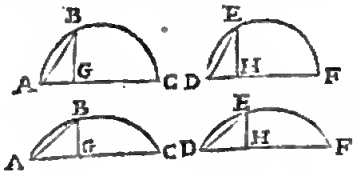
COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che ſe dall'eſtremo di quel lato del poligono iſcritto, che concorre col diametro, cade vna retta perpendicolare al medeſimo diametro, come fà la retta MP, quella in neſſun modo può toccare il circolo interno.

LEMMA I.

Se ſiano due qualunque vguali portioni ABC, DEF, di circoli vguali, e ſia l'arco AB vguale all'arco DE, è da i punti B, ed E, cadano le rette BG, EH, perpendicolari alle corde AC, DF. Dico che la retta BG ſarà vguale ad EH, la retta AG vguale ad HD, e la retta GC vguale ad HF.

Si tiri la retta AB. Perche gli archi ABC,DEF, per ipoteſi, ſono vguali,
a 29. del 3. *perciò le rette AC,DF, a ſaranno frà di loro vguali. Similmente eſſendo l'arco ABC vguale all'arco DEF, e gli archi AB,DE, per ipoteſi, ſono vguali, i reſtanti archi EC,EF, ſaranno frà di loro vguali; dal che gli angoli BAC, EDF, oppoſti à gli vguali archi*
b 27. del 3. *BC,EF, b ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i due triangoli BAG, EDH, angoli retti in G, ed H. Eſſendoſi dimoſtrato gli angoli BAG, EDH frà loro vguali, i due angoli BAG,BGA del triangolo BAG, ſaranno vguali à i due angoli EDH,EHD*

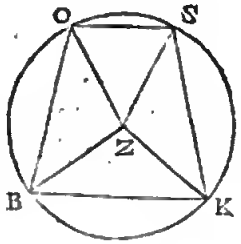


c 29. del 3. d 26. del 1. *del triangolo EDH, il lato BA è vguale al lato ED (ſtante che c ſoſtendono gli archi vguali AB,DE, ſaranno i reſtanti due lati BG,GA d vguali à i reſtanti due lati EH,HD, cioè il lato BG è vguale al lato EH, ed il lato AG è vguale al lato DH: ma le rette AC,DF, ſono frà di loro vguali, detrattone le parti vguali AG,DH, reſtano le parti GC,HF, frà di loro vguali, che era da dimoſtrarſi.*

LEMMA II.

Se nel circolo ſia deſcritto vn quadrilatero, che habbia tre lati vguali, ed il quarto lato ſia minore di ciaſcheduno de gli vguali, tirate le rette dal centro del circolo à gli angoli del quadrilatero, l'angolo nel centro, oppoſto ad vno de i lati vguali, ſarà ottuſo.

Nel circolo O B K S, il di cui centro Z, ſia iſcritto il quadrilatero OBKS, del quale i tre lati OB,BK,KS, ſiano frà loro vguali ed il quarto lato OS ſia minore del lato BK. Dico che tirate le rette ZB,ZK,ZS.ZO, l'angolo BZK, oppoſto al lato BK, ſarà ottuſo. Perche i lati SK,KB,BO, ſono frà loro vgua-



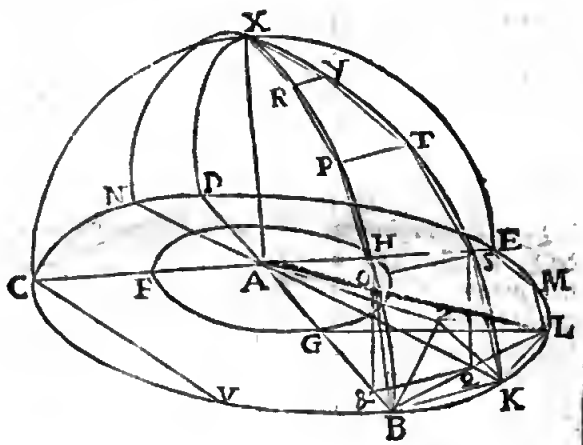
a 28. del 3. *li, perciò gli archi SK,KB,BO, a ſono frà loro vguali, e gli angoli al centro SZK, KZB,*
b 27. del 3. *BZO, b ſono frà di loro vguali. Di nuouo, eſſendo i lati ZK, ZB, del triangolo ZKB, vguali à i lati ZO,ZS del triangolo ZSO, e la baſe KB è maggiore della baſe SO, c l'angolo BZK ſarà maggiore dell'angolo OZS. E perche gli angoli*
c 25. del 1. *OZB,BZK,KZS, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono frà di loro vguali: in conſeguenza l'angolo OZS ſarà minore di ciaſcuno degli angoli OZB,BZK,KZS: ma i quattro angoli OZB,BZK,KZS,SZO, intorno al centro Z, ſono vguali*
d 13. del 1. *à quattro angoli retti, percio ciaſcun'angolo OZB,BZK,KZS, ſarà maggiore d'vn angolo retto, per la qual coſa l'angolo BZK ſarà ottuſo, ch'era da dimoſtrarſi.*

THEO-

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Date due sfere intorno ad vn medesimo centro, descriuere nella maggior sfera vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della minor sfera.

Siano proposte due sfere intorno al medesimo centro A, nella maggiore si vuole iscriuere vn solido pollicdro, cioè di molti lati, talmente, che i piani, che contengono il solido polliedro, non tocchino la superficie della minor sfera. Siano segate le proposte sfere da vn piano, che passi per il commune centro A, le communi settioni nelle superficie sferiche, come CBED, FGH saranno circonferenze di circoli massimi, stante che reuoluti quei semicircoli, che descrissero le sfere, le loro circonferenze congruono colle settioni CBED, FGH, cioè colla circonferenza CBED nella maggior sfera, e con la circonferenza FGH nella minore, le quali, per costruttione, sono intorno al medesimo centro A, ed in vn medesimo piano; si tirino i due diametri DB, CE, che si seghino ad angoli retti nel centro A, e dal punto G, nel piano CBL si tiri la retta GL ad angoli retti con la retta AB, [a] la quale concorrerà con la circonferenza BLE in qualche punto L, e toccarà il circolo FGH [b] nel punto G; si tiri la retta LB, e dal punto C, nell'arco CB, si addatti [d] la retta CV vguale alla retta LG. Perche LG è perpendicolare ad AB, il triangolo LGB sarà rettangolo in G, dal che la retta LB [e] sarà maggiore di LG: ma LG è vguale ad VC, sarà LB maggiore di CV, e l'arco LKB sarà maggiore [f] dell'arco CV; si detragga dal quadrante BLE la sua metà, e dal restante se ne leui la metà, e con quest'ordine si proseguisca fin à tanto, che resti vn arco [g] minore dell'arco CV; e supposto che l'arco restato sia KB; perche KB è minore di CV, e l'arco CV è minore di BL, sarà l'arco BK minore dell'arco BL. E proseguendo come nella propos. antecedente, nel maggior circolo CBED si descriua vn poligono equilatero, che i lati siano pari di numero, e non tocchino la circonferenza FGH del circolo minore; sarà la retta BK vno di quei lati; si addattino i lati KL, LM, ME, ciascuno vguale à BK, & il medesimo si faccia ne gli altri quadranti; si tiri poi la



a 11. del 1.

b Coroll. alla 16. del 6.

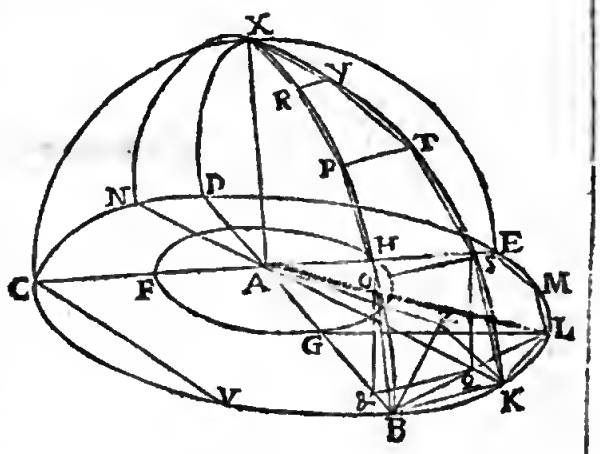
d 1. del 4.

e 17. del 1.

f 28. del 3.

g 1. del 10.

h 12. del 11. retta KA, la quale si prolunghi fino ad N, e nel punto A si erigga h la retta AX perpendicolare al piano CBED, concorrente colla superficie della sfera in qualche punto X; per la retta AX, e per il diametro CE, si faccia passare vn piano, che seghi le proposte sfere; similmente per la retta AX, e per ciascuno de i diametri DB, NK, si facciano passare altri piani, che seghino le sfere, e per quel che si è detto, le communi settioni de i piani seganti, e delle superficie sferiche, saranno circonferenze di circoli massimi; siano quelle le notate CXE, NXK, DXB. E perche la retta AX è perpendicolare al piano CBED, i piani de i massimi circoli CXE,
K 19. del 11. NXK, DXB k saranno perpendicolari al piano CBED: ma i diametri CE, NK, DB, nel medesimo circolo CBED, sono frà di loro vguali, però i mezzi circoli BED, CXE, NXK, DXB, saranno frà di loro vguali, ed i quadranti, cioè le loro quarte parti BLE, BPX, KTX, EX, sono frà di loro vguali. Per la qual cosa quanti lati del poligono descritto sono nel quadrante BLE, altretanti se ne possono adattare in ciascuno de i quadranti BPX, KTX: si adattino dunque in questi i lati BO, OP, PR, RX, KS, ST,
l 1. del 4. TY, YX. l Perche i lati BK, KL, LM, ME, sono frà di loro vguali, e sono ancora vguali à quelli adattati ne i quadranti BPX, KTX, però tutti i lati, adattati in essi quadranti, sono frà di loro vguali. Si tirino le rette OS, PT, RY, e da i punti O, S, alle rette AB, AK si
m 12. del 1. faccino cadere m le perpendicolari O&, SQ, e si congiunga &Q. Perche O& è nel piano DXB, il quale è retto al piano CBED, essendo O& perpendicolare alla communi settione AB, sarà ancora
n 38. del 11. n perpendicolare al piano CBED. Nell'istesso modo si proverà, che la retta SQ è perpendicolare al medesimo piano
o 6. del 11. CBED: per la qual cosa le rette O&, SQ, sono frà di loro parallele: ma gli archi OB, SK, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Lemma primo, le rette O&, SQ, sono frà di loro vguali; le quali, essendo parallele, saranno in conseguenza vguali, e parallele: si che le rette OS, &Q che congiungono gli estremi, saranno
p 33. del 1. p frà di loro vguali, e parallele, & il quadrilatero O&QS sarà parallelogrammo. Similmente essendo gli archi BO, KS frà di loro vguali, e le rette O&, SQ, perpendicolari à i diametri DB, NK, le parti &B, QK, saranno frà di loro vguali: ma, per la definitione del circolo, i semidiametri AB, AK, sono frà di loro vguali; se da essi se ne derraggono le parti vguali &B, QK, resta A& vguale ad AQ,



e sarà

e ſarà la proportione di A& ad &B, come quella di AQ à QK; dal che la retta BK [q] ſarà parallela ad &Q. Ma ſi è dimoſtrata OS parallela alla medeſima &Q, le due BK, OS, ſaranno [r] frà di loro parallele, e le rette OB,SK, che le congiungono, ſaranno [t] nel medeſimo piano, douc ſono le parallele OS, BK: per la qual coſa il quadrilatero OBKS ſara vna figura piana. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il quadrilatero POST è figura piana, come ancora il quadrilatero RPTY, ed il triangolo XRY. Dal centro A ſi concepiſcano tirate rette linee à i punti O,S,P,T,R,Y, e ſarà fatto il ſolido XBKA, che ſarà compoſto di più piramidi, le di cui baſi ſono i piani BOSK,POST,PTYR,XRY ed hanno per vertice commune il punto A. Se per il centro A,e per li punti L,ed M, ſi facciano paſſare altri diametri, per i quali, e per la retta XA, ſi facciano paſſare altri piani, che ſeghino la medeſima ſfera, queſti diſegnaranno nella ſuperficie della ſfera altre circonferenze di circoli maſſimi; e facendoſi in eſſe il medeſimo, che ſi è fatto ne gli archi XB,XK, e ſimilmente quanto ſi è fatto nella quarta parte XBE della ſfera; ſi faccia ancora nell'altre quarte parti XED,XDC,XCB, ed il ſimile ſi faccia nel emiſfero inferiore, e ſarà coſtrutto nella maggior ſfera il ſolido polliedro propoſto. Dico che i piani, che contengono queſto ſolido polliedro non toccano la ſuperficie della minor ſfera GHF.

Perche l'arco BK, per coſtruttione, è minore dell'arco CV, la retta BK [u] ſarà minore della retta CV: ma la retta CV è vguale ad LG, ſarà dunque LG maggiore della retta BK. Di nuouo perche Q& è parallela al lato BK, i triangoli ABK, A&Q [x] ſono equiangoli, e la proportione di AB à BK [y] ſarà come A& ad &Q: e permutando, AB ad A& [z] ſarà come BK ad &Q: ma AB è maggiore di A&, ſarà BK [a] maggiore di &Q. E perche &Q è vguale ad OS, ſarà BK maggiore di OS. Dal centro A al piano OBKS [b] ſi faccia cadere la perpendicolare AZ, e ſi tirino le rette BZ, KZ. Perche la retta AZ è perpendicolare al piano OBKS, ſarà ancora perpendicolare alle rette BZ, KZ, [c] e perciò gli angoli AZB, AZK, ſono retti. Nel triangolo AZB angolo retto in Z, il quadrato dell'ipotenuſa AB è [d] vguale à i quadrati de i due lati AZ,ZB. Similmente nel triangolo AZK, angolo retto in Z, il quadrato di AK è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZK: ma le rette AB, AK, ſono frà di loro vguali, i quadrati dunque delle due AZ,ZB, ſaranno vguali à i quadrati delle due AZ,ZK; ſe ne leui il quadrato del commun lato AZ, reſta il quadrato di ZB vguale al quadrato di ZK, e la retta ZB vguale alla retta ZK. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le rette tirate dal punto Z à i punti O, ed S, ſono frà di loro vguali, e ſono vguali alle due ZB, ZK: per la qual coſa il punto Z è ſarà il centro di quel circolo, che paſſa per li punti O,B,K,S, ed il quadrilatero OBKS ſarà iſcritto nel circolo. E perche i lati OB,BK, KS, [f] ſono frà di loro vguali (ſtante che gli archi OB,BK,KS, ſono frà di loro vguali) ed il lato BK è moſtrato maggiore di OS, per l'antecedente Lemma 2. l'angolo BZK ſarà ottuſo, ed il lato BK [g] ſarà maggiore di BZ: ma la retta GL è dimoſtrata maggiore di BK, ſarà la retta GL molto maggiore di BZ. Finalmente nel triangolo AGL, angolo retto in G, il quadrato di AL [h] è vguale à i quadrati de i due AG,GL, e ſimilmente nel triangolo AZB, an-

golo

q 2. del 6. r 9. del 11. t 7. del 11.

u 29. del 3.

x 29. & 32. del 1. y 4 del 6. z 16. del 5. a 14. del 5. b 11. del 11.

c 3. definit. del 11.

d 45. del 1.

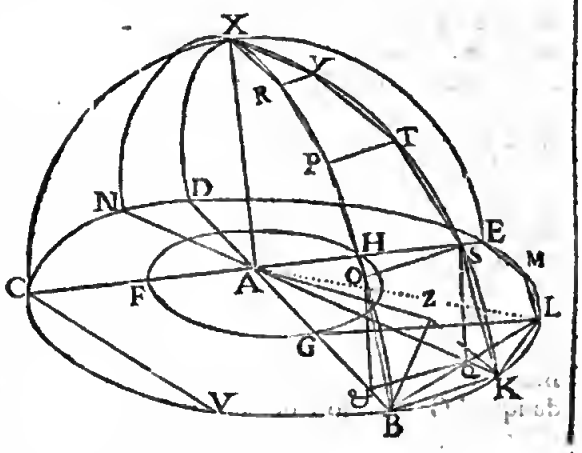
e 9. del 3.

f 29. del 3.

g 19. del 2.

h 47. del 1.

golo retto in Z, il quadrato di AB è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZB: ma i ſemidiametri AB,AL, ſono frà di loro vguali,ſaranno i quadrati delle due LG,GA,vguali à i quadrati delle due BZ,ZA;e perche il quadrato di LG è maggiore del quadrato di BZ (ſtante che LG è dimoſtrata maggiore di BZ,) ſe da i quadrati delle due LG,GA, ſe ne leua il quadrato di LG, e da i quadrati delle due BZ,ZA, ſe ne leua il quadrato della minore BZ, reſta il quadrato di AG minore del quadrato di AZ, e la retta AZ maggiore di AG. E perche la retta AG è ſemidiametro della minor ſfera, ſarà AZ maggiore,che il ſemidiametro della minor ſfera; per la qual coſa il punto Z cade lontano dalla ſuperficie della minor ſfera; e perciò il piano OBKS non tocca la ſuperficie della minor ſfera. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,che neſſun piano del ſolido polliedro deſcritto, tocca la ſuperficie della ſfera minore. Per la qual coſa nella maggior ſfera ſi è iſcritto vn ſolido polliedro di faccie di numero paro, i di cui pianì non toccano la ſuperficie della minor ſfera,deſcritta intorno al medeſimo centro della maggiore, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



SCOLIO.

Se in vn altra ſfera, ſarà iſcritto vn ſolido polliedro, ſimile al ſolido polliedro iſcritto nell'antecedente ſfera, il ſolido polliedro, iſcritto in vna delle ſfere, al ſimile ſolido polliedro, iſcritto nell'altra ſfera, hauerà triplicata proportione, che il diametro dell'vna, al diametro dell' altra ſfera.

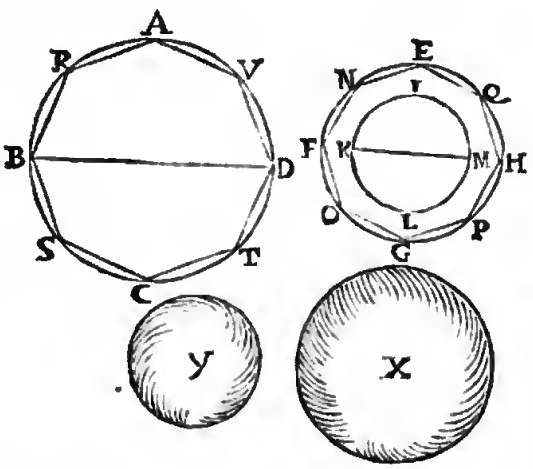
Perche tirato da i centri delle ſfere à tutti gli angoli de i ſimili polliedri linee rette, quei ſolidi polliedri ſaranno riſoluti in tante piramidi; e perche i ſolidi polliedri ſi ſuppongono ſimili, però le piramidi dell'vno ſono ſimili alle corriſpondenti piramidi dell'altro: ma le piramidi ſimili, per l'8. propoſitione, ſono in triplicata proportione, che i loro lati homologhi, la piramide dunque ABKSO, dell'antecedente figura, alla corriſpondente piramide nell'altro ſimile polliedro, hauerà triplicata proportione, che il lato homologo AB, ch'è ſemi-

diame-

diametro della sfera CBE, al lato homologo della corrispondente piramide nell'altro polliedro, che sarà ancora semidiametro di quella sfera, nella quale è iscritto quel polliedro. E nell'istesso modo tutte l'altre piramidi del polliedro descritto nella sfera CBE, alle corrispondenti piramidi dell'altro simile polliedro, haueranno triplicata proportione, che i loro lati homologhi, pigliando quei lati, che sono semidiametri delle sfere; dal che tutte le piramidi del polliedro, descritto nella sfera CBE, prese come antecedenti, à tutte le piramidi del simile polliedro, descritto in altra sfera, prese come conseguenti, K saranno come K 12. del 5.
vn antecedente ad vn conseguente, cioè come la piramide ABKSO alla corrispondente piramide nell'altro polliedro. Ma la piramide ABKSO, alla corrispondente piramide nell'altro polliedro, hà triplicata proportione, che il lato AB, che è semidiametro della sfera CBED, al lato homologo della corrispondente piramide nell'altro polliedro, che è semidiametro dell'altra sfera; cioè la piramide ABKSO alla corrispondente piramide, nell'altro polliedro haurà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto l'altro polliedro; e perciò tutto il polliedro, descritto nella sfera CBED, à tutto il simile polliedro, descritto nell'altra sfera, haurà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto il simile polliedro. Ma i semidiametri delle sfere sono come i diametri delle medesime, il polliedro dunque descritto nella sfera CBED, al polliedro simile descritto in altra sfera, haurà triplicata proportione, che il diametro DB, della sfera CBED, al diametro della sfera, nella quale è descritto il simile polliedro, come si disse.

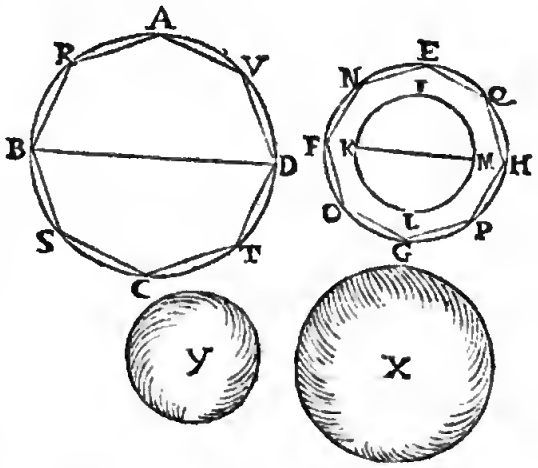
THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

Le sfere sono frà di loro in triplicata proportione de i loro diametri.



Siano le sfere ABCD, EFGH, i di cui diametri BD, FH. Dico che la sfera ABCD alla sfera EFGH hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. Se la sfera ABCD alla sfera EFGH non hà la proportione triplicata del diametro BD al diametro FH, habbia la sfera ABCD ad vn altra sfera, la proportione triplicata, che hà il diametro BD al diametro FH; quella ò sarà minore della sfera EFGH, come IKLM, ouero sarà maggiore, come la sfera X.

ra X. Supposto prima, che sia minore, e sia quella la sfera IKLM posta intorno al medesimo centro della sfera EFGH.



Si iscriua nella sfera EFGH, per l'anteeedente propos. vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della sfera minore IKLM, e sia quello il solido polliedro ENFOGPHQ. Sia poi iscritto nella sfera ABCD vn solido polliedro, simile al polliedro ENFOGPHQ, per l'antecedente Coroll. il polliedro ARBSCTDV, descritto nella sfera ABCD, al simile solido polliedro ENFOGPHQ descritto nella sfera EFGH, hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH: ma la sfera ABCD alla sfera IKLM, per costruttione, hà la medesima proportione triplicata del diametro BD al diametro FH; la proportione dunque della sfera ABCD alla sfera IKLM, sarà come quella del solido polliedro ARBSCTDV al solido polliedro ENFOGPHQ; è permutando, la sfera ABCD al solido polliedro ARBSCTDV, sarà come la sfera IKLM al solido polliedro ENFOGPHQ. Ma la sfera ABCD è maggiore del solido polliedro ARBSCTDV, sarà la sfera IKLM [b] maggiore del solido polliedro ENFOGPHQ; la parte maggiore del tutto, ch'è impossibile. Non dunque la sfera ABCD alla sfera IKLM hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. D'onde è manifesto essere impossibile, che la sfera ABCD habbia ad vn solido minore della sfera EFGH triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. E nell'istesso modo si dimostrerà essere impossibile, che la sfera EFGH habbia ad vn solido minore della sfera ABCD triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD.

[a] 16. del 5.

[b] 14. del 5.

Di nuouo, supposto che la sfera ABCD habbia ad vn solido maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, e sia quel solido la sfera X. Perche la sfera ABCD alla sfera X hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, e per il Corollario antecedente, il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ, hà la medesima triplicata proportione, che hà il diametro BD al diametro FH, sarà la sfera ABCD alla sfera X come il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ; ed inuertendo, la sfera X alla sfera ABCD sarà come il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV: ma per il Coroll. anteeedente, il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV hà triplicata proportione, che il diametro FH al

diame-

diametro BD, hauerà dunque la sfera X alla sfera ABCD triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD, Suppoſto queſto.

Si concepiſca come la sfera X alla sfera ABCD, così la sfera EFGH ad vn'altra sfera, che ſia Y; permutando, la sfera X alla sfera EFGH, ſarà [c] come la sfera ABCD alla sfera Y: ma la sfera X è poſta maggiore della sfera EFGH, ne ſegue la sfera ABCD [d] eſſere maggiore della sfera Y, cioè la sfera Y ſarà minore della sfera ABCD. Di nuouo eſſendoſi dimoſtrato, che la sfera X alla sfera ABCD hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, e ſi è fatta la sfera X alla sfera ABCD, come la sfera EFGH alla sfera Y, la sfera dunque EFGH alla sfera Y hauerà triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD: per la qual coſa la sfera EFGH hauerà ad vn ſolido minore della sfera ABCD, triplicata portione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, ch'è contro à quello, che ſi è concluſo nella prima parte. Non dunque la sfera ABCD hauerà ad vna sfera maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ne men., per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, hauerà ad vna sfera minore della sfera EFGH triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ed in conſeguenza la sfera ABCD alla sfera EFGH hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, ch'era da dimoſtrarſi.

[c] 16. del 5.

[d] 14. del 5.

COROLLARIO.

Perche tanto la sfera alla sfera, quanto il polliedro, deſcritto in vna di eſſe, al ſimile polliedro deſcritto nell'altra, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ſarà manifeſto, che la sfera alla sfera è come il ſolido polliedro, al ſolido polliedro.

APPENDICE.

Della quale ſi è parlato nel fine del decimo Elemento.

Date due qualunque linee rette, frà loro incommenſurabili in lunghezza, ritrouare altre grandezze, come figure piane, ò ſolide, frà di loro incommenſurabili.

Siano eſpoſte le rette A, & B frà di loro incommenſuraaili in lunghezza. Si troui frà le due A, & B [a] vna media proportionale, che ſia la retta C. Dico che tutte le figure piane ſimili deſcritte ſopra le rette A, & C ouero ſopra le rette C, & B ſono frà di loro incommenſurabili, e tutt'i ſolidi d'vguali altezze, che hanno

[a] 13. del 6.

per baſi le figure piane ſimili deſcritte ſopra le rette A, & C, ouero C, & B ſono frà di loro incommenſurabili. Similmente tutti i circoli, di cui diametri ſono le rette A, & C, ouero C, & B ſono frà di loro incommenſurabili, e tutti i coni, e cilindri di vguali altezze, le di cui baſi ſiano i circoli deſcritti intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B ſono frà loro incommenſurabili.

A ——————
C ——————
B ——

b 13. del 6. *Perche i piani ſimili, e ſimilmente poſti ſopra le rette A, & C* [b] *hanno duplicata proportione, che li loro lati homologhi, cioè la figura piana deſcritta ſopra la retta A alla figura ſimile, e ſimilmente poſta alla retta C, hà dupplicata proportione di quella, che hà la retta A alla retta C, mà la prima A* [c] *alla terza B hà la medeſima dupplicata proportione di quella, che hà la retta A alla retta C, ſarà la figura piana deſcritta ſopra la retta A alla figura ſimile, e ſimilmente poſta ſopra la retta C* [d] *come la retta A alla retta B, mà la retta A per ipoteſi è incommenſurabile in lunghezza alla retta B, ſarà la figura piana deſcritta ſopra la retta B* [e] *incommenſurabile alla figura ſimile, e ſimilmente poſta ſopra la retta C, l'iſteſſo ſi dimoſtrerà ſe le figure ſimili ſaranno deſcritte ſopra le rette C, & B. Se dunque ſopra le rette A, & C, ouero C, & B, ſaranno deſcritte due qualunque figure ſimili, e ſimilmente poſte, quelle ſaranno fra di loro incommenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*

c Lem. 8. dopo la 18. del 6.

d 11. del 5.

e 10. del 10.

Se ſaranno deſcritte figure ſolide di vguali altezze, le di cui baſi ſiano li piani ſimili, e ſimilmente poſti ſopra le rette A, & C, ouero C, & B; perche gli ſolidi d'vguali altezze [f] *ſono come le baſi, eſſendo le baſi per quel che ſi è dimoſtrato incommenſurabili frà di loro, ſaranno ancora i ſolidi* [g] *fra di loro incommenſurabili, ſe dunque ſopra le rette A, & C, ouero C, & B* [h] *ſaranno deſcritti piani ſimili, e ſimilmente poſti, e ſopra quei piani ſimili ſaranno deſcritte piramidi, ò priſmi, ò altre figure ſolide d'vguali altezze, quelle figure ſolide ſaranno frà loro incommenſurabili.*

f 32. del 11. & 6. del 12.

g 10. del 11.

h 18. del 6.

Di nuouo, ſe preſe le rette A, & C, come diametri di due circoli, ed intorno alle rette A, & C ſaranno deſcritti quei circoli; perche il quadrato della retta A, al quadrato della retta C [K] *è come la retta A alla retta B, ed il quadrato del diametro A, al quadrato del diametro C* [l] *è come il circolo deſcritto intorno al diametro A, al circolo deſcritto intorno al diametro C, ſarà il circolo deſcritto intorno al diametro A, al circolo deſcritto intorno al diametro C, com'è la retta A alla retta B, mà le rette A, & B, per ipoteſi ſono frà loro incommenſura-*

K 20. del 6. & Lem. 8. dopo la 18. del 6.

l 2. del 12.

bili

bili in lunghezza, in conſeguenza i circoli deſcritti intorno à i diametri A, & C [m] *ſono frà loro incommenſurabili, e ſe ſopra quei circoli ſaranno deſcritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze; perche li Coni frà di loro, e Cilindri frà di loro* [n] *ſono come le baſi, eſſendo le baſi frà loro incommenſurabili; ſaranno ancora li Coni, ò Cilindri d'vguali altezze deſcritti ſopra di eſſi* [o] *frà loro incommenſurabili. Se dunque intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B, ſi deſcriueranno circoli, quelli ſaranno frà loro incommenſurabili, E ſe ſopra à quei circoli ſaranno deſcritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze, quelli ſaranno frà loro incommenſurabili, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.*

m 10. del 10.

n 11. del 12.

o 10. del 10.

Fine del Duodecimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOTERZO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

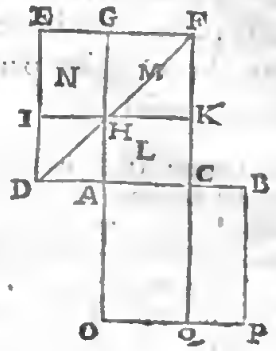
Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ed alla maggior parte s'aggiunga la metà di tutta la linea; il quadrato della compoſta è il quintuplo del quadrato di quella metà aggiunta.

a 30. del 6. SIA la retta linea AB, [a] diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, ed alla maggior parte CA s'aggiunga la retta AD, vguale alla metà di tutta la retta AB. Dico, che il quadrato della compoſta DC è il quintuplo del quadrato dell'aggiunta DA. Sopra la retta b 46. del 1. CD [b] ſi deſcriua il quadrato CE, ſi tiri il diametro DF, e dal punto A ſi tiri la retta AG c 31. del 1. [c] parallela al lato DE, la quale ſegarà il diametro DF in qualche punto H; per il punto H ſi faccia d 31. del 1. paſſare la retta IK [d] parallela al lato DC, e ſarà diuiſo il quadrato CE in quattro parallelogrammi, de'quali i due IA, GK, che ſono intorno al diametro DF, per il Corollario alla quarta propoſitione del ſecondo, ſono quadrati, cioè ſono i quadrati delle rette DA, AC, & i due AK, IG, ſono e 43. del 1. rettangoli [e] vguali frà loro. Similmente ſopra la retta AB f 46. del 1. [f] ſi deſcriua il quadrato OB, ſi continui FC ſino in Q; il rettangolo QB ſarà contenuto g 1. definit. del 2. [g] da i due lati PB, BC: ma il lato PB è vguale ad AB, il rettangolo PC ſarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Perche la retta AB è diuiſa, per ipoteſi, ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, ſarà h 3. definit. del 6. AB ad AC, [h] come AC à CB; ed il rettangolo contenuto dalle eſtreme K 19. del 6. AB, BC, [K] ſarà vguale al quadrato della media AC, ma il rettangolo delle due AB, BC, è vguale al rettangolo PC, ſarà il rettangolo PC vguale al quadrato di AC, cioè vguale al quadrato KG. In oltre, perche AB, per ipoteſi, è il doppio di AD, ed è vguale ad AO, ſarà AO il doppio di AD; ma AD (come lato del quadrato AI) è vguale ad AH, ſarà OA il doppio di AH. Si conſiderino i rettangoli OC, AK, i quali hanno vna medeſim'altezza, ed in conſeguenza ſono l 1. del 6. [l] come le baſi OA, AH: ma OA è il doppio

di AH,

di AH, sarà il rettangolo OC il doppio di AK. E perche il rettangolo AK [m] è vguale al complemento IG, sarà il rettangolo OC vguale à i due complementi CH, HE. Hor à i due complementi CH, HE, s'aggiunga il quadrato KG, ed al rettangolo OC s'aggiunga il rettangolo QB, ne viene tutto il quadrato OB vguale allo gnomone LMN. Finalmente perche AB è il doppio di AD, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato di AB sarà il quadruplo del quadrato di AD, cioè il quadrato OB è il quadruplo del quadrato AI: ma il quadrato OB fù dimostrato vguale allo gnomone LMN, sarà lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato AI: se allo gnomone LMN s'aggiunge il quadrato AI, ne viene tutto il quadrato CE il quintuplo del quadrato AI; cioè il quadrato di CD è il quintuplo del quadrato di DA, ch'era da dimostrarsi.

m 43. del 1.

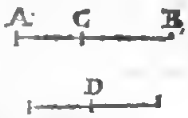


LEMMA.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna sua parte, il doppio di quella parte è maggiore del restante della linea.

Sia il quadrato della retta AB il quintuplo del quadrato della parte AC, e sia la retta D il doppio di AC. Dico, che la retta D è maggiore della retta CB. Perche la retta D è il doppio di AC, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato della retta D sarà il quadruplo del quadrato di AC. Inoltre, perche la retta AB è diuisa in C, il quadrato di AB [a] è vguale à i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB; ma il quadrato di AB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di AC, i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sarà il quintuplo del quadrato di AC; se ne leui il quadrato di AC, resta il quadrato di CB, col doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, il quadruplo del quadrato di AC: ma il quadrato della retta D è il quadruplo del quadrato di AC, sarà il quadrato della retta D vguale al quadrato di CB, col doppio rettangolo delle due AC, CB. Per la qual cosa il quadrato della retta D è maggiore del quadrato di CB, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, e perciò la retta D è maggiore di CB, ch'era da dimostrarsi.

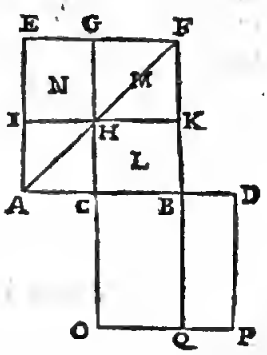
a 4. del 2.



THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna parte della medeſima retta, & il doppio di quella parte è diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà vguale al rimanente della linea propoſta.

Sia la retta AB diuiſa in C, in modo che il quadrato di AB ſia il quintuplo del quadrato di AC, e ſia fatta CD il doppio di AC, ſarà CD, per l'antecedente lemma, maggiore di CB. Dico, che la retta CD è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte è la retta CB, ch'è il reſtante di AB. Sopra la retta AB [a] ſi deſcriua il quadrato BE, ſi tiri il diametro AF, e dal punto C ſi tiri la retta CG [b] parallela ad AE, la quale ſegarà il diametro AF in qualche punto H; per il punto H [c] ſi faccia paſsare la retta IK parallela ad EF; ſarà diuiſo il quadrato BE in quattro parallelogrammi, de' quali i due CI, KG, intorno al diametro AF, per il Coroll. alla 4. propoſ. del ſecondo, ſono quadrati, ed i complementi BH, HE, ſono rettangoli vguali; ſi continui GC verſo O, ſi faccia CO [d] vguale à CD, e ſi compiſca il quadrato CP; ſi prolunghi FB ſino in Q; il rettangolo BP ſarà contenuto da i due lati PD, DB: ma PD è vguale al lato CD, ſarà il rettangolo PB vguale à quello, che è contenuto dalle due CD, DB. E perche CD è il doppio di AC, ſarà il quadrato di CD, per lo Scolio alla quarta propoſitione del ſecondo, il quadruplo del quadrato di AC; cioè il quadrato OD è il quadruplo del quadrato CI. Di nuouo perche il quadrato di AB è il quintuplo del quadrato di AC, cioè il quadrato BE è il quintuplo del quadrato IC, leuatone il quadrato IC, reſta lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato CI; ma il quadrato OD fu dimoſtrato il quadruplo del quadrato CI, ſarà lo gnomone LMN vguale al quadrato OD. Finalmente perche DC è il doppio di CA, ed è vguale ad OC, ſarà OC il doppio di CA; ma la retta CA è vguale ad HC, ſarà OC il doppio di CH. E perche i rettangoli OB, CK, [e] ſono come le baſi OC, CH, eſſendo OC il doppio di CH, ſarà il rettangolo OB il doppio del rettangolo CK: ma il rettangolo CK [f] è vguale al complemento HE, ſarà il rettangolo OB vguale à i due complementi BH, HE, giunti inſieme; fù dimoſtrato tutto lo gnomone LMH vguale al quadrato OD, ſarà il rettangolo QD vguale al quadrato KG, cioè vguale al quadrato di CB. E perche il rettangolo QD fù dimoſtrato vguale al rettangolo contenuto dalle due CD, DB; il rettangolo dunque contenuto dalle due CD, DB, ſarà vguale



a 46. del 1.
b 31. del 1.
c 31. del 1.
d 3. del 1.
e 1. del 6.
f 43. del 1.

al qua-

al quadrato di CB; e ſarà CD à CB [g] come la medeſima CB al rimanente BD. Per la qual coſa la retta CD [h] è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione nel punto B, e ſarà CB la maggior parte, ch'era da dimoſtrarſi.

[g] 17. del 6.
[h] 3. defin. del 6.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, è media proportione, il quadrato della retta compoſta della minor parte, e della metà della maggior parte, è il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte.

Sia la retta AB diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione nel punto C, e la maggior parte AC ſia diuiſa in due parti vguali in D. Dico, che il quadrato della retta DB è il quintuplo del quadrato di DC. Perche AB è diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ſarà AB ad AC [a] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'eſtreme AB, BC, [b] ſarà vguale al quadrato della media AC; ma il quadrato di AC, per lo Scolio alla quarta propoſitione del 2. è il quadruplo del quadrato della metà CD, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. Se al rettangolo delle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di CD, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, ſarà il quintuplo del quadrato di CD. In oltre, perche la retta AC è diuiſa in due parti vguali in D, e ſe l'è aggiunta la parte CB; il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, [c] ſarà vguale al quadraro di DB: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, è il quintuplo del quadrato di CD, ſarà il quadrato di DB il quintuplo del quadrato di CD, come fù propoſto di moſtrare.

[a] 3. defin. del 6.
[b] 17. del 6.
[c] 6. del 2.

SCOLIO.

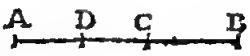
Il Campano ſa la conuerſa nel ſeguente modo.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti ineguali, ed il quadrato della retta compoſta della minor parte, e della metà della maggior parte, ſia il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte; quella retta linea ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

Sia la retta AB diuiſa in due parti ineguali in C, in modo, che diuiſa la maggior parte AC in due parti vguali in D, il quadrato di DB ſia il quintuplo

del

del quadrato di DC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in D; e se l'è aggiunta la retta CB, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, [a] *è vguale al quadrato di DB: ma il quadrato di DB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di DC, il quintuplo del quadrato di CD; leuatone il quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. E perche il quadrato della retta AC* [b] *è il quadruplo del quadrato della metà DC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al quadrato di AC: dal che AB ad AC,* [c] *sarà come AC à CB; per la qual cosa la retta AB* [d] *è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*



a 6. del 2.

b Scol. alla 4. del 2.
c 17. del 6.
d 3. definit. del 6.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, il quadrato di tutta, col quarto della minor parte, è il triplo del quadrato della parte maggiore.

Sia la retta linea AB diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione. Dico, che il quadrato di tutta AB, col quadrato della minor parte CB, è il triplo del quadrato della maggior parte AC. Perche la retta AB è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB [a] ad AC, come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [b] sarà vguale al quadrato di AC, e perciò il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il doppio del quadrato di AC. Se al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di AC, il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il triplo del quadrato di AC: ma per la 7. propositione del secondo, il doppio rettangolo contenuto delle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale à i quadrati delle due AB, BC; i quadrati dunque delle due AB, BC, sono il triplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.

a 3. definit. del 6.

b 17. del 6.

SCOLIO.

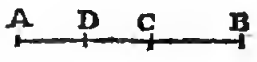
Questa ancora si conuerte nel seguente modo.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, in modo, che il quadrato di tutta, col quadrato della minor parte, sia il triplo del quadrato della maggior parte, quella

retta

retta linea ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

Sia diuiſa la retta AB in due parti ineguali in C, in modo, che il quadrato di AB, col quadrato della minor parte CB, ſia il triplo del quadrato della maggior parte AC. Dico, che la retta AB è diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione. Perche la retta AB è diuiſa in C, per la ſettima propoſitione del ſecondo, il quadrato di AB, col quadrato di BC, è vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC; ma i quadrati delle due AB, BC, per ipoteſi, ſono il triplo del quadrato di AC; ſarà il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il triplo del quadrato di AC; ſe ne leui il quadrato di AC, reſta il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al doppio quadrato di AC; e la metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, ſarà vguale al quadrato di AC; dal che AB ad AC [a] ſarà come AC à CB. Per la qual coſa la retta AB [b] è diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ch'era da dimoſtrarſi.



a 17. del 6.
b 3. definit. del 6.

Il Maurolico aggiunge il ſeguente Theorema.

Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, alla quale ſia aggiunta vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della compoſta è il quintuplo del quadrato della maggior parte; e ſe vna retta linea è diuiſa in due parti ineguali, in modo, che aggiuntale vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della compoſta ſia il quintuplo della maggior parte, quella retta linea ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

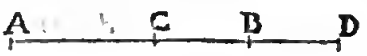
del quadrato

Sia prima la retta AB diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, alla quale ſia aggiunta la retta BD, vguale alla minor parte CB. Dico, che il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC. Perche la retta AB è diuiſa in C, e ſe l'è aggiunta la retta BD, vguale à CB, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, [a] è vguale al quadrato di AD. In oltre, perche AB è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, ſarà AB ad AC [b] come AC à CB: ſi che il rettangolo contenuto dall'eſtreme AB, BC, [c] ſarà vguale al quadrato della media AC; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle medeſime AB, BC, ſarà il quadruplo del quadrato di AC. Se al quadruplo rettangolo contenuto dalle

a 8. del 2.
b 3. defin. del 6.
c 17. del 6.

due

due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il quintuplo del quadrato di AC: ma il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, [d] *è vguale al quadrato di AD; il quadrato dunque di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*



d 8. del 2.

Di nuouo sia diuisa AB in due parti ineguali in C, in modo, che aggiunta ad AB la parte BD, vguale à CB, il quadrato di AD sia il quintuplo del quadrato di AC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ed il quadrato di AD [e] *è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il quintuplo del quadrato della medesima AC: se ne leui il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il quadruplo del quadrato di AC; ed il solo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà vguale al quadrato di AC. Per la qual cosa AB ad AC* [f] *sarà come AC à CB, e la retta AB* [g] *sarà diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*

e 8. del 2.

f 17. del 6, g 3. defin. del 6.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta vna retta vguale alla maggior parte; tutta la composta sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà la linea proposta.

Sia la retta linea AB diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ed alla retta AB sia aggiunta DA vguale alla maggior parte AC. Dico, che la composta DB è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà AB. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB ad AC, [a] cioè AB ad AD, come AC à CB; ed inuertendo, DA ad AB, sarà [b] come BC à CA; e componendo, DB à BA [c] sarà come BA ad AC, cioè come la medesima BA ad AD; per la qual cosa la retta AB [d] è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione, ed AB è la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.

a 3. definit. del 6.
b Corol. alla 4. del 5.
c 18. del 5.
d 3. defin. del 6.

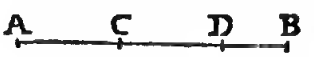
SCO-

SCOLIO I.

La conuerſa la dimoſtraremo col Campano nel modo ſeguente.

Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e dalla maggior parte ſe ne detragga vna retta vguale alla minor parte; quella maggior parte ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione; e la maggior parte ſarà vguale à quella, che in tutta era la minore dell'eſtreme.

Sia la retta AB diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, e dalla parte maggiore CB ſe ne detragga la retta CD, vguale alla minore AC. Dico, che la retta CB è diuiſa in D, ſecondo l'eſtrema, e media proportione; e la maggior parte ſarà CD, ch'è vguale ad AC. Perche AB è diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ſarà AB à BC, [a] come la medeſima BC ad AC, cioè come BC à CD; e diuidendo, AC à CB [b] ſarà come BD à DC; ed inuertendo, BC à CA, [c] ouero CD, ſarà come la medeſima CD à DB. Per la qual coſa la retta CB è diuiſa in D ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la parte maggiore è la retta CD, ch'era da dimoſtrarſi.



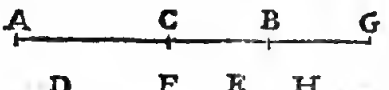
a 3. definit. del 6.
b 17. del 5.
c Coroll. alla 4. del 5.
d 3. definit. del 6.

SCOLIO II.

Di Pappo propoſit. 44. lib. 5. nel Commento del Commandino, ed Hypſicle 7. prop. del 14. Elemento.

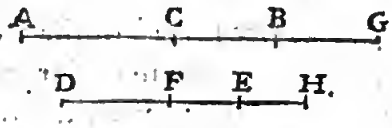
Le parti delle rette diuiſe ſecondo l'eſtrema è media proportione, ſono frà loro proportionali.

Sia diuiſa la retta AB ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, e ſia la maggior parte AC; ſimilmente ſia diuiſa la retta DE, ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, e ſia DF la maggior parte. Dico che BA ad AC è come ED à DF, e che AC à CB è come DF ad FE. Si prolunghino le rette AB, DE, verſo G, ed H; ſi faccia BG, vguale à CB, e ſi faccia EH vguale ad EF, per l'ottaua del ſecondo, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, col quadrato di DF, è vguale al qua-



a 3. del 1.

drato di DH. Perche la retta AB è diuiſa in C, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ſarà BA ad AC [b] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'eſtreme AB, BC, ſarà [c] vguale al quadrato della media AC. E per l'iſteſſa ragione il rettangolo contenuto dalle due DE, EF, è vguale al quadrato di DF; e perciò il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di AC, [d] ſarà come il rettangolo contenuto dalle due DE, EF, al quadrato di DF; e quadruplati gli antecedenti, ſarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di AC, come il quadruplo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, al quadrato di DF: ma il quadruplo rettangolo delle due AB, BC, col quadrato di AC, [e] è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo delle due DE, EF, col quadrato di DF, è vguale al quadrato di DH; ſarà il quadrato di AG al quadrato di AC, come il quadrato di HD al quadrato di DF, ed il lato GA al lato AC [g] ſarà come HD à DF; e diuidendo, GC à CA [h] ſarà come HF ad FD; e preſe le metà dell'antecedenti, ſarà EC à CA, [K] come EF ad FD, e componendo BA ad AC [l] ſarà come ED ad DF. Similmente eſſendo BC à CA come EF ad FD, inuertendo, [m] AC à CB ſarà come DF ad FE, ch'era da dimoſtrarſi.

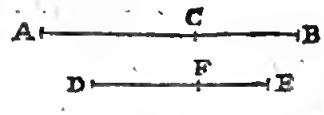


b 3. definit. del 6.
c 17. del 6.
d 7. del 5.
e 18. del 5.
f 8. del 2.
g 22. del 6.
h 17. del 5.
K Scol. alla 22. del 5.
l 18. del 5.
m corol. alla 4. del 5.

La conuerſa di queſta propoſitione, la fa il Sig. Borelli nel ſeguente modo.

Se due rette ſono diuiſe proportionalmente, ed vna di quelle è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ancora l'altra ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione.

Sia la retta AB diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, e ſia AC la maggior parte; e la proportione di BA ad AC ſia come quella di ED à DF. Dico che la retta DE è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte ſarà la retta DF. Perche BA ad AC è come ED à DF, per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC [a] come DE ad EF; e diuidendo, AC à CB [b] ſarà come DF ad FE; ma AC à CB è come BA ad AC (ſtante che la retta AB è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione) ſarà DF ad FE, [c] come BA ad AC: ma BA ad AC, per ipoteſi, è come ED à DF, ſarà ED à DF [d] come DF ad FE. Per la qual coſa la retta DE [e] è diuiſa in F ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte è DF, che era da dimoſtrarſi.



a coroll. alla 19. del 5.
b 17. del 5.
c 11. del 5.
d 11. del 5.
e 3. definit. del 6.

Suppo-

Suppoſto le coſe antedette facilmente ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

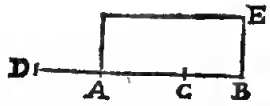
Se qualunque retta AB è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, la di cui maggior parte ſia AC, e preſo in AB qualunque punto D, poi diuiſa la maggior parte AC, in modo, che AE ad EC ſia come AD à DB. Dico che la retta AD è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in E, e la maggior parte ſarà la retta AE.

Perche AD à DB è come AE ad EC, inuertendo, [a] *ſarà BD à DA come CE ad EA, e componendo, BA ad AD* [b] *ſarà come CA ad AE; e permutando BA ad AC* [c] *ſarà come DE ad AE: ma BA, per ipoteſi, è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, per l'antecedente Theorema, ſarà DA diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in E, di cui AE ſarà la maggior parte, ch'era da dimoſtrarſi.*

a Corol. alla 4. del 5.
b 18. del 5.
c 16. del 5.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea Rationale è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, l'vna, e l'altra parte è linea irrationale, ed è quella, che ſi chiama Apotome,



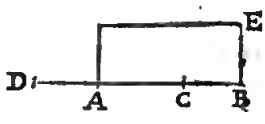
Sia la retta Rationale AB, diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, e ſia AC la maggior parte. Dico che ciaſcuna delle rette AC, CB, è irrationale, e che ambedue, preſe ſeparatamente, ſono Apotome. Alla parte maggiore AC s'aggiunga la retta AD, vguale alla metà della Rationale AB, ſarà il quadrato di CD, per la prima propoſitione di queſto, il quintuplo del quadrato di AD; per la qual coſa il quadrato di CD al quadrato di AD ſarà come numero à numero, cioè come 10. à 2, e perciò i quadrati delle due CD, DA, [a] ſono commenſurabili, e le rette CD, DA, ſono commenſurabili almeno in potenza: ma la retta AD è Rationale, [b] ſtante che è commenſurabile al ſuo doppio, cioè alla Rationale AB: ſarà dunque CD, [c] che gli è commenſurabile, Rationale. In oltre perche i quadrati delle due CD, DA, [d] non ſono come numero quadrato a numero quadrato, ſtante che ſono come 10. à 2, le rette CD, DA, [e] ſaranno incommenſurabili in lunghezza, e perciò ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza. Se dunque dalla Rationale CD, ſe ne detrae la retta DA, Rationale ſolamente in potenza, ſarà la rimanente AC [f] irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama Apotome.

a 6. del 10.
b 6. defin. del 10.
c 6. defin. del 10.
d 1 Scolio nel fine del 9.
e 9. del 10.
f 74. del 10.

g 45. del 1. Di nuouo s'intenda applicato ad AB g il rettangolo AE vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC, ſarà il lato BE vguale alla retta

h 3. defin. del 6. CB. Perche AB ad AC h è come AC à CB, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, cioè

K 17. del 6. il rettangolo AE, K ſarà vguale al quadrato dell'Apotome AC. Hor perche il quadrato dell'Apotome AC, cioè il rettangolo AE, è applicato alla Rationale AB, l'altro lato BE, ouero BC, che ne riſulta, per la 98. del 10. è Apotome prima, e perciò le due AC, CB, ſono linee irrationali, e ſono Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.



SCOLIO.

Si può qui aggiungere il ſeguente Theorema del Campano.

Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la parte maggiore è Rationale, la minore ſarà Apotome.

Sia la retta AB diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in C, la di cui maggior parte AC ſia Rationale. Dico che la minore CB è Apotome. Si diuida AC in due parti vguali in

a 3. del 13. *D, ſarà la metà DC Rationale, ed il quadrato di BD* a *ſarà il quintuplo del quadrato di DC; dal che i quadrati delle rette BD, DC, ſono come 10. à 2,*

b 6. del 10. *cioè come numero à numero, e perciò i quadrati delle due BD, DC,* b *ſono commenſurabili, e le rette BD, DC, ſono commenſurabili almeno in potenza: ma*

c 6. defin. del 10. *DC è Rationale, ſarà ancora DB,* c *che gli è commenſurabile, Rationale. E*

d 9. del 10. *perche i quadrati delle due BD, DC, per lo Scolio nel fine del nono, non ſono come numero quadrato à numero quadrato; le due BD, DC* d *ſaranno incommenſurabili in lunghezza, per la qual coſa le medeſime BD, DC ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ſe dunque dalla Rationale DB ſe ne detrae la Rationale DC, commenſurabile ſolamente in potenza, la rimanente BC*

e 74. del 10. *e ſarà Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.*

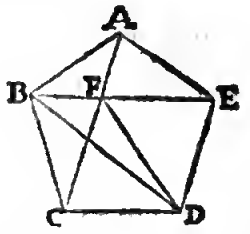
THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se tre angoli d'vn pentagono equilatero, ò contigui, ò non contigui, ſono frà loro vguali, quel pentagono ſarà equiangolo.

Nel pentagono equilatero ABCDE, ſiano prima i tre angoli contigui A, B, C, frà di loro vguali. Dico che il propoſto pentagono ABCDE è equiangolo. A gli vguali angoli A, B, C, ſiano ſotteſe le rette DB, CA, BE. Perche i due lati DC, CB, del triangolo DBC, ſono vguali à i due lati BA, AE, del triangolo BAE, l'angolo DCB, per ipoteſi, è vguale

all'

all'angolo BAE, ſarà la baſe BD [a] vguale alla baſe BE, e l'angolo BEA, vguale all'angolo BDC. Hor eſſendo i lati BD, BE, vguali frà loro, gl'angoli BDE, BED, [b] ſaranno frà di loro vguali, à i quali s'aggiungano gli vguali angoli BDC, BEA, ſarà tutto l'angolo AED, vguale all'angolo CDE. In oltre perche i due lati CB, BA, del triangolo CBA, ſono vguali à i due lati EA, AB, del triãgolo BAE, e l'angolo CBA, per ipoteſi, è vguale all'angolo BAE, ſarà la baſe BE [c] vguale alla baſe CA, l'ãgolo CAB vguale all'angolo EBA, e l'angolo BCA vguale all'angolo ABE. Hor eſſendo gli angoli FAB, FBA, frà di loro vguali, ſarà il lato FA [d] vguale al lato FB; dalle vguali rette CA, EB, ſe ne leuino le vguali rette FA, FB, reſta CF vguale ad FE: dal punto F all'angolo oppoſto D ſi tiri la retta FD. Eſſendo il lato DC vguale, per ipoteſi, al lato DE, è ſi è dimoſtrato il lato EF vguale al lato FC, i due lati DC, CF, del triangolo DCF, ſono vguali à i due lati DE, EF, del triangolo DEF, la baſe DF è commune, ſarà l'angolo DCF, [e] vguale all'angolo DEF, à i quali s'aggiungano gli vguali angoli BCA, AEB, tutto l'angolo BCD, ſarà vguale à tutto l'angolo AED; ma l'angolo AED è dimoſtrato vguale all'angolo EDC, e l'angolo DCB è ſuppoſto vguale ad ogn'vno degli angoli CBA, BAE; tutti gli angoli dunque del pentagono ABCDE ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



[a] 4. del 1.
[b] 5. del 1.
[c] 4. del 1.
[d] 6. del 1.
[e] 8. del 1.

Di nuouo, ſuppoſto che i tre angoli vguali non ſiano contigui, come ſono i tre angoli A, C, & D. Dico ſimilmente, che il pentagono ABCDE è equiangolo. Conſiderando i due triangoli BAE, DCB, ſi dimoſtri, come prima ſi fece, che le baſi BE, BD, ſono frà loro vguali, e che tutto l'angolo AED è vguale all'angolo CDE: ma l'angolo CDE è poſto vguale all'angolo BCD; i tre angoli contigui BCD, CDE, DEA, ſono frà di loro vguali, e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, il pentagono ABCDE è equiangolo, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

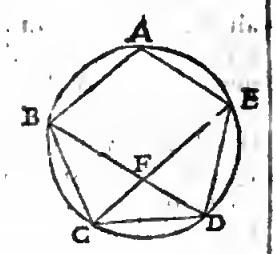
Se due angoli contigui d'vn pentagono equilatero, ed equiangolo, ſono ſotteſi da due rette linee, quelle ſi ſegano ſcambieuolmente ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ed ogn'vna, delle parti maggiori è vguale al lato del pentagono.

Sia il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, del quale due cõtigui angoli vguali, come C, D, ſiano ſotteſi dalle rette BD, CE, le quali ſi ſeghino ſcambieuolmente in qualche punto F. Dico che le rette EC, BD, ſi ſegano ſcambieuolmente ſecondo l'eſtrema, e media proportione; e ciaſcuna delle parti maggiori EF, FB, è vguale al lato del pentagono. Intorno

a 14. del 4. al propoſto pentagono a ſi circoſcriua il circolo ABCDE. Eſſendo il pentagono equilatero, ed equiangolo, gli archi AB, BC, CD, DE, EA b ſaranno frà di loro vguali, dal che l'arco BAE ſarà il doppio dell'arco ED

b 28. del 3.

c 33. del 6. e l'angolo BCE, oppoſto all'arco BAE, c ſarà il doppio dell'angolo ECD oppoſto all'arco ED. Similmente eſſendo gli archi BC, CD, ED, frà di loro vguali, gli angoli



d 27. del 3 oppoſti CDB, CBD, DEC, DCB, d ſono frà di loro vguali. Hor eſſendo li angoli FCD, FDC,

e 6. del 1. fra di loro vguali, ſarà CF e vguale ad FD. Si conſiderino i due triangoli BCD, CDE. Perche i due lati BC, CD, per ipoteſi, ſono vguali à i due lati CD, DE, e l'angolo BCD è vguale all'angolo CDE, ſarà la baſe CE

f 4. del 1. f vguale alla baſe BD; ſe ne leuino le vguali FC, FD, reſta FB vguale ad FE. Nel triangolo iſoſcele FCD, continuato il lato DF verſo B, l'angolo BFC

g 32. del 1. g eſterno è vguale à i due angoli FCD, FDC, interni ed oppoſti: ma i due angoli FCD, FDC, furono dimoſtrati vguali, ſarà l'angolo BFC il doppio dell'angolo FCD; e perche l'angolo BCF fù dimoſtrato il doppio del medeſimo angolo FCD, ſarà l'angolo BFG vguale all'angolo BCF; dal che il lato BF

h 6. del 1. h ſarà vguale al lato BC. Finalmente ſi conſiderino i triangoli FCD, BCD, de' quali l'angolo DBC è dimoſtrato vguale all'angolo FCD, e l'angolo FDC è commune, il rimanente angolo CFD

K 32. del 1. K ſarà vguale al reſtante angolo BCD; i triangoli

I 4. del 6. FCD, BCD, ſono equiangoli, e la propoſitione di BD à DC I ſarà come quella di CD à DF: ma CD è vguale al lato CB, ouero BF, ſarà BD à BF, come il medeſimo lato BF ad FD; per la qual coſa la retta BD, è

m 3. defin. del 6. diuiſa in F m ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte BF è vguale al lato BC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la retta CE è diuiſa in F, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte FE è vguale al lato del pentagono, come fù propoſto dimoſtrare.

SCOLIO.

Facilmente dimoſtreremo col P. Clauio, che la retta, la quale ſottende vn angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, è parallela al lato oppoſto à quell'angolo.

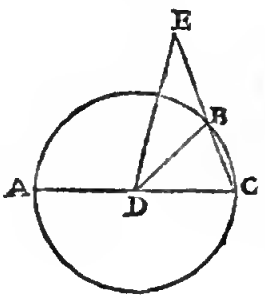
Perche antecedentemente ſi è dimoſtrato, che gli angoli DEC, DCE, ſono frà loro vguali, leuati da gli vguali angoli DEA, DCB, reſta l'angolo BCE, vguale all'angolo AEC, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo A, i due angoli BCE, BAE, ſaranno vguali à i due angoli BAE, CEA: ma nel quadrilatero BCEA iſcritto nel circolo, i due angoli oppoſti BAE, BCE,

a 22. del 3. *a ſono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque BAE, CEA,*

b 28. del 1. *b ſono vguali à due angoli retti, e perciò le rette BA, CE, ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.*

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se al lato dell'eſagono s'aggiunge il lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo, tutta la retta compoſta ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte ſarà il lato dell'eſagono.



Nel circolo ABC ſia il lato del decagono iſcritto BC, il quale ſia continuato verſo E; ſi faccia BE [a] vguale al ſemidiametro del circolo ABC, ſarà BE [b] il lato dell'eſagono iſcritto nel circolo ABC. Dico che la retta EC è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in B, la di cui maggior parte è il lato BE dell'eſagono. Dal punto C, per il centro D del circolo, ſi faccia paſſare il diametro CA, e ſi tirino le rette DE, DB. Perche CB è lato del decagono, perciò ſottenderà la decima parte di tutta la circonferenza del circolo; cioè ſottenderà la quinta parte dell'arco ABC; per la qual coſa l'arco AB è il quadruplo dell'arco BC, e l'angolo ADB [c] ſarà il quadruplo dell'angolo BDC. In oltre perche le rette BD, BE, ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo BED [d] vguale all'angolo BDE. Nel triangolo EBD il lato EB è continuato in C, l'angolo eſterno CBD [e] è vguale à i due angoli BED, BDE, interni, ed oppoſti: ma i due angoli BED, BDE, ſono frà loro vguali, ſarà l'angolo DBC il doppio dell'angolo BED. E perche l'angolo DBC è vguale all'angolo DCB, ſtante che i lati DB, DC, [f] ſono frà loro vguali, l'angolo ancora DCB ſarà il doppio dell'angolo BED, e perciò i due angoli DBC, DCB, inſieme giunti, ſono il quadruplo dell'angolo E. Nel triangolo BDC il lato CD è continuato verſo A, dal che l'angolo eſterno ADB [g] ſarà vguale à i due angoli DBC, DCB: ma queſti ſono il quadruplo dell'angolo E, ſarà l'angolo ADB il quadruplo dell'angolo E: fù moſtrato l'angolo ADB eſſere il quadruplo dell'angolo CDB, l'angolo dunque CDB ſarà vguale all'angolo E. Si conſiderino i due triangoli DCB, DCE, de'quali l'angolo CDB è vguale all'angolo E, e l'angolo DCB è commune; i due angoli BCD, BDC, del triangolo BDC, ſaranno vguali à i due angoli DCE, DEC, del triangolo DCE, ed il rimanente angolo CBD [h] ſarà vguale al reſtante angolo CDE, per la qual coſa i triangoli DCB, DCE, ſono equiangoli, e la proportione di EC à CD [k] ſarà come quella di CD à CB; ma CD è vguale alla retta BD, cioè ad EB; ſarà dunque EC ad EB come la medeſima EB à BC; dal che la retta EC [l] è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte è la retta BE, ch'è lato dell'eſagono, come fù propoſto dimoſtrare.

a 3. del 1, b Corol. alla 15. del 4.

c 33. del 6.

d 5. del 1. e 32. del 1.

f 5. del 5.

g 32. del 1.

h 32. del 1, K 4. del 6.

l 3. defin. del 6.

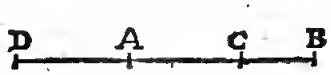
CO-

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato nello Scolio alla 5. propositione di questo, che se vna retta è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e dalla parte maggiore se ne detrae la minor parte, quella parte maggiore sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è quella detratta; sarà manifesto, che se dal lato dell'esagono se ne detragga il lato del decagono, iscritto nel medesimo circolo, il lato dell'esagono sarà diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte sarà il lato del decagono.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che se il lato del esagono è diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo.



Sia AB il lato dell'esagono iscritto in qualche circolo, e la retta AB sia diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, in modo, che AC sia la maggior parte, ed alla retta AB sia aggiunta la retta AD, vguale ad AC, per la 5. di questo, sarà DB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in A, e la maggior parte sarà AB, ch'è lato dell'esagono; e per l'antecedente propositione, la retta AD sarà il lato del decagono: ma AD è posta vguale ad AC, sarà dunque AC il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, ch'è il nostro proposito.

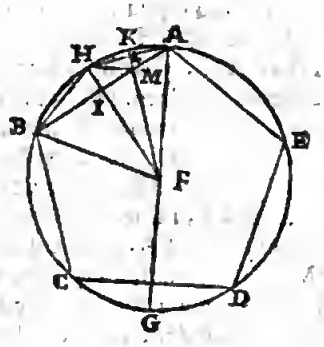
THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se nel circolo è iscritto vn pentagono equilatero, ed equiangolo, il quadrato del lato del pentagono, è vguale al quadrato del lato dell'esagono, col quadrato del lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo.

Nel circolo ACD, il di cui centro F, sia iscritto il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo. Dico che il quadrato del lato AB è vguale

al

al quadraro del lato del eſagono, col quadrato del lato del decagono, iſcritto nel medeſimo circolo ACD. Dal punto A, per il centro F, ſi faccia paſſare il diametro AG del circolo, e ſi tiri la retta FB; ſarà FB [a] vguale al lato dell'eſagono iſcritto nel medeſimo circolo ACD; ſi diuida l'arco AB [b] in due parti vguali in H, e ſi tirino le rette FH, HB, HA, la retta FH ſegarà AB in qualche punto I. Perche l'arco AB, ſotteſo dal lato del pentagono, è il doppio dell'arco AH, la retta AH ſarà il lato del decagono; ſi diuida l'arco AH [c] in due parti vguali in K, e ſi tiri la retta FK la quale ſegarà la retta AH in qualche punto L, e la retta BA in qualche punto M; ſi tiri la retta HM. Perche l'arco BH è vguale all'arco HA, ſarà l'angolo BFH [r] vguale all'angolo HFA. Si conſiderino i due triangoli FIB, FIA. Perche i due lati BF, FI, ſono vguali à i due lati AF, FI, e l'angolo BFI è vguale all'angolo AFI, ſarà la baſe BI [d] vguale alla baſe AI, e gli angoli in I ſaranno retti. Similmente eſſendo l'arco HK vguale all'arco KA, nell'iſteſſo modo ſi proverà, che la retta HL è vguale alla retta LA, e che gli angoli in L ſono retti. In oltre da gli vguali archi ABCG, AEDG (che ſono circonferenze de i mezzi circoli) ſe ne detraggano gli vguali archi ABC, AED, reſta l'arco CG vguale all'arco GD. E perche gli archi AB, CD, ſono frà loro vguali, le loro metà, cioè gli archi CG, AH, ſono frà di loro vguali: ma l'arco AH, per coſtruttione, è il doppio dell'arco HK, ſarà l'arco CG il doppio dell'arco HK. Similmente perche l'arco AB è il doppio dell'arco BH, ſarà l'arco CB il doppio dell'arco BH. Hor eſſendo l'arco CG il doppio dell'arco HK, e l'arco CB il doppio dell'arco BH, ſarà tutto l'arco GB il doppio di tutto l'arco BK, e perciò l'angolo GFB [e] ſarà il doppio dell'angolo BFK. E perche l'angolo GFB al centro è il doppio dell'angolo FAB [f] alla circonferenza, l'angolo dunque FAB ſarà vguale all'angolo BFK. Si conſiderino i due triangoli ABF, FMB, de' quali l'angolo BFM è vguale all'angolo FAB, l'angolo FBM è commune ad ambidue, ſaranno i due angoli MFB, MBF, del triangolo FMB, vguali à i due angoli FAB, FBA, del triangolo BFA, ed il rimanente angolo FMB [g] ſarà vguale al reſtante angolo BFA; dal che i triangoli FMB, FAB ſono equiangoli, e ſarà AB à BF [h] come la medeſima BF ad MB, ed il rettangolo contenuto dall'eſtreme AB, BM, [K] ſarà vguale al quadrato della media BF.



Di nuouo ne i triangoli ALM, HLM, angoli retti in L; eſſendo AL vguale ad LH, i due lati AL, LM, ſaranno vguali à i due lati HL, LM, gli angoli ALM, HLM, ſono frà di loro vguali, ſarà la baſe HM [l] vguale alla baſe AM, e gli angoli MAH, MHA, frà di loro vguali: ma l'angolo HAM [m] è vguale all'angolo HBM (ſtante che le rette HA, HB, ſono frà di loro vguali) ſarà l'angolo AHM vguale all'angolo HBA. Si conſiderino i due triangoli HMA, HBA, de' quali l'angolo HBA è vguale all'

a Corol. alla 15. del 4.
b 30. del 3.
c 30. del 3.
r 27. del 3.
d 4. del 1.
e 33. del 6.
f 20. del 3.
g 32. del 1.
h 4. del 6.
K 17. del 6.
l 4. del 1.
m 6. del 1.

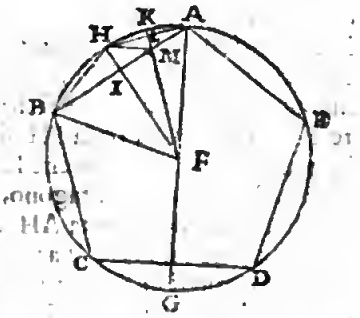
angolo AHM, e l'angolo HAB è commune ad ambidue, sarà il rimanente angolo AMH n vguale al restante angolo BHA; i triangoli HBA, HMA, sono equiangoli, e la proportione di BA ad AH o sarà come quella di AH ad AM, dal che il rettangolo contenuto dall'estreme BA, AM, p sarà vguale al quadrato della media AH. Ma fù dimostrato il rettangolo contenuto dalle due AB, BM, essere vguale al quadrato di BF, i due rettangoli dunque, contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, sono vguali à i quadrati delle due BF, HA: ma i rettangoli contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, q sono vguali al quadrato di BA, sarà al quadrato di BA vguale à i quadrati delle due BF, HA, cioè il quadrato di AB, lato del pentagono, è vguale al quadrato di BF, lato dell'esagono, col quadrato di HA, ch'è il lato del decagono, come fù proposto dimostrare.

n 32. del 1.

o 4. del 6.

p 17. del 6.

q 1. del 2.



COROLLARIO I.

Appare da quel, che si è dimostrato, che quando vna retta, tirata dal centro d'vn circolo, diuide vn arco in due parti vguali, diuiderà ancora la retta, che sottende quell'arco in due parti vguali, & ad angoli retti, stante che si è dimostrato, che la retta FH, la quale diuide l'arco BA in due parti vguali, diuide ancora la retta BA in due parti vguali, & ad angoli retti.

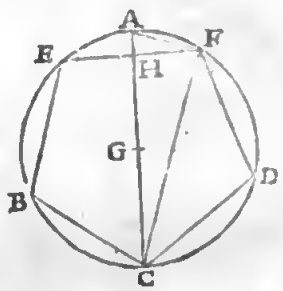
COROLLARIO II.

Essendosi dimostrato, che la retta FG diuide l'arco CD in due parti vguali, per l'antecedente Corollario, diuide la retta CD in due parti vguali, & ad angoli retti. Dond'è manifesto, che il diametro del circolo, tirato da vn angolo del pentagono, diuide il lato opposto in due parti vguali, & ad angoli retti, e diuide l'arco sotteso dal lato opposto in due parti vguali; & il medesimo succede in tutti i poligoni equilateri, ed equiangoli iscritti nel circolo, quando sono di lati di numero disparo, il che tutto si dimostra nel modo sudetto.

SCOLIO I.

Quì facilmente si può dimostrare il seguente Theorema.

Il quadrato della retta, che sottende l'angolo del pentagono, col quadrato del lato del medesimo pentagono, è il quintuplo del quadrato del semidiametro del circolo, doue è iscritto quel pentagono.



Nel circolo ABCD, il di cui centro G, sia iscritto il pentagono EBCDF, equilatero, ed equiangolo, e sia tirata la retta CF, che sottenda l'angolo CDF del pentagono; e dall'angolo C, per il centro G, si faccia passare il diametro CG, il quale continuato segarà il lato EF, per l'antecedente Corollario, in due parti vguali, & ad angoli retti, e segarà l'arco EAF in due parti vguali in qualche punto A. Dico che i quadrati delle rette CF, FE, giunti insieme, sono il quintuplo del quadrato del semidiametro GA. Si tiri la retta FA, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che FA è lato del decagono iscritto nel circolo ABCD. Perche AC è il doppio di AG, sarà il quadrato di AC [a] il quadruplo del quadrato di AG: ma il quadrato di AC [b] è vguale à i quadrati delle rette CF, FA; i quadrati dunque delle rette CF, FA, saranno il quadruplo del quadrato di AG; à i quadrati delle due CF, FA, s'aggiunga il quadrato di AG, i quadrati delle tre CF, FA, AG, saranno il quintuplo del quadrato di AG: ma il quadrato di EF [c] è vguale à i quadrati delle due GA, AF, perciò i quadrati delle due CF, FE, sono il quintuplo del quadrato di GA, come fù proposto dimostrare.

a Scolio alla 4. del 2.
b 47. del 1.
c 10. del 13.

SCOLIO II.

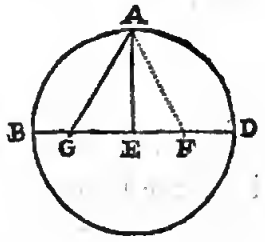
Non sarà inutile aggiungere quì quel, che Tolomeo spiega nella prima propos. del primo libro del suo Almagesto.

In vn dato circolo ritrouare il lato del decagono, e del pentagono iscritto nel medesimo circolo.

Sia il circolo dato ABCD, il di cui diametro BD, ed il centro E, nel quale sia eleuata, la retta EA [a] perpendicolare al diametro BD; e si voglia ritrouare il lato del decagono, e del pentagono da iscriuersi nel medesimo circolo ABCD. Si diuida il semidiametro ED [b] in due parti vguali in F, si tiri la retta FA, e si faccia FG [c] vguale ad FA; si tiri la retta GA. Dico che EG è il lato del decagono, e che la retta AG è il lato del pentagono. Perche la ret-

a 11. del 1.
b 10. del 1.
c 3. del 1.

ta DE è diuiſa in due parti vguali in F, e gli è aggiunta la retta GE, il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, col quadrato di EF, d *è vguale al quadrato di FG, cioè vguale al quadrato di FA; mà il quadrato di FA è vguale à i quadrati de i due lati AE, EF, ſarà il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, col quadrato di FE, vguale à i quadrati delle due AE, EF; ſe ne leui il commune quadrato di EF, reſta il rettangolo contenuto dalle due DG, GE, vguale al quadrato di AE, cioè vguale al quadrato di ED; e ſarà GD à DE,* f *come la medeſima DE ad EG; per la qual coſa la retta DG* g *è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte è il lato dell'eſagono DE, e per la propoſ. 9. ſarà EG il lato del decagono. E perche il quadrato di GA* h *è vguale à i quadrati delle due AE, EG, eſſendo AE vguale al lato dell'eſagono, ed EG il lato del decagono, per la propoſitione 10. di queſto, ſarà AG il lato del pentagono, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*



d 6. del 2.
e 47. del 1.
f 17. del 6.
g 3. definit. del 6.
h 47. del 1.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se il diametro d'vn circolo è Rationale, il lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcritto in quel circolo, è linea irrationale, ed è quella, che ſi chiama minore.

Habbia il circolo ACD il diametro Rationale, e nel circolo ACD, ſia iſcritto il pentagono equilatero, ed equiãgolo ABCDE. Dico, che ciaſcun lato, come AB è linea irrationale, ed è quella, che ſi chiama minore. Per gli angoli B, ed A, e per il centro F, ſi facciano paſſare i diametri AG, BH, e ſeghi AG il lato CD in qualche punto I, per il ſecondo Coroll. all'antecedente propoſitione, la retta AG diuide l'arco CD in due parti vguali in G, e diuide ancora la retta CD in due parti vguali, & ad angoli retti in I. Dal ſemidiametro FH ſe ne tagli la quarta parte FL, e dalla retta CA ſi tagli la quarta parte CM. Perche il diametro BH, per ipoteſi, è Rationale, la ſua metà BF, ouero FH, a che gli è commenſurabile, è Rationale, e la retta FL, ch'è commenſurabile ad FH, b ſarà ancora Rationale; per la qual coſa tutta la compoſta BL, c che è commenſurabile all'vna, ed all'altra, ſarà parimente Rationale.

Perche le rette BA, BC, per ipoteſi, ſono frà loro vguali, ſarà l'arco BC d vguale all'arco BA, e per il primo Coroll. all'antecedente propoſitione, la retta BH ſega la retta CA in due parti vguali, & ad angoli retti nel punto K. Si conſiderino i due triangoli AIC, AKF, angoli retti in I, & K, de'quali l'angolo CAI è commune, ſarà il rimanente angolo ACI e vguale al reſtante angolo AFK, dal che i triangoli ACI, AKF, ſono equiangoli, e la proportione di IC à CA f ſarà come quella di KF ad FA; e permutando, ſarà IC ad FK; g come CA ad FA, cioè come CA

a 6. definit. del 10.
b 6. definit. del 10.
c 16. del 10.
d 28. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 5.

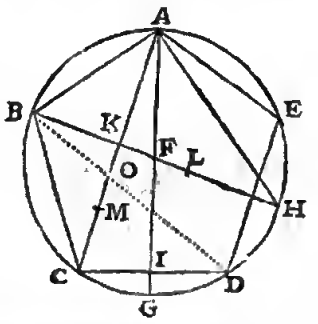
ad FH:

adFH: ma CA ad FH è come la quarta parte di CA alla quarta parte di FH, cioè come CM ad FL, sarà IC ad FK, [h] come CM ad FL, e permutando, IC à CM [k] sarà come KF ad FL; e perche IC à CM è come il doppio al doppio, cioè come DC à CK, sarà DC à CK [l] come KF ad FL; componendo le due insieme DC, CK, à CK, [m] sarà come KL ad LF; ed il quadrato della retta, composta delle due DC, CK, [n] al quadrato di CK, sarà come il quadrato di KL al quadrato di LK.

h 11. del 5.
k 16. del 5.
l 11. del 5.
m 18. del 5.
n 22. del 6.

Si tiri la retta BD, la quale segarà la retta AC in qualche punto O, per l'8. propos. di questo, la retta AC sarà diuisa in O secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte OD [g] sarà vguale al lato CD del pentagono. Hor se alla maggior parte DO, ouero DC, s'aggiunge la metà di DB, cioè la metà di AC, ch'è la retta CK, il quadrato della retta composta delle due DC, CK, per la 1. propos. di questo, è il quintuplo del quadrato di CK: ma il quadrato della retta composta delle due DC, CK, al quadrato di CK, si è dimostrato essere come il quadrato di KL al quadrato di LF; sarà il quadrato di KL il quintuplo del quadrato di LF; cioè il quadrato di KL al quadrato di LF, sarà come numero à numero, e perciò i quadrati delle rette KL, LF, [o] sono commensurabili, ed i loro lati KL, LF, saranno commensurabili almeno in potenza: ma LF fù dimostrata Rationale, sarà la retta KL, [p] che gli è commensurabile, Rationale.

g 8. del 13.



o 6. del 10.

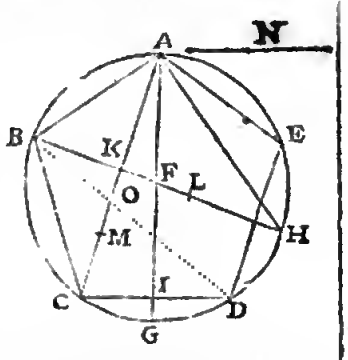
p 6. definit. del 10.

In oltre, perche HF, ouero FB, è il quadruplo di FL, sarà BL il quintuplo di LF: mà il quadrato di KL fù dimostrato il quintuplo del quadrato di LF, sarà il quadrato di KL al quadrato di LF, [q] come BL ad LF; ed inuertendo, il quadrato di LF al quadrato di LK [r] sarà come LF ad LB. Si considerino tre quantità, la prima sia LF, la seconda LK, e la terza LB. Perche il quadrato della prima LF al quadrato della seconda LK, è come la prima LF alla terza LK, ed il quadrato di LF al quadrato di LK [t] hà duplicata proportione, che la prima LF alla seconda LK; sarà la proportione di LF ad LB duplicata di quella, che hà la prima LF alla seconda LK; e perciò le tre quantità LF, LK, LB, sono continue proportionali; e sarà BL ad LK, come LK ad LF, ed il quadrato di BL al quadrato di LK [u] sarà come il quadrato di KL al quadrato di LF: ma il quadrato di KL è il quintuplo del quadrato di LF, sarà il quadrato di BL il quintuplo del quadrato di LK, e perciò il quadrato di BL al quadrato di LK, per lo Scolio nel fine del 9. non è come numero quadrato à numero quadrato, ed in conseguenza le rette BL, LK, [x] sono incommensurabili in lunghezza. E perche le rette BL, LK, furono dimostrate Rationali, saranno dunque le rette BL, LK, Rationali, commensurabili solamente in potenza. Si che, detratta dalla Rationale BL, la Rationale KL, commensurabile solamente in potenza, la rimanente BK [y] sarà irrationale, e sarà quella, che si chiama Apotome, la di cui congruente è la retta KL. Dal quadrato

q 11. del 5.
r Corol. alla 4. del 5.
t 20. del 6.
u 22. del 6.
x 9. del 10.
y 74. del 10.

di BL

di BL se ne detragga il quadrato di KL, [z] ed il restante sia il quadrato della retta N. Perche il quadrato di BL è il quintuplo del quadrato di LK, detratto dal quadrato di BL la sua quinta parte, cioè il quadrato di LK, il rimanente, cioè il quadrato della retta N, sarà il quadruplo del quadrato di KL; e perciò di quelle parti, che il quadrato di BL è cinque il quadrato della retta N sarà quattro; ed in conseguenza il quadrato di BL al quadrato di N, sarà come numero à numero: per la qual cosa i quadrati di BL, e di N, [a] sono commensurabili, ed i loro lati BL, ed N, sono commensurabili almeno in potenza. E perche la retta BL fù dimostrata Rationale, sarà ancora la retta N, [b] che gli è commensurabile, Rationale. In oltre, perche il quadrato di BL al quadrato della retta N, è come 5 à 4, per lo Scolio nel fine del 9, i quadrati delle due BL, ed N, non sono come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette BL, ed N [c] sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, saranno le rette BL, ed N, Rationali, commensurabili solamente in potenza. Di più, essendo la Rationale BF commensurabile in lunghezza alla sua quarta parte FL, sarà tutta la composta BL [d] commensurabile in lunghezza ad FB: ma FB è commensurabile in lunghezza al suo doppio BH, sarà BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH. E perche il quadrato della Rationale BL supera il quadrato della congruente LK, per il quadrato della retta N, incommensurabile in lunghezza alla composta BL, essendo BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH, per la 4. delle terze definitioni del 10, la retta BK sarà quarta Apotome.



Finalmente, perche l'angolo BAH [e] nel mezzo circolo è retto, e la retta AK è perpendicolare al diametro HB, per il Corollario all'8 del sesto, sarà AB media proportionale frà le due HB, BK, e sarà il quadrato di AB [f] vguale al rettangolo contenuto dalle due HB, BK. Hor essendo il quadrato della retta AB vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale BH, e dalla quarta Apotome BK, per la 95 propos. del 10, la retta AB sarà quella retta, che si chiama Minore. Per la qual cosa supposto il diametro BH Rationale, il lato AE del pentagono iscritto nel circolo ABCD; sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

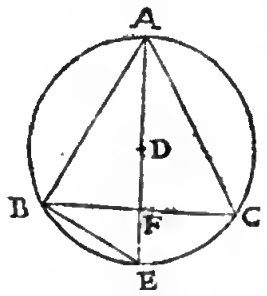
Il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto nel circolo, è il triplo del quadrato del semidiametro del medesimo circolo.

Nel circolo ABC sia iscritto il triangolo equilatero ABC. Dico che il

quadra-

z Lem. dopo la 14. del 10.
a 6. del 10.
b 6. definit. del 10.
c 9. del 10.
d 16. del 10.
e 31. del 3.
f 17. del 6.

quadrato del lato AB è il triplo del quadrato del ſemidiametro del circolo ABC. Dall'angolo A, per il centro D, ſi faccia paſſare il diametro AE, il quale, per il Corollario 2. alla 10. propoſ. di queſto, diuide l'arco BEC in due parti vguali in E, e diuide ancora la retta BC in due patti vguali, & ad angoli retti in F; ſi tiri la retta BE. Perche BC è lato del triangolo equilatero, perciò l'arco BEC,[a] che lo ſottende, ſarà la terza parte di tutta la circonferenza ABC, e l'arco BE ſua metà ſarà la ſeſta parte della medeſima circonferenza; per la qual coſa la retta BE, che ſottende la ſeſta parte della circonferenza ABEC, ſarà il lato dell'eſagono; e per il Coroll. alla 15. prop. del quarto, ſarà BE vguale al ſemediametri ED. E perche l'angolo ABE, nel ſemicircolo ABC, [b] è retto, ſarà il quadrato di AE [c] vguale à i quadrati de i due lati AB, BE: ma il quadrato di AE, per lo ſcolio alla 4. del 2. è il quadruplo del quadrato di ED, cioè il quadruplo del quadrato di BE, i quadrati delle due AB, BE, ſaranno il quadruplo del quadrato di BE. Per la qual coſa il quadrato di AB ſarà il triplo del quadrato di BE: ma BE è vguale al ſemidiametro DE, ſarà il quadrato del lato AB il triplo del quadrato del ſemidiametro DE, ch'era da dimoſtrarſi.



a 28. del 3.

b 31. del 3.
c 47. del 1.

COROLLARIO I.

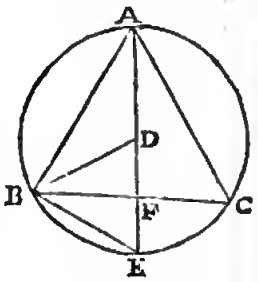
Da quel che s'è detto è manifeſto, che il quadrato del diametro del circolo è nella proportione ſeſquitertia al quadrato del lato del triangolo equilatero, iſcritto in eſſo circolo.

Poiche eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato del lato AB è il triplo quadrato del ſemidiametro AD, ſuppoſto che il quadrato di AB, ſia 3, ſarà il quadrato di AD 1; ma il quadrato del diametro AE è il quadruplo del quadrato di AD, ſe il quadrato di AD è 1, ſarà il quadrato di AE 4, e perciò il quadrato del diametro AE al quadrato di AB ſarà come 4 à 3, cioè nella proportione ſeſquitertia, come ſi diſſe.

COROLLARIO II.

E' ancora manifeſto, che il lato BC, del triangolo equilatero ABC, diuide il ſemidiametro DE in due parti vguali in F.

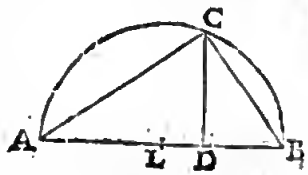
Si tiri la retta DB. Essendosi dimostrato BE essere lato dell'esagono, sarà BE vguale al semidiametro BD; e perche gli angoli in F sono retti,
a 47. del 1. *sarà il quadrato di BD a vguale à i quadrati de i due lati BF, FD; e similmente il quadrato di BE è vguale à i quadrati de i due lati BF, FE; ma BD è dimostrato vguale al lato BE, i quadrati de i due lati BF, FD, saranno vguali à i quadrati de i due lati BF, FE; se ne leui il cõmune quadrato di BF, resta il quadrato di FD vguale al quadrato di FE, e la retta DF sarà vguale alla retta FE, ch' era da dimostrarsi.*

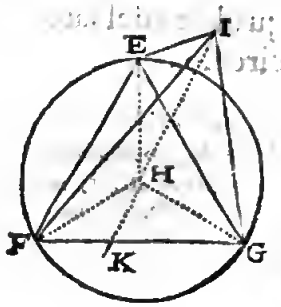


PROBLEMA I. PROPOSITIONE XIII.

Costruire il tetraedro, e comprenderlo nella data sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della data sfera è in proportione sesquialtera al quadrato del lato del tetraedro costrutto.

Sia AB il diametro della data sfera, sopra il quale si descriua il mezzo circolo ACB; si faccia BD vguale alla terza parte di AB, e nel punto D si eleui la retta DC
a 11. del 1. b perpendicolare ad AB, concorrẽte con la circonferenza in qualche punto C; si tirino le rette AC, CB; si prenda poi la retta HE vguale alla retta CD, e fatto centro in H, coll'interuallo EH, si descriua il circolo EFG; nel quale
b 2. del 4. s'iscriua il triangolo equilatero EFG; si tirino le rette HF, HG, sarà HF, ouero HG, vguale ad EH, cioè vguale alla retta CD. Nel punto H si eleui la retta HI
c 11. del 11. d 5. definit. del 11. c perpendicolare al piano EFG, gli angoli IHE, IHF, IHG
d sarãno retti. Si faccia HI
e 3. del 1. e vguale ad AD, e si tirino le rette IE, IF, IG. Dico che il solido contenuto da i quattro triangoli IEF, IFG, IGE, EFG, è quella piramide, ò tetraedro, che si è proposto fare. Si considerino i due triangoli ADC, IHE. Perche i lati IH, HE, per costruttione, sono vguali à i due lati AD, DC, e gli angoli IHE, ADC,
f 4. del 1. sono frà loro vguali, stante che sono retti, sarà la base AC
f vguale alla base IE. Nell'istesso modo, considerando i triangoli ADC, IHF, IHG, si dimostrerà, che ciascuno de i lati IF, IG, è vguale ad AC, e perciò i tre lati IE, IF, IG, sono frà di loro vguali. In oltre per il Coroll. all'8. prop. del 6. la retta CD è media proportionale frà le due AD, DB, e per il Lem. 8. dopo la 18. del 6, la prima AD alla terza DB hà duplicata proportione





di

di quella, che hà la prima AD alla ſeconda DC: ma il quadrato di AD al quadrato di CD [g] hà la medeſima duplicata proportione di quella, che hà AD à DC, ſarà il quadrato di AD al quadrato di DC, [h] come AD à DB; e componendo, i quadrati delle due AD, DC, [k] giunti inſieme, cioè il quadrato di AC al quadrato di CD ſarà come AB à BD: ma AB, per coſtruttione, è il triplo di BD, ſarà il quadrato di AC il triplo del quadrato di CD: fù fatta EH vguale à CD, ſarà il quadraro di AC, cioè il quadrato di IE, il triplo del quadtato di EH: ma per l'antecedente propoſ. il quadrato del lato EF è il triplo del medeſimo quadrato di EH, ſarà il quadrato di IE vguale al quadrato di EF, e la retta IE vguale alla retta EF: ma le rette IE, IF, IG, ſono frà di loro vguali, e ſono ancora vguali le tre EF, FG, GE, ſaranno le rette IE, IF, IG, GE, EF, FG frà di loro vguali; dal che i quattro ttiangoli IEF, IFG, IGE, EFG, ſono equilateri, e frà di loro vguali, ed il ſolido IEFG per la 26. defin. dell'11, è Tetraedro. Dico che la piramide, ò Tetraedro, IEFG, il di cui vertice I, e la baſe EFG, è quella, che ſi comprende nella data sfera; e che il quadrato del diametro AB è ſeſquialtero al quadrato del lato EF.

Si continui la perpendicolare IH verſo K, e ſi faccia HK [l] vguale alla retta DB; ſarà tutta IK vguale ad AB. Perche l'angolo IHE è retto, ſarà la retta EH [m] perpendicolare alla retta IK: ma le tre rette IH, HE, HK, per coſtruttione, ſono vguali alle tre rette AD, DC, DB, e queſte ſono continue proportionali; le tre rette ancora IH, HE, HK, ſaranno continue proportionali; dal che il rettangolo contenuto dalle due IH, HK, [n] ſarà vguale al quadrato della perpendicolare HE; e per lo Scolio alla 17. propoſ. del 6, il punto E è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il punto F, come ancora il punto G, è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Se dunque ſi concepiſce IK come Aſſe della sfera, ed intorno ad eſſo s'intenda circonuoluto il ſemicirçolo, che paſſa per i punti I, E, K, la circonferenza di quello paſſerà per i punti G, ed F, e ſarà deſcritta la sfera, il di cui diametro IK è vguale al diametro AB della data sfera, per la qual coſa la sfera deſcritta comprende il coſtrutto Tetraedro.

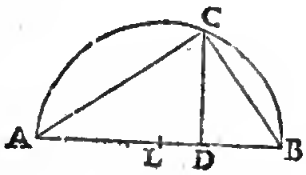
Finalmente, perche AB, per coſtruttione, è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 3, la retta DB ſarà 1, e la retta AD ſarà 2, dal che BA ad AD ſarà come 3 à 2, cioè ſarà nella proportione ſeſquialtera. Di più, perche AC, per il Coroll. all'8. prop. del 6, è media proportionale frà le due BA, AD, haverà la prima BA alla terza AD [o] duplicata proportione di quella, che hà la prima BA alla ſeconda AC: ma il quadraro di BA al quadrato di AC [p] hà la medeſima duplicata proportione, che hà BA ad AC, ſarà il quadrato di BA al quadrato di AC, [q] come BA ad AD: fù dimoſtrata BA eſſere nella proportione ſeſquialtera ad AD, ſarà il quadrato di AB ſeſquialtero al quadrato di AC. E perche IK è vguale ad AB, ed il lato EF è dimoſtrato vguale ad AC, ſarà il quadrato di IK ſeſquialtero al quadrato di EF. Per la qual coſa il quadrato del diametro della data sfera è nella proportione ſeſquialtera al quadrato del lato della piramide coſtrutta IEFG, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

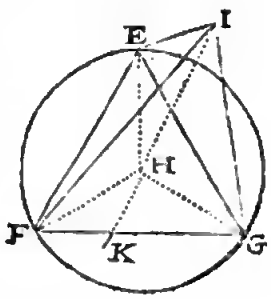
g 20. del 6. h 22. del 5. K 18. del 5. l 3. del 1. m 3. definit. del 11. n 17. del 6. o Lem. 8. dopo la 18. del 6. p 20. del 6. q 22. del 5.

COROLLARIO I.

Dal quel che ſi è detto è manifeſto, che il quadrato del diametro della detta ſfera è nella proportione quadrupla ſeſquialtera al ſemidiametro del circolo circoſcritto intorno la baſe della coſtrutta piramide.

Poiche eſſendo il quadrato del diametro IK, ouero AB, nella proportione ſeſquialtera al quadrato del lato EF, di quelle parti, che il quadrato di IK è 9, il quadrato di EF ſarà 6, ed il quadrato di EH ſarà 2, (ſtante che il quadrato di EF è triplo al quadrato di EH,) e perciò di quelle parti, che il quadrato di IK, ouero AB, è 9, il quadrato di EH ſarà 2: ma la proportione di 9 à 2 è quadrupla ſeſquialtera, ſarà la proportione del quadrato di AB al quadrato di EH quadrupla ſeſquialtera, come ſi diſſe.





COROLLARIO II.

Appare ancora, che la retta LD, tirata dal centro della ſfera perpendicolare al piano della baſe della piramide, ch'è quel piano, che paſſa per la retta DC, e fà angoli retti con AD, è la ſeſta parte di tutto il diametro AB, cioè la terza parte del ſemidiametro LB. Perche AB è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 6, la retta BD ſarà 2, e la retta BL 3, dal che DL ſarà 1, e perciò AB ſarà ſeſtupla ad LD, ed LB ſarà tripla ad LD, come ſi diſſe.

COROLLARIO III.

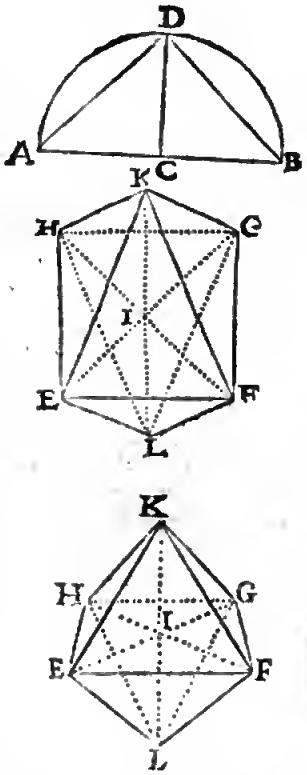
Dalla coſtruttione è ſimilmente manifeſto, che l'altezza del Tetraedro è dùe terzi del diametro della ſfera, che lo contiene, e di quelle parti, che il quadrato del dia-

metro

metro è 9, il quadrato dell'altezza perpendicolare del detto Tetraedro è 4.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Costruire l'Ottaedro, e comprenderlo nella sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro costrutto.



Sia AB il diametro della data sfera, diuiso in due parti vguali in C, e fatto centro in C, coll'interuallo CA, ouero CB, sia descritto il mezzo circolo ADB; nel punto C, sia eleuata la retta CD [a] perpendicolare ad AB, e si tirino le rette DB, DA; poi si esponga la retta EF vguale alla retta DB, e sopra la retta EF [b] si descriua il quadrato EFGH; si tirino le diagonali GE, HF, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto I; se intorno al quadrato HEFG fosse circoscritto vn circolo, le rette IG, IH, IE, IF, sarebbero semidiametri di quel circolo, e perciò sono frà di loro vguali. Nel punto I si eleui la retta IK [c] perpendicolare al piano HEFG, la quale si continui sotto al piano HEFG verso L, e tanto IK, come IL, [d] si faccia vguale ad IH; si tirino le rette KH, KG, KE, KF, LF, LE, LG, LH. Dico che il solido contenuto da gli otto triángoli KHE, KEF, KFG, KGH, LFE, LFG, LGH, LHE, è l'Ottaedro proposto. Perche i lati GI, IH, del triangolo GIH, sono vguali à i due lati HI, IE, del triangolo HIE, e la base HG è vguale alla base HE, sarà l'angolo GIH [e] vguale all'angolo HIE, e perciò gli angoli GIH, HIE, sono retti. Similmente perche la retta KI è perpendicolare al piano HEFG, gli angoli KIH, KIG, KIF, KIE [f] sono retti. Si considerino i due triangoli HGI, HIK. Perche IK, è vguale ad IH, ouero IG, i due lati HI, IG, saranno vguali à i due lati HI, IK; gli angoli HIG, HIK, sono frà di loro vguali, stante che sono retti, sarà la base HG [g] vguale alla base HK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il medesimo lato HG è vguale al lato GK, per la qual cosa il triangolo KHG è triangolo equilatero. E proceedendosi col medesimo ordine, si proverà, che tutti gli altri triangoli, sopra nominati, sono equilateri; e perche ogn'vno di quei triangoli hà per base vn lato del quadrato EFGH, essendo i lati del quadrato frà di loro

a 11. del 1.

b 46. del 1.

c 12. del 11.

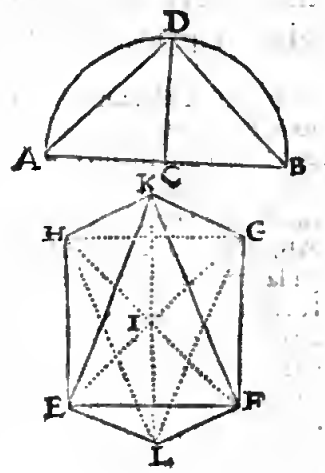
d 3. del 1.

e 8. del 1.

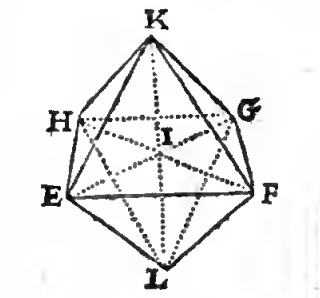
f 3. defin. del 11.

g 4 del 1.

vguali, tutti i lati de i detti triangoli equilateri ſaranno frà di loro vguali, ed in conſeguenza eſſi triangoli equilateri ſono frà di loro vguali; e per la defin. 27. dell'11, il ſolido contenuto da i detti otto triangoli equilateri, ed vguali, è Ottaedro. Dico che l'Ottaedro coſtrutto ſi comprende nella sfera, il di cui diametro è AB; e che il quadrato del diametro AB è il doppio del quadrato del lato KH, ouero KG &c.



Perche le tre rette LI, IH, IK, ſono, per coſtruttione, frà loro vguali, ſarà LI ad IH come IH ad IK, ed il rettangolo contenuto
h 17. del 6. dalle due LI, IK, [h] ſarà vguale al quadrato di IH: e perche la retta IH fà angoli retti colla retta KL, per lo Scolio alla 17. del 6, il punto H è nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è la retta KL. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli altri angoli G, F, E, ſono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la retta KL. Inteſa dunque la retta KL come aſſe della sfera, intorno al quale ſi muoua il mezzo circolo LHK, ſin che torni nel luogo d'ond'è partito, la circonferenza di quello paſſerà per li punti G, F, E; per la qual coſa l'Ottaedro coſtrutto ſi cõtiene nella sfera deſcritta. Si conſiderino i due triangoli HIG, DCB, angoli retti in I, & C, ſarà il
K 47. del 1. quadrato di DB [K] vguale à i quadrati de i lati DC, CB, ed il quadrato di HG è vguale à i quadrati de' lati HI, IG: ma i lati HG, DB, per coſtruttione, ſono frà loro vguali, perciò i quadrati de i lati HI, IG, ſaranno vguali à i quadrati de i lati DC, CB, e le loro metà, cioè i quadrati delle rette HI, CD, ſono frà di loro vguali; ed in conſeguenza la retta IH ſarà vguale alla retta CD, ouero CB: furono fatte le rette IK, IL, ogn'vna vguale ad IH; ſarà tutta l'aſſe KL vguale al dato diametro AB; per la qual coſa l'Ottaedro coſtrutto è iſcritto nella data sfera



Finalmente perche gli angoli in C ſono retti, ed i lati CB, BD, ſono vguali à i due lati CD, CA, ſarà la baſe DB [l] vguale alla baſe DA. E perche l'angolo ADB [m] nel mezzo circolo è retto, il quadrato di AB [n] ſarà vguale à i quadrati de i due lati DB, DA: ma queſti ſono frà loro vguali, in conſeguenza il quadrato di AB ſarà il doppio del quadrato di DB. E perche AB è vguale all'aſſe KL della sfera, ed il lato DB è vguale ad HG, ouero HK, cioè vguale al lato dell'Ottaedro, ſarà il quadrato di KL, diametro della sfera, il doppio del quadrato del lato HK dell'Ottaedro coſtrutto, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

l 4 del 1.
m 31. del 3.
n 47. del 1.

CO-

COROLLARIO I.

Perche gli angoli KIH, KIE, HIF, ſono, per quel che ſi è dimoſtrato, retti, ſarà manifeſto, che nell'Ottaedro tutte le diagonali ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti nel centro della sfera, che lo contiene, ed in conſeguenza i tre piani HEFG, KELG, KHLF, che paſſano per quelle diagonali; ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti, e la loro commune ſettione ſarà la retta KL; ed eſſendo li angoli LEK, LGK ° ne i ſemicircoli, che hanno per diametro EK, ſaranno perciò retti, ed il quadrilatero KELG (i di cui lati ſono i medeſimi lati vguali dell'ottaedro) ſarà quadrato, e per ſimile ragione il quadrilatero KHLF è quadrato; d'onde appare, che li tre quadrilateri HEFG, KELG, KHLF, ſono figure quadrate vguali frà di loro. ° 31. del 3.

COROLLARIO II.

E ancora manifeſto, che ogn'vno di quei quadrati diuide l'Ottaedro in due piramidi di baſi quadrangolari, ſimili, ed vguali.

Poiche il quadrato HEFG diuide l'Ottaedro nelle due piramidi KHEFG, LFGHE, i di cui vertici ſono in L, & K, e la baſe commune è il medeſimo quadrato HEFG. Similmente il quadrato KHLF diuide l'ottaedro nelle due piramidi ELFKH, GFLHK, ed il quadrato KELG, lo diuide nelle due piramidi FGKEL, HELGK. E queſte piramidi ſono frà loro ſimili, ed vguali, ſtante che ſono contenute da triangoli equilateri, ed vguali, ed hanno per baſi vguali figure quadrate.

COROLLARIO III.

Perche dunque i quadrati, de' quali ogn'vno diuide l'ottaedro in due piramidi vguali, ſono tre ſoli, ſarà manifeſto, che l'ottaedro è diuiſo da quei tre quadrati in ſei vguali piramidi di baſi quadrangolari, due delle quali, preſe in qualunque modo, compongono tutto l'ottaedro.

COROLLARIO IV.

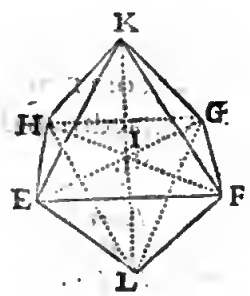
Se concepiremo iſcritti nella medeſima sfera il Tetraedro,

dro, e l'Ottaedro, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà in sesquitertia proportione al quadrato del lato del Tetraedro.

Poiche essendo il quadrato del diametro della sfera nella proportione sesquialtera al quadrato del lato del Tetraedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato del Tetraedro sarà 4. Similmente perche il quadrato del diametro della sfera è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3. D'ond'è manifesto, che di quelle parti, delle quali il quadrato del lato del Tetraedro è 4, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3, e perciò sono nella proportione sesquitertia.

COROLLARIO V.

Nel quadrato HEFG il lato HG è parallelo all'opposto lato EF, e nel quadrato HLFK il lato HK è parallelo all'opposto LF, dal che i due lati KH, HG, sono paralleli à i due lati EF, FL, ed in conseguenza il piano KHG è parallelo al piano ELF; ed arguendosi nell'istesso modo per gli altri, sarà manifesto, che nell'Ottaedro i piani de i triangoli opposti sono frà loro paralleli.



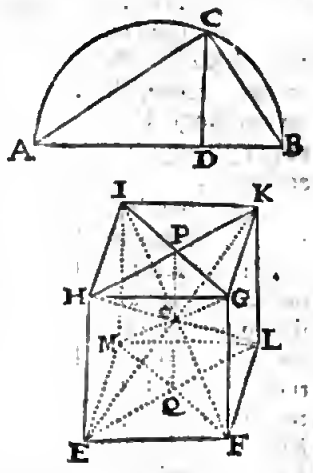
PROBLEMA III. PROPOSITIONE XV.

Costruire il Cubo, e comprenderlo nella data sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è triplo al quadrato del diametro del Cubo.

Sia AB il diametro della data sfera, intorno al quale sia descritto il mezzo circolo ACB. Si faccia BD la terza parte di AB, sarà AD il doppio di DB; nel punto D si eleui la retta DC, perpendicolare ad AB, e si tirino le rette CB, CA, si esponga poi la retta EF vguale alla retta CB; sopra la retta EF [b] si descriua il quadrato EFGH; ne i punti E, F, G, H, si eriggano le rette HI, EM, FL, GK, [c] perpendicolari al piano EFGH, ed ogn'vna [d] vguale alla retta CB, saranno frà di loro vguali, e

[a] 11. del 1.
[b] 46. del 1.
[c] 12. del 11
[d] 3. del 1.

saran-



saranno ancora vguali à i lati del quadrato EFGH; si tirino le rette IK, KL, LM, MI. Perche le rette GKHI, sono perpendicolari al piano EFGH, perciò sono [e] frà loro parallele, e le rette IK, HG, saranno frà loro vguali, e parallele; si che il quadrilatero IHGK è parellelogrammo, e per la 34. del 1, i lati, ed angoli opposti, sono frà di loro vguali; cioè l'angolo IHG sarà vguale all'angolo IKG, e l'angolo KGH vguale all'angolo KIH; ma gli angoli KGH, IHG, sono retti, gli angoli dunque GKI, HIK, sono retti. Ed essendo i lati KG, GH, HI, frà di loro vguali, ed il lato HG [f] vguale al lato IK, i quattro lati IH, HG, GK, KI, sono frà di loro vguali: gli angoli IHG, HGK, GKI, KIH, sono stati dimostrati retti, e perciò il quadrilatero IHGK è quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri piani EG, EL, LI, IE, KF, che contengono il solido IEFK sono quadrati; E perche sono eretti sopra gli vguali lati HE, EF, FG, GH, perciò sono frà di loro vguali, ed ogn'vno sarà vguale al quadrato IMLK, il quale [g] è simile, ed vguale all'opposto HEFG. Per la qual cosa il solido costrutto IEFH è Cubo. Dico che il Cubo IEFK è vguale à quello, che si può iscriuere nella sfera, il di cui diametro è AB. Ne i piani opposti HK, EL, si tirino i diametri HK, IG, EL, MF. Perche le due HE, KL, sono vguali, e parallele alla retta GF, saranno [h] frà loro vguali, e parallele, e perciò le due KH, LE, [k] sono frà loro vguali, e parallele, ed il quadrilatero HELK è parallelogrammo; Nell' istesso modo si dimostrerà, che il quadrilatero IMFG è parallelogrammo. E perche ogn'vno de i piani HELK, IMFG, [l] diuide il Cubo IEFK in due parti vguali, perciò ambidue per il Corol. alla 39. prop. del 11. passano per il centro del Cubo IEFK; come per esempio per il punto O, e tirate le diagonali KE, IF, HL, GM, queste, per il citato Corollario si segano scambicuolmente in due parti vguali nel centro O. In oltre ne i quadrati EG, GL, gli angoli GFE, GFL, sono retti, e per ciò la retta GF [m] è perpendicolare al piano EFLM, e l'angolo GFM sarà retto; per la qual cosa il parallelogrammo IMFG è rettangolo. Si considerino i due triangoli GFM, IMF; essendo i due lati GF, FM, vguali à i due lati IM, MF, e gli angoli GFM, IMF retti, cioè vguali, sarà la base IF [n] vguale alla base MG, e considerando il rettangolo HELK, nell'istesso modo si dimostrerà, che i diametri KE, HL, sono frà di loro vguali. Di nuouo si considerino i triangoli KLE, IMF. Perche il lato EL, come diametro del quadrato MEFL, è vguale ad MF, ed il lato KL è vguale ad IM, i due lati KL, LE, saranno vguali à i due lati IM, MF: li angoli KLE, IMF, sono vguali, stante che sono retti, sarà la base IF [o] vguale alla base EK; per la qual cosa i diametri EK, IF, HL, GM, sono frà di loro vguali; E

e 6. del 11.

f 34. del 1.

g 24. del 11.

h 9. del 11. k 33. del 1.

l 28. del 11.

m 4. dell.

n 4. del 1.

o 4. del 1.

per

per quel che ſi è detto, i ſemidiametri OK, OI, OH, OE, OF, OL, OG, OM, ſono frà di loro vguali, ed i punti I, H, M, L, F, G, p ſono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la diagonale EK: ſi che, preſa EK come Aſſe della sfera, intorno alla quale s'intenda muouerſi il mezzo circolo, che hà per diametro la medeſima retta EK, fin che ritorna nel luogo d'ond'è partito, la ſuperficie sferica, che deſcriuerà, paſſerà per gli angoli H, I, M, L, F, G, ed il Cubo IEFG ſarà iſcritto nella sfera coſtrutta.

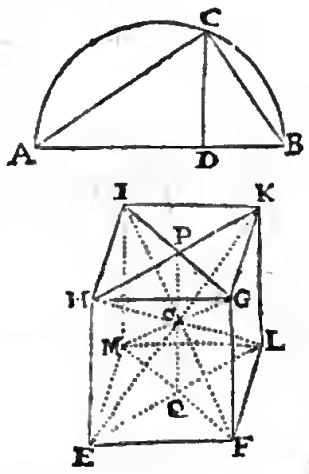
p Scol. alla 13. del 6.

Di più, perche l'angolo EFL è retto, ſarà il quadrato di EL q vguale à i quadrati de i due lati EF, FL; ma i lati EF, FL, ſono frà loro vguali, ſarà il quadrato di EL, il doppio del quadrato di FL, cioè il doppio del quadrato di LK, dal che i quadrati delle due EL, LK, inſieme giunti, ſono il triplo del quadrato di LK. Nel triangolo KLE, angolo retto in L, il quadrato di EK r è vguale à i quadrati de i due lati EL, LK: ma i due quadrati di EL, LK, ſono il triplo del quadrato di LK, ſarà il quadrato di EK il triplo del quadrato di LK, cioè il triplo del quadrato di EF: ma EF è è vguale alla retta CB, ſarà il quadrato di EK il triplo del quadrato de CB. Di nuouo perche l'angolo ACB s nel mezzo circolo è retto, per il Corollario all'8. prop. del 6, la retta CB ſarà media proportionale frà le due AB, BD, ed hauerà AB, à BD u duplicata proporrione di quella, che hà AB à BC: ma il quadrato di AB al quadrato di BC x hà la medeſima duplicata proportione di quella, che hà AB à BC ſarà il quadrato di AB al quadrato di BC y come AB à BD: fù fatta, per coſtruttione la retta AB il triplo di BD, ſarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di CB: ma per quel che ſi è dimoſtrato, il quadrato di EK è il triplo del quadrato della medeſima CB, il quadrato dunque di EK ſarà vguale al quadrato di AB, e la retta EK ſarà vguale alla retta AB. Per la qual coſa la sfera deſcritta intorno al diametro EK, è vguale alla sfera, che ſi deſcriue intorno al dato diametro AB, e perciò il Cubo IEFK è quello, ch'è contenuto dalla sfera, il di cui diametro è AB. Finalmente eſſendoſi dimoſtrato, che il quadrato di EK è il triplo del quadrato di EF, ſarà dunque il quadrato del diametro della sfera triplo al quadrato del lato del Cubo iſcritto, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

q 47. del 1.

r 47. del 1.

s 31. del 3.



u Lem. 8. dopo la 18. del 6.

x 20. del 6.

y 11. del 5.

COROLLARIO I.

Eſſendo la retta PQ cõmune ſettione de i piani HELK, IMFG, quella, per la 39. propſ. dell'11. è diuiſa dalla diagonale IF in due parti vguali in O; dal che OP, ſarà vguale

ad

ad OQ. E perche i punti P, & Q, ſono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli oppoſti quadrati, paſſa per il centro del Cubo, dou'è diuiſa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifeſto, che nella figura Cuba la retta tirata dal centro del quadrato al centro del quadrato oppoſto, paſſa per il centro del Cubo, nel quale è diuiſa da i diametri di eſſo Cubo in due parti vguali, ed oltre à ciò tutt'i diametri del Cubo ſi diuidono ſcambieuolmente in due parti vguali nel medeſimo centro.

COROLLARIO II.

Da quel che ſi è dimoſtrato appare, che il quadrato del diametro della ſfera è vguale al quadrato del lato del Tetraedro, col quadrato del lato del Cubo, iſcritto nella medeſima ſfera.

Il che è chiaro, conſiderando il mezzo circolo ACB, doue la retta AC, per la coſtruttione del Tetraedro, è vguale al lato del Tetraedro deſcritto nella ſfera, il di cui diametro ſia AB, e la retta CB, per l'antecedente propoſ. è il lato del Cubo iſcritto nella medeſima ſfera. E perche il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due rette AC, CB, ſarà il quadrato del diametro della ſfera vguale à i due quadrati, cioè vno è il quadrato del lato del Tetraedro, e l'altro è il quadrato del lato del Cubo iſcritto nella medeſima ſfera.

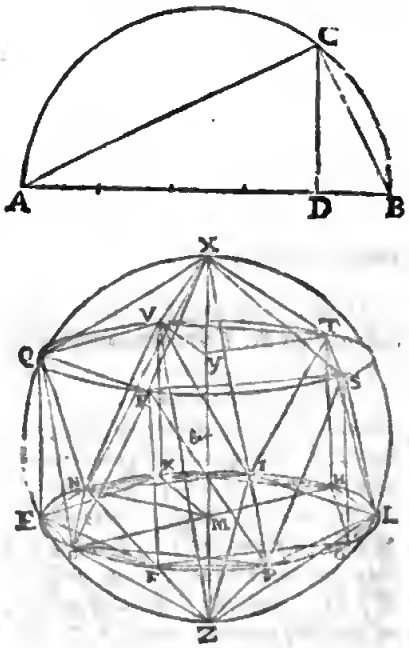
Oltre à ciò, eſſendo le rette HE, KL, IM, GF, perpendicolari al piano MEFL, i piani HELK, IMFG, ſaranno perpendicolari al piano MEFL, e la loro commune ſettione PQ ſarà perpendicolare al medeſimo piano MEFL. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la retta OP è perpendicolare al piano IHGK; e perche i punti P, Q, ſono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli oppoſti quadrati, paſſa per il centro del Cubo, dou'è diuiſa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifeſto, che nella figura Cuba, la retta, che paſſa per il centro di vno de i quadrati, ed è perpendicolare al medeſimo quadrato, continuata concorre col diametro del Cubo nel centro del medeſimo Cubo, doue tutti i diametri di eſſo Cubo ſi diuidono ſcambieuolmente in due parti vguali. E perche la retta PQ è vguale, e parallela ad EH, la ſua metà OQ, ouero OP, ſarà vguale alla metà del lato HE del Cubo; dal che ſarà ancora manifeſto, che la retta tirata dal centro del Cubo al centro d'vno de i quadrati, è vguale alla metà del lato del Cubo.

a 8. del 11.
b 19. del 11.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XVI.

Coſtruire l'Icoſaedro, e comprenderlo nella ſfera, che contiene le altre figure antedette, e dimoſtrare, che il lato dell'Icoſaedro è linea Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Minore.

Sia AB il diametro della data ſfera, intorno al quale ſia deſcritto il mezzo circolo ACB; ſi faccia BD la quinta parte di AB, ſarà AB il quintuplo di BD, nel punto D ſi eleui la retta DC [a] perpendicolare ad AB, e ſi tiri la retta CB. Sia poi eſpoſto il circolo EFLK, il di cui ſemidiametro MH, ouero MO, ſia vguale alla retta CB; e nel circolo EFLK ſia iſcritto [b] il pentagono EFG HK equilatero, ed equiangolo; ſi diuidano gli archi EF, FG, GH, HK, KE, [c] in due parti vguali ne i punti O, P, L, I, N, e ſi tirino le rette EO, OF, FP, PG, GL, LH, HI, IK, KN, NE. Perche la retta OP è lato del pentagono iſcritto, ſarà l'arco OP la quinta parte di tutta la circonferenza EFGHK, e la metà, cioè l'arco FP, ſarà la decima parte della medeſima circonferenza; per la qual coſa la retta FP ſarà lato del decagono. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che ogn'vna delle rette PG, GL, LH, HI, IK, KN, NE, EO, OF, è lato del decagono. Negli angoli del pentagono iſcritto, cioè ne i punti E, F, G, H, K, ſi eriggano le rette EQ, FR, GS, HT, KV, [d] perpendicolari al piano del circolo EFG HK, ciaſcuna delle quali ſi faccia vguale al ſemidiametro MH, del circolo EFGHK, e ſi tirino le rette QR, RS, ST, TV, VQ. Perche le rette QE, RF, SG, TH, VK, ſono perpendicolari al piano EFGHK, perciò ſono frà di loro parallele; fù fatta ogn'vna di eſſe vguale al ſemidiametro MH, perciò ſono frà di loro vguali, e parallele, e per la 33. propoſ. del 1. quelle, che congiungono gli eſtremi, ſono frà di loro vguali, e parallele; per la qual coſa le rette RQ, QV, VT, TS, SR, ſono vguali, e parallele alle corriſpondenti FE, EK, KH, HG, GF; e per la 10. propoſ. del 11, l'angolo QRS è vguale all'angolo EFG, l'angolo RST è vguale all'angolo FGH, l'angolo STV vguale all'angolo GHK, l'angolo TVQ vguale all'angolo HKE, e l'angolo VQR vguale all'angolo KEF: dal che il poligono QRSTV



[a] 11. del 1.
[b] 12. del 4.
[c] 30. del 3.
[d] 12. del 11.
[e] 6. del 11.

sarà equilatero, ed equiangolo al poligono EFGHK: ma il poligono EFGHK, per costruttione, è pentagono equilatero, ed equiangolo, sarà il poligono RSTVQ pentagono equilatero, ed equiangolo. Da i punti O,P,L,I,N, à i punti R,S,T,V,Q, si tirino le rette OQ, OR, PR, PS, LS, LT, IT, IV, NV, NQ. Nel triangolo RFP, angolo retto in F, il quadrato di RP è vguale à i quadrati de due lati RF, FP: ma RF [f] è vguale al semidiametro MH, cioè è lato dell'esagono iscritto nel circolo EFGHK, e la retta FP, per quel che si è dimostrato, è lato del decagono iscritto nel medesimo circolo; sarà per la 10. propos. di questo, la retta RP il lato del pentagono iscritto nell'istesso circolo EFGHK. Nell'istesso modo, considerando il triangolo RFO, angolo retto in F, del quale RF è lato dell'esagono, ed FO è lato del decagono, si dimostrerà, che il lato RO è lato del pentagono; ed argumentandosi nel medesimo modo, si proverà, che ogn'vna dell'altre rette PS, LS, LT, IT, IV, NV, NQ, OQ, è lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, iscritto nel circolo EFGHK, e perciò sono frà di loro vguali; ed ogn'vna è vguale à ciascun lato del pentagono EFGHK, ed ancora vguale à ciascun lato del pentagono QRSTV; per la qual cosa i dieci triangoli QOR, ROP, RPS, SPL, SLT, TLI, TIV, VIN, NVQ, NQO, sono equilateri, ed vguali frà loro. Nel centro M si eleui la retta MX [g] perpendicolare al piano EFGHK, la quale si continui verso Z; si faccia MY vguale ad MH, cioè vguale al lato dell'esagono, e si faccia YX, come ancora MZ, vguale al lato del decagono, cioè vguale alla retta FP. Si tirino le rette XT, XS, XR, XQ, XV, VY, TY; e si tirino parimente le rette ZO, ZP, ZL, ZI, ZN, MK, MN. Perche le rette MY, HT, sono perpendicolari al piano EFLK, perciò [h] sono parallele; ma sono ancora vguali, stante che ogn'vna è vguale ad MH, in conseguenza le rette YT, MH, [K] che congiungono gli estremi, sono frà loro vguali, e parallele; ed essendo MH lato dell'esagono, sarà ancora YT lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo. In oltre perche YT è parallela ad MH, l'angolo XYT [l] sarà vguale all'angolo YMH: ma l'angolo YMH è retto, stante che XM [m] è perpendicolare al piano EFLK, l'angolo dunque XYT sarà ancora retto, ed il quadrato di XT [n] sarà vguale à i quadrati de i due lati XY, YT: fù dimostrata la retta YT essere lato dell'esagono, e la retta XY, per costruttione, è lato del decagono, per la 10. propos. di questo, XT sarà lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo. Nell'istesso modo, considerando il triangolo XYV, angolo retto in Y, si dimostrerà, che XV è lato del pentagono. E col medesimo modo d'argumentare, si proverà, che ciascuna delle rette XQ, XR, XS, è lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo EFLK. E perche le rette QR, RS, ST, TV, VQ, sono ancora lati del pentagono iscritto nel circolo QRSTV, ouero EFGH, tutti i lati dunque de i cinque triangoli XQR, XQS, XST, XTV, XVQ, sono frà di loro vguali, ed i detti cinque triangoli sono equilateri, ed vguali. Nell'istesso modo si proverà, che i cinque triangoli OZP, PZL, ZLI, ZIN, ZNO, sono equilateri, ed vguali. E perche le basi di questi triangoli sono i lati del pentagono EFGHK, e le basi de i triangoli XQR, XRS, XST, XTV, XVQ, sono i lati del pentagono QRSTV; essendosi dimostrati i lati del pentagono QRSTV vguali à i

f 47. del 1.

g 12. del 11.

h 6. del 11.

K 33. del 1.

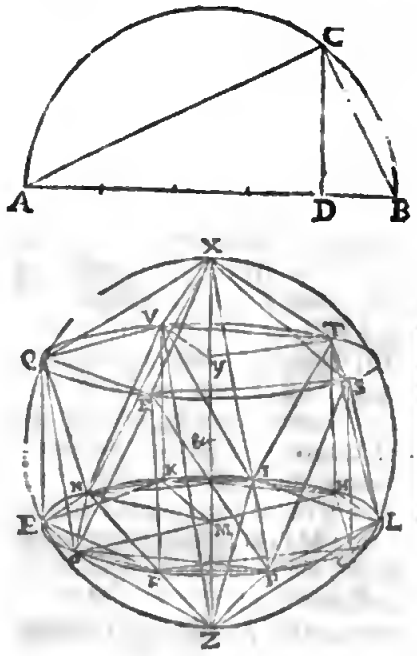
l 29. del 1.

m 3. definit. del 11.

n 47. del 1.

lati del pentagono EFGHK, ſaranno tutti i venti triangoli, che contengono il ſolido XQZLS, frà di loro vguali, ed equilateri, e per la 19. definit. del 11, il ſolido XQEZL ſarà Icoſaedro. Dico ch'è quello, che ſi comprende nella ſfera data, e che ciaſcun lato di eſſo Icoſaedro è linea Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Minore.

Si tiri la retta XO. Eſſendo il punto M centro del circolo EFLK, ſarà MN vguale ad MH, ouero MY, cioè ogn'vna ſarà il lato dell'eſagono; ma YX, per coſtruttione, è lato del decagono, ſarà MX compoſta del lato dell'eſagono, e del lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo; e per la 9. propoſ. di queſto, la retta MX ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, media proportione nel punto Y, la di cui maggior parte ſarà MY; dal che XM ad MY [o] ſarà come MY ad YX; ma MY è vguale ad MN, e la retta MZ è vguale ad YX, ſarà XM ad MN, come la medeſima MN ad MZ; ed il rettangolo contenuto dalle due XM, MZ, [p] ſarà vguale al quadrato della media MN. E perche la retta MN fà angoli retti con XZ, ſtante che XM è perpendicolare al piano EFLK, per lo Scolio alla 17. propoſitione del 6, il punto N è nella circonferenza di quel circolo, che hà per diametro la retta XZ. Similmente eſſendo ZM lato del decagono, e la retta MY lato dell'eſagono, ſarà ZY [q] diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e ſarà ZY ad YM, [r] come YM ad MZ. In oltre, perche le rette YM, VK, ſono perpendicolari al piano EFLK, perciò [t] ſono frà loro parallele: ma ſono, per coſtruttione, vguali, per eſſere ciaſcuna vguale ad MH, ſarà VY [u] vguale, e parallela ad MK, e ſarà l'angolo VYX [x] vguale all'angolo KMY; fù dimoſtrato l'angolo KMY retto, l'angolo dunque VYX ſarà retto. E perche MK è lato dell'eſagono, ſarà ancora VY lato del eſagono iſcritto nel medeſimo circolo EFLK; per la qual coſa YV ſarà vguale ad YM: e perche ſi è dimoſtrato, che ZY ad YM è come YM ad MZ, eſſendo MY vguale ad YV, e la retta MZ vguale ad YX, ſarà ZY ad YV, come la medeſima YV ad YX, ed il rettangolo contenuto dalle due ZY, YX, [y] ſarà vguale al quadrato di YV, e per lo Scolio alla 17. del 6, il punto V è nella circonferenza di quel circolo, del quale ZX è diametro. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ciaſcuno degli altri angoli Q, R, S, T, O, P, L, I, è nel-



o 3. definit. del 6.
p 17. del 6.
q 9. del 13.
r 3. defin. del 6.
t 6. del 11.
u 33. del 1.
x 29. del 1.
y 17. del 6.

la

la circonferenza di quel circolo, del quale è diametro la medeſima retta ZX. Si che preſa ZX come Aſſe della sfera, intorno al quale ſi concepiſca muouerſi il ſemicircolo, che paſſa per li punti ZNX, ſin che ritorna nel luogo, donde partì, la ſuperficie sferica, che deſcriuerà, paſſerà per tutti gli angoli del coſtrutto Icoſaedro. Si diuida MY [z] in due parti vguali in &. Perche XY è vguale ad MZ ſarà &X vguale ad &Z, dal che XZ alla ſua metà X& [a] ſarà come MY ad Y&; e permutando, XZ ad YM [b] ſarà come X& ad &Y, ed il quadrato di XZ al quadrato di MY, [c] ſarà come il quadrato di X& al quadrato di &Y. In oltre, perche MX è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in Y, e la maggior parte è MY, aggiunta alla minor parte XY la metà della maggior parte YM, ch' è Y&, per la 3. propoſ. di queſto, il quadrato di X& ſarà il quintuplo del quadrato di &Y. E perche il quadrato di X& al quadrato di &Y è come il quadrato di XZ al quadrato di MY, eſſendo il quadrato di X& il quintuplo del quadrato di &Y, ſarà il quadrato di XZ il quintuplo del quadrato di MY, ouero di MH, che gli è vguale: ma MH è fatta vguale alla retta CB, ſarà il quadrato di ZX il quintuplo del quadrato di CB. Nel triangolo ACB, angolo retto in C, eſſendo CD perpendicolare ad AB, per il Corollario all'8. del 6, la retta CB è media proportionale frà le due AB, BD, e ſarà il quadrato di AB al quadrato di CB, [d] come la prima AB alla terza BD: ma AB, per coſtruttione, è il quintuplo di BD, ſarà il quadrato di AB il quintuplo del quadrato di CB; fù dimoſtrato il quadrato di ZX eſſere il quintuplo del quadrato di CB, ſarà il quadrato di ZX vguale al quadrato di AB, e la retta ZX vguale alla retta AB; per la qual coſa il coſtrutto Icoſaedro ſi comprende nella data sfera, cioè è iſcritto nella data sfera.

Finalmente dico, che il lato dell'Icoſaedro è quella linea irrationale, che ſi chiama Minore. S'intenda diuiſo il diametro XZ della sfera, in quante parti vguali ſi vogliono, ſarà ZX [e] quella retta, che chiamiamo Rationale, riſpetto alla quale ſi farà la comparatione del lato dell'Icoſaedro. Hor perche il quadrato di ZX è il quintuplo del quadrato di MY, ſarà il quadrato di ZX al quadrato di MY, come numero à numero, cioè come 10. à 2, ouero come 25. à 5, e perciò i quadrati di XZ, & YM, [f] ſono commenſurabili, e le rette XZ, YM, ſaranno commenſurabili almeno in potenza; ma XZ è ſuppoſta Rationale, ſarà MY, [g] che gli è commenſurabile, Rationale: fù fatta MY vguale ad MH, ſarà dunque MH Rationale, ed il ſuo doppio, cioè OH, ſarà ancora Rationale. Nel circolo EFLK, il di cui diametro OH Rationale, è iſcritto il pentagono equilatero EFGHK, per l'11. propoſ. di queſto, ciaſcuno de ſuoi lati è irrationale, ed è quella linea, che ſi chiama Minore: ma il lato del pentagono iſcritto nèl circolo EFLK è l'iſteſſo, che il lato del icoſaedro coſtrutto, ſarà il lato del coſtrutto icoſaedro linea irrationale, e ſarà quella, chè ſi chiama Minore, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

[z] 10. del 1.
[a] 15. del 5.
[b] 16. del 5.
[c] 22. del 6.
[d] Lem. 3. dopo la 18. del 6. & 20. del 6.
[e] 5. definit. del 10.
[f] 6. del 10.
[g] 6. defin. del 10.

COROLLARIO I.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che il quadra-

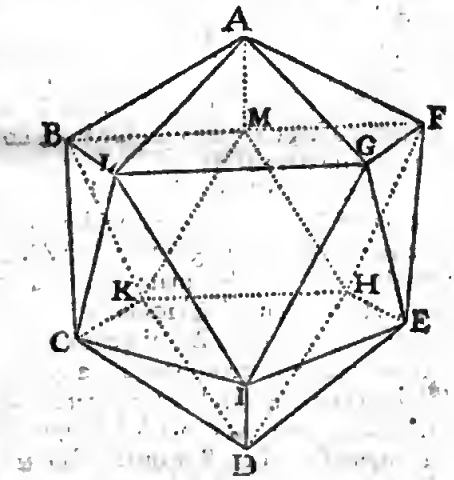
to del diametro della sfera, che comprende l'Icosaedro, è il quintuplo del quadrato del semidiametro di quel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli dell' Icosaedro, stante che si è dimostrato, che il quadrato di ZX è il quintuplo del quadrato di MH.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che il diametro della sfera, che contiene l'Icosaedro, è composto del lato dell'esagono, e del doppio lato del decagono iscritto nel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli di esso Icosaedro.

SCOLIO.

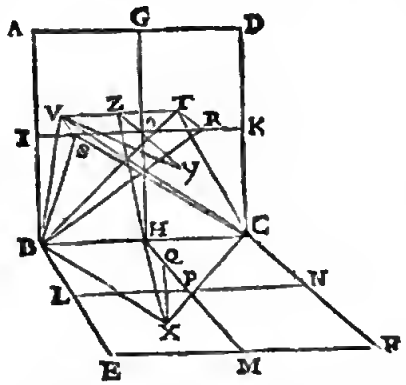
Gli angoli solidi dell'Icosaedro sono dodeci, come appare nella costruttione antecedente, e perciò dodeci piramidi, di basi pentagonali, si possono considerare nell'icosaedro, le quali hanno i vertici in essi angoli; come per esempio le piramidi collaterali sono le sei notate ABLGFM, FAGEHM, EFGIDH, DEHKCI, CDILBK, BCKMAL, i di cui vertici sono i punti A, F, E, D, C, B, e le basi sono i pentagoni BLGFM, AGEHM, FGIDH, EHKCI, DILBK, CKMAL, e dell'altre sei tre riguardano la parte, che si mostra à noi, i di cui vertici sono i punti L, I, G, e le basi sono i pentagoni BCIGA, LCDEG, ALIEF, e le altre tre, che sono dalla parte nascosta à noi, hanno i vertici ne i punti M, K, H, e le basi sono i pentagoni ABKHF, BCDHM, DEFMK. E per l'auuenire, quando si dirà il pentagono dell'icosaedro, douremo intendere uno degli antedetti pentagoni.



PROBLEMA V. PROPOSITIONE XVII.

Costruire il Dodecaedro, e comprenderlo nella sfera, che contiene l'antedette figure, e dimostrare, che il lato del Dodecaedro è linea Irrationale, che si chiama Apotome.

Sia il quadrato ABCD vna baſe del Cubo, che ſi comprende nella data sfera, e ſia perpendicolare all'vguale quadrato BEFC, in modo, che la commune ſettione de i piani BD, BF, ſia lato commune di ambidue i quadrati BD, BF; ſi diuidano tutti i lati de i quadrati BD, BF, [a] in due parti vguali ne i punti G, I, H, K, L, M, N, e frà i punti oppoſti ſi tirino le rette GH, IK, LN, HM, le quali ſi ſegaranno ne i centri, O, & P, de i quadrati BD, BF, come appare nell'8. propoſ. del 4. Si ſeghino poi le rette OI, OK, HP, [b] ſecondo l'eſtrema, e media proportione, ne i punti Q, R, S, e le parti maggiori ſiano le rette PQ, OR, OS; poi ne i punti Q, R, S, fuori del Cubo AE FD, ſi eriggano le rette RT, SV, QX, [c] perpendicolari à i piani BD, BF, in modo, che le perpendicolari RT, SV, cadano di là dal quadrato BD è la perpendicolare QX ſotto al quadrato BF, ſi facciano queſte perpendicolari vguali alle parti maggiori PQ, OR, OS, e ſi tirino le rette TV, TC, CX, XB, BV. Dico prima, che il pentagono VBXCT è vno di quei dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli del Dodecaedro da coſtruirſi. Si tirino le rette SB, SC. Eſſendo VS perpendicolare al piano BD, gli angoli VSB, VSC, [d] ſaranno retti. Perche la retta OI è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in S, e la parte maggiore è la retta OS, i quadrati delle due OI, IS, [e] ſono il triplo del quadrato di OS: ma OI è vguale ad IB, i quadrati dunque delle due BI, IS, ſono il triplo del quadrato di SO; fù fatta SV vguale ad OS, ſaranno i quadrati delle due BI, IS; il triplo del quadrato di SV. E perche nel triangolo BIS, angolo retto in I, il quadrato di BS [f] è vguale à i quadrati delle due BI, IS, in conſeguenza il quadrato di BS ſarà il triplo del quadrato di SV, ed i quadrati delle due BS, SV, giunti inſieme, ſaranno il quadruplo del quadrato di SV. Ma nel triangolo BSV, angolo retto in S, il quadrato di BV [g] è vguale à i quadrati delle due BS, SV, ſarà il quadrato di BV il quadruplo del quadrato di SV; e per lo Scolio alla 4. del 2, la retta BV è il doppio della retta SV. In oltre, perche le rette VS, TR, ſono perpendicolari al piano BD, perciò [h] ſono frà di loro parallele; ſono ancora vguali frà loro (ſtante che ſono vguali alle vguali rette SO, OR) le rette dunque SV, RT, ſono frà loro vguali, e parallele; dal che le rette VT, SR, [K] ſono frà loro vguali, e parallele: ma RS è il doppio di SO, cioè di SV, ſarà VT il doppio di SV; per la qual coſa il lato VT ſarà vguale ad VB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che gli altri lati TC, CX, XB, ſono frà loro vguali, ed ogn'vno è vguale ad VT, ouero VB, e perciò il pentagono VBXCT è equilatero.

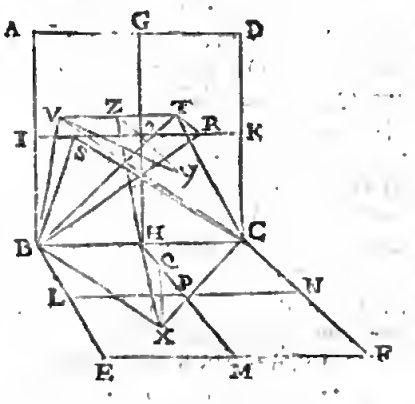


Di nuouo, perche il piano AC, per ipoteſi, è perpendicolare al pia-

[a] 10. del 1.
[b] 30. del 6.
[c] 12. del 11.
[d] 3. definit. del 11.
[e] 4. del 13.
[f] 47. del 1.
[g] 47. del 1.
[h] 6. del 11.
[K] 33. del 1.

no

l 4. definit. del 11. no BF, perciò la retta OH, ch'è perpendicolare alla retta BC, l sarà perpendicolare al piano BF: ma la retta XQ, per costruttione, è perpendicolare al medesimo piano BF, le rette dunque OH, XQ, m sono frà di loro parallele. Similmente, perche il piano BF fà angoli retti col piano BD, e la retta MH è perpendicolare alla commune settione BC, sarà la retta MH n perpendicolare al piano BD. Dal punto O si tiri la retta OZ o parallela ad SV, in modo, che cada dietro al quadrato BD, quella concorrerà con VT in qualche punto Z. Essendo la retta SV perpendicolare al piano BD, la retta ZO, p che gli è parallela, sarà ancora perpendicolare al piano BD: ma la retta HM, ouero HQ, e dimostrata perpendicolare al medesimo piano BD, perciò le due rette OZ, HQ, q sono frà di loro parallele. Si tirino le rette ZH, HX. Perche la retta HP è diuisa in Q secondo l'estrema, e media proportione, sarà HP à PQ, r come PQ à QH: ma HP è vguale ad OH, e la parte QP, per costruttione, è vguale à QX, ed è ancora vguale ad OZ; sarà OH ad OZ, come XQ à QH. Si considerino i due triangoli ZOH, HQX, che si toccano nell'angolo H, la proportione di XQ à QH è come quella di HO ad OZ, ed i lati homologhi XQ, HO, sono frà loro paralleli; come anco sono paralleli gli homologhi QH, OZ; e per la 32. del 6, gli altri due lati XH, HZ, costituiscono la sola retta linea ZHX. E perche le rette ZX, BC, si segano nel punto H, perciò sono t in vn medesimo piano, ed in conseguenza il pentagono equilatero VBXCT è in vn medesimo piano; quale dico ch'è ancora equiangolo.



r 3. definit. del 6.

t 2. del 13.

Si tirino le rette BT, BR. Perche la retta IO è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in S, la di cui maggior parte è OS. ch'è vguale ad OR, sarà IR u diuisa secondo l'estrema, e media proportione in O, e sarà IO la maggior parte, ed OR la minore; per la 4. propos. di questo, i quadrati delle due IR, RO, insieme giunti, sono il triplo del quadrato di IO, cioè il triplo del quadrato di IB: ma per costruttione RT è vguale ad RO, i quadrati dunque delle due IR, RT, sono il triplo del quadrato di IB; ed i quadrati di tutte tre le rette IR, RT, IB, saranno il quadruplo del quadrato di IB. E perche nel triangolo BIR, angolo retto in I, i quadrati delle due BI, IR, x sono vguali al quadrato di BR, i quadrati delle due BR, RT, saranno il quadruplo del quadrato di IB. Nel triangolo TRB l'angolo TRB y è retto, stante che la retta TR è perpendicolare al piano BD, e perciò il quadrato di BT, z è vguale à i quadrati delle due BR, RT: ma i quadrati delle due BR, RT, sono il quadruplo del quadrato di IB; il quadrato dunque di BT sarà il quadruplo del quadrato di IB. E perche il quadrato di AB, ouero BC, a è il quadruplo del

u 5. del 13.

x 47. del 1.

y 3. definit. del 11.

z 47. del 1.

a Scol. alla 4. del 3.

mede-

medesimo quadrato di IB, sarà il quadrato di BC vguale al quadrato di BT, e la retta BC sarà vguale alla retta BT. Nell'istesso modo, tirate le rette CS,CV, si dimostrerà, che la retta CV è vguale alla retta CB, dal che le tre rette CV, CB, BT, sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli BXC, CTV, de quali i due lati BX, XC, sono vguali à i due lati CT, TV, la base BC è dimostrata vguale alla base CV, sarà l'angolo BXC [b] vguale all'angolo CTV: e considerando i triangoli CTV TVB, nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo CTV è vguale all'angolo TVB. E perche nel pentagono equilatero VBXCT, i tre angoli BXC, CTV, TVB, sono frà loro vguali; per la 7. propos. di questo, il pentagono VBXCT sarà equiangolo. Tutto quello, che si è fatto nel lato BC, del Cubo EADF, si faccia in tutti gli altri vndici lati del medesimo Cubo, e sarà fatto vn solido, contenuto da dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli, quale douremo comprendere nella data sfera, e dimostrare, che il lato VB del Dodecaedro è linea irrationale, ed è quella, che si chiama Apotome.

[b] 8. del 1.

Si prolunghi la retta ZO verso Y. Perche la retta OY cade nel centro O perpendicolarmente al quadrato BD, ch'è base del Cubo AEFD, per il 1. Coroll. alla 15. propos. di questo, continuata concorre col diametro del Cubo nel centro del medesimo Cubo, doue tutti i diametri di esso Cubo si diuidono in due parti vguali. Si faccia OY vguale ad IO, e si tiri la retta YV. Perche OY è vguale ad OI, e fù fatta OZ vguale ad OR, sarà ZY vguale ad IR. E perche fù dimostrato, che i quadrati delle due IR, RO, sono il triplo del quadrato di IO, e la retta IR è vguale ad YZ, saranno i quadrati delle due YZ,OR, il triplo del quadrato di IO: ma OR è vguale ad OS, cioè ad VZ, i quadrati dunque delle due YZ,ZV, saranno il triplo del quadrato di OI. In oltre, essendo le rette RT, VS, vguali, e parallele, saranno le rette VT, SR, [c] frà di loro vguali, e parallele; dal che gli angoli SOZ,VZO, [d] sono vguali à due angoli retti: ma l'angolo SOZ è retto, stante che ZO è perpendicolare al piano BD, sarà l'angolo VZO ancora retto; e percio nel triangolo YZV il quadrato di VY [f] è vguale à i quadrati delle due YZ,ZV ma i quadrati delle due YZ, ZV, sono il triplo del quadrato di IO, sarà il quadrato di YV il triplo del quadrato di IO. E perche il quadrato del diametro della sfera, [g] è il triplo del quadrato dell'lato AB del Cubo iscritto nella medesima sfera, sarà il quadrato della metà del diametro della sfera il triplo del quadrato di IB, cioè del quadrato di OI: ma il quadrato di VY è ancora il triplo del qnadrato di IO, sarà VY la metà del diametro della sfera, nella quale è iscritto il Cubo AEFD, ed il punto Y il centro della medesima sfera; per la qual cosa il punto V è nella superficie della medesima sfera. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli B, X, C, T, come ancora i rimanenti angoli del costrutto Dodecaedro, sono nella medesima superficie sferica; e perche il Cubo AEFD si suppone iscritto nella sfera data, in conseguenza il Dodecaedro costrutto, sarà compreso, cioè iscritto nella medesima sfera.

[c] 33. del 1.
[d] 29. del 1.
[e] 3 definit. del 11.
[f] 47. del 1.
[g] 15. del 13.

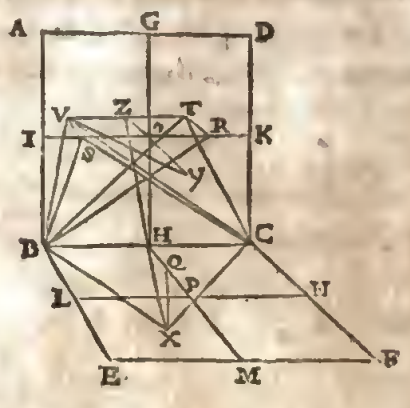
Finalmente, Dico che il lato del Dodecaedro è irrationale, ed è quella linea, che si chiama Apotome. Perche il quadrato del diametro della

sfera è triplo al quadrato del lato del Cubo iſcritto; perciò il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del Cubo iſcritto, è come numero à numero, cioè come 6. à 2; per la qual coſa il diametro della sfera h è commenſurabile in potenza al lato del Cubo. Suppoſto dunque il diametro della sfera Rationale, ſarà il lato del Cubo K ancora Rationale. Di più, perche la retta IO è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte è SO, ſarà IO ad OS come OS ad SI; e duplato il tutto, ſarà IK ad SR, come è SR alla retta compoſta delle due IS, RK. Se dunque il lato del Cubo, cioè IK, ch'è dimoſtrato Rationale, ſi diuide ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà RS, cioè VT, che gli è vguale; e per la 6. propoſ. di queſto, il lato VT del Dodecaedro è linea irrationale, che ſi chiama Apotome, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

h 6. del 10

K 6. defin. del 10.

13. defin. del 6.



COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrato, che diuiſa IK ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è la retta SR, ouero VT, e la minor parte è la compoſta delle due IS, RK, ſarà manifeſto, che diuidendoſi il lato IK del Cubo, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà il lato VT del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera.

COROLLARIO II.

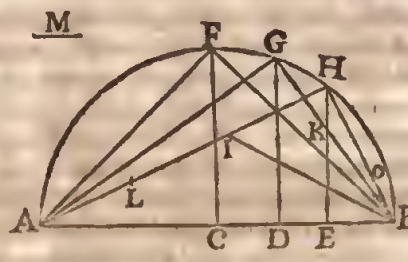
Appare ancora, che il lato del Cubo, cioè BC, ſottende l'angolo del pentagono, ch'è baſe del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera. Oltre à ciò, perche il lato del Cubo, cioè BC, che ſottende l'angolo BXC del pentagono, ſe è diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è vguale al lato del pentagono, ed aggiungendo alla retta BC la detta maggior parte, tutta la compoſta ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media propor-

tione,

tione, di cui la maggior parte sarà BC, sarà manifesto, che diuisa qualunque retta linea secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà il lato del Cubo, e la minor parte il lato del dodecaedro iscritto nella medesima sfera, dou'è iscritto il Cubo.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Ritrouare i lati de i cinque corpi regolari, e comparargli frà loro.



Sia AB il diametro della sfera diuiso in modo, che BC sia la metà di AB, la retta DB sia la terza parte di AB, e la retta EB la quinta parte della medesima AB: intorno al diametro AB sia descritto il mezzo circolo AFB, ne i punti C, D, E, [a] siano eleuate le rette CF, DG, EH, perpendicolari ad AB, e si tirino le rette AF, AG, AH, BF, BG, BH; dalla retta AH se ne tagli la parte HI [b] vguale al lato del decagono iscritto in quel circolo, del quale BH sia semidiametro, cioè sia lato dell'esagono; si diuida BG [c] secondo l'estrema, e media proportione, come nel punto K, e sia BK la parte maggiore. Dico prima, che AG è il lato della Piramide, ò Tetraedro, che AF è il lato dell'Ottaedro, la retta BG è il lato del Cubo, la retta BI è il lato dell'Icosaedro, e la retta BK è il lato del Dodecaedro.

a 11. del 1.

b 3. del 8.

c 30. del 5.

Perche DB è la terza parte di AB, di quelle parti, che il diametro AB è 3, la retta DB sarà 1, ed il rimanente AD 2; e perciò AB ad AD sarà come 3. à 2, cioè nella proportione sesquialtera. In oltre perche l'angolo AGB [d] è retto, e la retta GD è perpendicolare ad AB, per il Corollario alla 8. del 6, sarà AG media proportionale frà le due BA, AD, ed hauerà AB ad AD [e] duplicata proportione di quella, che hà AB ad AG: ma il quadrato di AB al quadrato di AG [f] hà la medesima duplicata proportione, che AB ad AG, hauerà il quadrato di AB al quadrato di AG [g] l'istessa proportione, che AB ad AD: ma AB è nella sesquialtera proportione ad AD, sarà il quadrato di AB nella sesquialtera proportione al quadrato di AG. E perche il quadrato del diametro della sfera è nella sesquialtera proportione [h] al quadrato del lato del Tetraedro iscritto nella medesima sfera, essendo AB il diametro della sfera, sarà AG il lato del Tetraedro iscritto.

d 31. del 3.

e Lem. 8. dopo la 18. del 6.

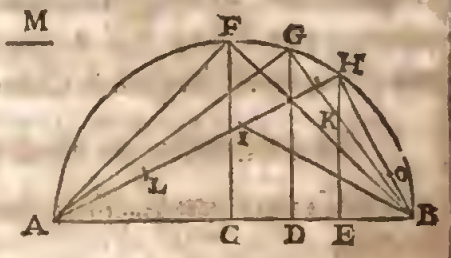
f 20. del 6.

g 11. del 5.

h 13. del 13.

Di nuouo, perche AF è media proportionale frà le due BA, AC, sarà il quadrato di AB al quadrato di AF come AB ad AC; per costruttione AB è il doppio di AC, sarà il quadrato di AB il doppio del quadrato

K 14. del 13. di AF: ma il quadrato del diametro della sfera K è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro iscritto, posta AB diametro della sfera, sarà AF il lato dell'Ottaedro iscritto nella medesima sfera.



In oltre, perche BG è media proportionale frà le due AB, BD, sarà il quadrato di AB al quadrato di BG, come AB à BD: ma AB, per costruttione, è tripla à BD, sarà il quadrato di AB triplo al quadrato di BG. E perche il quadrato della sfera I è triplo al quadrato del Cubo iscritto, se AB si prende come diametro della sfera, sarà BG il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera.

I 15. del 13.

Parimente, essendo BH media proportionale frà le due AB, BE, sarà AB à BE, come il quadrato di AB al quadrato di BH; ma AB, per costruttione, è il quintuplo di BE, sarà il quadrato di AB il quintuplo del quadrato di BH. E perche il quadrato del diametro della sfera m è quintuplo al quadrato del semidiametro di quel circolo, che circonda il pentagono, sopra il quale è descritto l'Icosaedro, sarà BH il semidiametro, ò lato dell'esagono, iscritto nel medesimo circolo: fù fatta la retta HI, per costruttione, lato del decagono iscritto in quel medesimo circolo, i quadrati delle due BH, HI, insieme giunti, saranno vguali al quadrato del lato del detto pentagono: ma il quadrato di BI è vguale à i quadrati delle due BH, HI, sarà BI il lato di quel pentagono; e perche ogni lato di quel pentagono rappresenta vn lato dell'icosaedro, sarà BI il lato dell'icosaedro.

m Coroll. 1. alla 16. del 13.

Finalmente, perche il lato BG del Cubo è diuiso secondo l'estrema, e media proportione in K, per il primo Coroll. alla 17. propos. di questo, la maggior parte BK sarà il lato del Dodecaedro, e saranno esposti i lati de i cinque corpi regolari iscritti nella medesima sfera, come fù proposto.

Per la comparatione de i lati ritrouati si offerui il seguente modo. Perche s'è dimostrato, che il quadrato del diametro della sfera è sesquialtero al quadrato del lato dell'Tetraedro, ed è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, e triplo al quadrato del lato del Cubo; di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, sarà il quadrato del lato del Tetraedro 4, quello dell'Ottaedro 3, e quello del Cubo 2. D'ond'è manifesto, che il quadrato del lato del Tetraedro è nella proportione sesquitertia al quadrato del lato dell'Ottaedro, e dupla à quello del Cubo; ed il quadrato del lato dell'Ottaedro è nella proportione sesquialtera al quadrato del lato del Cubo; e perciò il quadrato del diametro della sfera, ed i quadrati de i lati di esse figure, cioè del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, sono come numero à numero, e perciò sono frà loro a commensurabili: per la qual cosa il dia-

Quadrato del Diametro della sfera	6
Tetraedro	4
Ottaedro	3
Cubo	2

a 6. del 10.

metro

metro della sfera, ed i lati del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, sono commensurabili in potenza; si che, supposto il diametro della sfera Rationale, i lati delle dette figure, cioè Tetraedro, Ottaedro, e Gubo, sono Rationali. E perche i numeri 4, 3, 2, i quali sono nelle proportioni de i quadrati de i lati di esse figure, [b] non sono come numero quadrato à numero quadrato, perciò i lati di quelle figure [c] sono solamente commensurabili in potenza: ma furono dimostrate Rationali, perciò sono Rationali, commensurabili solamente in potenza.

[b] Scolio nel fine del 9.
[c] 9. del 10.

Del resto i lati dell'Icosaedro, e del Dodecaedro, in verun modo sono frà loro commensurabili; poiche se fossero commensurabili, essendo il lato del Dodecaedro Apotome, sarà ancora [d] il lato dell'Icosaedro Apotome; ed all'incontro essendo il lato dell'Icosaedro quella linea, che si chiama minore, sarebbe ancora [e] il lato del Dodecaedro linea minore, il che è impossibile, mentre l'Apotome, e la linea Minore sono due linee irrationali [f] totalmente diuerse.

[d] 104. del 10.
[e] 106. del 10.

Benche i lati de i primi tre corpi regolari costrutti siano Rationali, e frà loro commensurabili in potenza, e commensurabili ancora in potenza al diametro della sfera, alla quale s'intendono iscritti, ed i lati dell'altre due, cioè dell'Icosaedro, e del Dodecaedro sono linee irrationali, ed incommensurabili in lunghezza, e potenza, con tutto ciò ritengono questa disposirione; cioè il lato del Tetraedro è maggiore del lato dell'Ottaedro, il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo, il lato del Cubo è maggiore del lato dell'Icosaedro, ed il lato dell'Icosaedro è maggiore del lato del Dodecaedro, cioè si superano col medesimo ordine, col quale sono stati costrutti.

[f] 112. del 10.

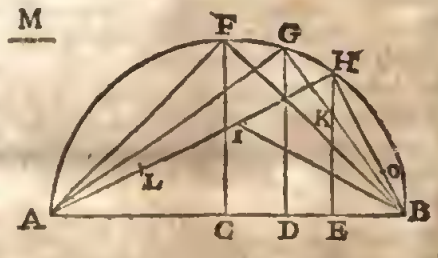
Il tutto è noto dalla costruttione de i lati, poiche il lato AG del Tetraedro sottende maggior arco di quello, che sorrende il lato AF dell'Ottaedro, e perciò AG è maggiore di AF. Di più il lato BF dell'Ottaedro sottende maggior arco di quello, che sottende BG, ch'è laro del Cubo, e perciò il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo. Che poi il lato BG del Cubo sia maggiore del lato BI del Icosaedro, si dimostra in questo modo.

Si faccia come AB à BD, così BD ad vn altra, che sia M. Perche AB è il triplo di BD, perciò BD sarà il triplo di M, e tutta AB sarà il nonuplo della retta M, ma AB ad M è come il quadrato di AB al quadrato di BD, essendo AB nonupla alla retta M, sarà il quadraro di AB nonuplo al quadrato di BD. Posto dunque il quadrato di BD come vnità, sarà il quadrato di AB 9; e perche il quadrato di AB al quadrato di BG è come AB à BD, sarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di BG. Se il quadrato di AB l'intenderemo diuiso in 9 parti vguali, sarà il quadrato di BG 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9; e perche il quadrato di GB [g] è vguale à i quadrati delle due GD, DB, i quadrati delle due GD, DB, giunti insieme, saranno 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9. Se dunque se ne leua il quadrato di BD, ch'è vna di quelle 9. parti, resta il quadrato di GD vguale à 2 di quelle 9. parti. Inoltre perche il quadrato di AB al quadrato di BH è come AB à BE, essendo, per costruttione, AB il quintuplo di BE, sarà il quadrato di AB

[g] 47. del 1.

il

il quintuplo del quadrato di BH, cioè sarà come 10. à 2, è perciò di quelle parti, che il quadrato di AB è 10, il quadrato di HB sarà 2: ma di quelle parti, che il medesimo quadrato di AB è 9 il quadrato di GD è 2, essendo ciascuna delle 10. parti del quadrato di AB minori di ciascuna delle 9 parti del medesimo quadrato di AB, sarà il quadrato di BH, ch'è 2, di quelle dieci parti, minore del quadraro di GD, ch'è 2 di quelle 9 parti, e perciò la retta GD è maggiore di BH. Di nuouo si faccia IL vguale ad IH. Perche HB è lato dell'esagono iscritto nel circolo, che circonda quel pentagono, sopra il quale è costrutto l'Icosaedro, ed IH è lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, sarà BH maggiore di HI; si tagli HO vguale ad HI, sarà HI la terza parte della retta composta delle due LH, HO, e perciò IH sarà minore della terza parte della retta composta delle due LH, HB: ma la retta composta delle due LH, HB, è composta del lato HB dell'antedetto esagono, e di LH, ch'è il doppio del lato del decagono, sarà IH minore della terza parte della retta composta del lato di quell'esagono, e del doppio del lato del decagono: ma per il Corollario secondo alla 16. propos. di questo, il diametro AB è composto del lato BH del detto esagono, e del doppio di HI, sarà HI minore della terza parte di AB; fù fatta per costruttione, DB la terza parte di AB, sarà IH minore di BD. E perche HB fù dimostrata minore di GD, le due BH, HI, saranno minori delle due GD, DB, ed i quadrati delle due BH, HI, sono minori, de i quadrati delle due GD, DB: ma il quadrato di IB h è vguale à i quadrati delle due BH, HI, ed il quadrato di BG è vguale à i quadrati delle due GD, DB; il quadrato dunque di IB sarà minore del quadrato di GB, e la retta GB, ch'è lato del Cubo, è maggiore di IB, ch'è lato dell'icosaedro, come fù proposto dimostrare.



h 47. del 1.

Finalmente dico che il lato IB dell'Icosaedro è maggiore del lato BK del Dodecaedro. Perche GB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in K, e la maggior parte è BK, sarà il rettangolo contenuto dalle due BG, GK, K vguale al quadrato di BK, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK, sarà vguale al doppio quadrato di BK. Inoltre, perche BK è maggiore di KG, il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, sarà maggiore del rettangolo contenuto dalle due BG, GK; e perciò il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, col rettangolo delle due BG, GK, sarà maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK: ma i due rettangoli contenuti da GB, BK, e da BG, GK l, sono vguali al quadrato di BG, sarà il quadrato di BG maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK; fù dimostrato il doppio rettangolo delle due BG, GK, vguale al doppio quadraro di BK, in conseguenza il quadrato di BG sarà maggiore del doppio quadrato di BK, e tripla-

K 17. del 6.

l 2. del 2.

ta l'vna, e l'altra parte, il triplo quadrato di BG, sarà maggiore del sestuplo quadrato di BK. Di nuouo, per quel che si è dimostrato, il quadrato di AB è il triplo del quadrato di BG, ed è il quintuplo del quadrato di BH, e perciò il triplo quadrato di BG sarà vguale al quintuplo quadrato di BH: ma il triplo quadrato di BG è dimostrato maggiore delli sei quadrati di BK; sarà il quintuplo quadrato di BH maggiore delli sei quadrati di BK; dal che vn solo quadrato di BH sarà maggiore d' vn solo quadrato di BK, ed il lato BH sarà maggiore di BK. Nel triangolo BHI, angolo retto in H, sarà l'angolo BIH [m] minore dell'angolo BHI, e perciò il lato BI [n] sarà maggiore di BH: ma BH è dimostrata maggiore della retta BK; sarà dunque BI, ch'è lato dell'Icosaedro, molto maggiore di BK, ch'è il lato del Dodecaedro. Habbiamo dunque esposti, e comparati i lati de i cinque corpi regolari, il che era da farsi, e dimostrarsi.

m 17. del 1.
n 19. del 1.

SCOLIO.

Spiegata la costruttione de' cinque corpi regolari, e fatta la comparatione de' loro lati, resta che dimostriamo come i corpi regolari non possono essere più di cinque. E nota, che per corpo regolare s'intende quella figura solida contenuta da piani equilateri, equiangoli, ed vguali frà loro. E nota ancora, che per la costitutione dell'angolo solido si ricercano due conditioni, la prima è, che gli angoli piani, i quali contengono l'angolo solido, [a] non siano meno di tre, e la seconda che tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo solido, giunti insieme, [b] non siano minori di quattro angoli retti. Supposto questo.

a 11. defin. del 11.
b 21. del 11.

Perche l'angolo del triangolo equilatero [c] è la terza parte di due angoli retti, cioè la sesta parte di quattro angoli retti, saranno sei angoli del triangolo equilatero sei seste parti di quattro angoli retti, e perciò sei angoli del triangolo equilatero, giunti insieme, sono vguali à quattro angoli retti; dal che con sei angoli del triangolo equilatero non si può costituire angolo solido: donde è manifesto, che non più di cinque triangoli equilateri, che concorrono secondo vn' angolo, possono costituire angolo solido, e perche con tre triangoli equilateri, che concorrono secondo vn angolo, si costituisce l'angolo solido del Tetraedro, con quattro si costituisce l'angolo solido dell'Ottaedro, e con cinque si costituisce quello dell'Icosaedro, perciò co'i triangoli equilateri non si possono costruire altri corpi regolari, che i tre nominati corpi, cioè il Tetraedro, l'Ottaedro, e l'Icosaedro.

c 32. del 1.

Di nuouo perche l'angolo del quadrato [d] è la quarta parte di quattro angoli retti, i quattro angoli del quadrato saranno vguali à quattro angoli retti, e perciò non più di tre quadrati, che concorrono secondo vn angolo, possono costituire angolo solido, per la qual cosa colle figure quadrate non si possono costruire altri corpi regolari, fuor che il Cubo.

d Scol. alla 32. del 1.

In oltre perche l'angolo del pentagono [e] è la quinta parte di sei angoli retti, cioè tre decime parti di quattro angoli retti, saranno quattro angoli del pentagono, giunti insieme, vguali à dodici decime parti di quattro angoli retti; ma i quattro angoli retti sono vguali à dieci decime parti de i medesimi, le dodici decime parti di quattro angoli retti, cioè i quattro angoli del pentagono so-

e Scol. alla 32. del 1.

nò maggiori di quattro angoli retti, e perciò con quattro pentagoni, che concorrono secondo un'angolo, non si può costituire angolo solido. Donde appare, che colle figure pentagonali non si può costruire altro corpo regolare, fuorche il Dodecaedro.

f Scol. alla 32. del 1.

Finalmente perche l'angolo dell'esagono f è la terza parte di quattro angoli retti; saranno tre angoli dell'esagono vguali à quattro angoli retti, e perciò con tre figure esagonali, che concorrono secondo vn angolo, non si può costituire angolo solido, ne meno si può costituire angolo solido con due soli esagoni, stante che per costituire l'angolo solido non deuono esser meno di tre angoli piani; per la qual cosa con le figure esagonali non si può costruire corpo alcuno regolare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che con nessun'altro poligono regolare si può costruire nessun corpo regolare; e perciò i corpi regolari sono solamente cinque, cioè Tetraedro, Ottaedro, Cubo, Icosaedro, e Dodecaedro, come fù proposto dimostrare.

Fine del Decimoterzo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOQVARTO.

Concordano tutti gl' Interpreti, che gli antecedenti tredici Elementi ſono aſſolutamente d'Euclide; ma che i due ſeguenti, cioè decimoquarto, e decimoquinto, ſiano d'Hypſicle Aleſſandrino; e perche il tutto è manifeſto nella ſeguente Epiſtola proemiale preſa dal Commandino, ſtimo ſuperfluo il farci ſopra altro diſcorſo.

PROEMIO D'HYPSICLE ALESANDRINO A PROTARCHO.

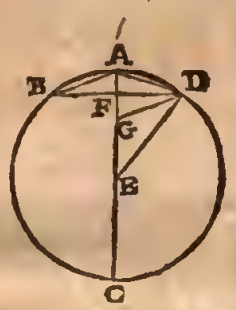
BASILIDE Tyrio, ò Protarco, venendo in Aleſſandria, ed eſſendo molto caro à noſtro padre, per la commune cognitione delle ſcienze Matematiche, nel tempo del peregrinaggio, pratticò lungamente con eſſo lui, e tal volta eſaminando quello, che è ſtato ſcritto da Apollonio della comparatione del Dodecaedro, ed Icoſaedro, che ſi deſcriuono nella medeſima sfera, qual proportione habbiano frà loro, giudicarono ciò non eſſere ſtato ben trattato da Apollonio, e però hauendolo prima emendato, come mio padre diceua, ne fecero memoria. Ma io poi mi ſono abbattuto in vn altro libro, mandato in luce da Apollonio, il quale dirittamente comprendeua la dimoſtratione della coſa propoſta; e per la inueſtigatione del detto problema, ne preſi grandiſſimo piacere. Quello che hà ſcritto Apollonio, ogn' vno facilmente lo può vedere, eſſendo nelle mani di tutti. Ma quello che noi habbiamo con gran ſtudio, per quanto ſi può penſare, compoſto, ed accomodato, mettendolo in ſcritto, ci è piaciuto dedicarlo à te, come à quello, che per l'eccellente cognitione di tutte le ſcienze Matematiche, maſſimamente della Geometria,

ſei per eſaminare prudentemente le coſe, che noi diremo, e per l'amicitia grande, che hai hauuto con mio padre, e per l'amor, che mi porti, ſei per aſcoltare volentieri queſto mio libro. Ma è già tempo, che ponendo fine al proemio veniamo alla coſa propoſta.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

La linea retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare allato del pentagono iſcritto nell'iſteſſo circolo, è la metà della retta compoſta del lato dell'eſagono, e del lato del decagono, che ſi iſcriuono nel medeſimo circolo.

Nel circolo ABCD, il di cui centro E, ſia BD il lato del pentagono iſcritto, e dal centro E cada la retta EF perpendicolare à BD. Dico che la retta EF è la metà della retta compoſta del lato dell'eſagono, e del lato del decagono, iſcritti nel medeſimo circolo ABCD. Si prolunghi la retta EF ſin che concorra con la circonferenza del circolo da ambidue le parti, come in A, & C; ſi faccia FG vguale ad FA, e ſi tirino le rette, DE, DG, DA, AB. Perche la retta EA paſſa per il centro E, e ſega la retta BD ad angoli retti in F, ſarà BF, vguale alla retta FD. Si conſiderino i triangoli DFA, AFB. Perche i due lati AF, FD ſono vguali à i due lati AF, FB, e gli angoli in F ſono retti, ſarà la baſe AD [b] vguale alla baſe AB, dal che l'arco AD [c] è vguale all'arco AB. E perche la retta BD è lato del pentagono iſcritto, ſarà l'arco BAD la quinta parte di tutta la circõferenza ABCD, e l'arco AD la decima parte; per la qual coſa la retta AD ſarà il lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo ABCD. Ne i triangoli DFA, DFG, i due lati DF, FG, ſono vguali à i due lati DF, FA, gli angoli in F ſono retti, e perciò la baſe AD [d] ſarà vguale alla baſe DG, e gli angoli DGA, DAG, ſaranno frà di loro vguali. In oltre, perche tutta la circonferenza ABCD è quintupla all'arco BAD, la metà della circonferenza ABCD ſarà quintupla alla metà dell'arco BAD; cioè l'arco CDA è quintuplo all'arco DA; per la qual coſa l'arco CD ſarà quadruplo all'arco DA; ma l'arco CD all'arco DA è come l'angolo CED all'angolo DEA, eſſendo l'arco CD il quadruplo dell'arco DA, ſarà l'angolo CED il quadruplo dell'angolo DEA. E perche l'angolo CED al centro [f] è il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, l'angolo dunque DAE ſarà il doppio dell'angolo DEA; ſù moſtrato l'angolo DGA vguale all'angolo DAE, ſarà l'angolo DGA il doppio dell'angolo DEA. Nel triangolo DGE è continuato il lato EG verſo A, ſarà l'angolo DEA eſterno [g] vguale à i due angoli GED, GDE interni, ed oppoſti; ſù dimoſtrato l'angolo DGA, eſſere il doppio dell'angolo GED, l'angolo dunque GED



a 3. del 3.
b 4. del 1.
c 28. del 3.
d 4. del 1.
e 33. del 6.
f 20 del 3.
g 32. del 1.

ſarà vguale all'angolo GDE, ed il lato GD [h] ſarà vguale al lato GE; ma il lato GD fù dimoſtrato vguale al lato AD, ſarà il lato AD vguale al lato GE; al lato AD s'aggiunga AF, ed al lato GE s'aggiunga GF, ne viene EF vguale alle due DA, AF, giunte inſieme; vgualmente s'aggiunga la retta EF, ſaranno le due EA, AD, giunte inſieme, vguali al doppio di EF; per la qual coſa la retta EF è la metà delle due EA, AD giunte inſieme; e perche il ſemidiametro EA è vguale al lato dell'eſagono, ed il lato DA è lato del decagono, ambidue iſcritti nel circolo ABCD, in conſeguenza la retta EF ſarà la metà della retta compoſta del lato dell'eſagono, e del lato del decagono iſcritti nel medeſimo circolo, ch'era da dimoſtrarſi.

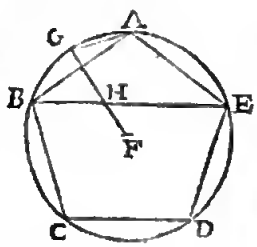
h 6. del 1.

SCOLIO.

Quì facilmente poſſiamo dimoſtrare col P. Clauio i due ſeguenti theoremi.

Il lato dell'eſagono al lato del decagono, iſcritti nel medeſimo circolo, è come la retta, che ſottende l'angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, al lato del medeſimo pentagono.

Nel circolo ABCDE, il di cui centro F, ſia iſcritto il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, e ſia AG il lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo; ſi tiri il ſemidiametro FG, ſarà FG, [a] lato dell'eſagono. Si tiri la retta BE, che ſottenda l'angolo BAE del pentagono. Dico che la retta FG alla retta GA, è come la retta EB al lato BA. Perche la retta FG, lato dell'eſagono, col lato del decagono GA, [b] compongono vna retta diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte è il lato FG dell'eſagono, e la minor parte è il lato GA del decagono, e della retta EB, diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, in qualche punto H, la maggior parte EH [c] è vguale al lato EA del pentagono, ſarà la maggior parte EH alla minor parte HB, [d] come FG à GA; ma EH ad HB è come EB ad EH, ſarà EB ad EH [e] come FG à GA. E perche EH è vguale ad EA, ouero AB, ſarà EB à BA, come FG à GA, ch'era da dimoſtrarſi.



a Corol. alla 15. del 4.

b 9. del 13.

c 8. del 9.

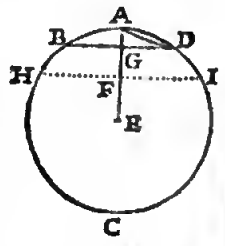
d Scol. alla 5 del 13.

e 11. del 5.

Se la retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare al lato del pentagono iſcritto nel medeſimo circolo, è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione; la maggior parte è vguale alla retta, che dal medeſimo centro cade

perpendicolare al lato del triangolo equilatero, e la minor parte è vguale alla metà del lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo.

Nel circolo ABCD ſia la retta BD lato del pentagono iſcritto, e diuiſo l'arco BAD in due parti vguali in A, tirata la retta AD, ſarà AD lato del decagono; dal centro E ſi tiri la retta EA, la quale ſegarà BD [f] *ad angoli retti in qualche punto G, e ſarà EG, per la 1. prop. del 14, la metà della retta compoſta delle due EA, AD, e diuiſa poi la retta EG* [g] *ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, in modo, che EF ſia la maggior parte. Dico che la maggior parte EF è vguale alla retta, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo; e che la minor parte FG è la metà della retta AD, ch'è lato del decagono. Perche al lato dell'eſagono EA, aggiunto il lato AD del decagono,* [h] *ſe ne compone vna retta diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, di cui la maggior parte è AE, e la minor parte AD, e la retta EG è diuiſa ancora ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, la di cui maggior parte è EF, e la minore FG, per lo Scol. 2. alla prop. 5. del 13, ſarà la compoſta delle due EA, AD, ad AE, come è GE ad EF; e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG,* [k] *ſarà come AE ad EF; ma la compoſta delle due EA, AD,* [l] *è il doppio di EG, ſarà la retta AE il doppio di EF. Se dunque per il punto F paſſa la retta HI ad angoli retti con AE, ſarà HI* [m] *lato del triangolo equilatero iſcritto nel circolo ABCD, e perciò la retta EF è quella, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.*



Dico di nuouo che FG è la metà di AD. Perche la compoſta delle due EA, AD ad EA è come GE ad EF, per la conuerſione della proportione, la compoſta delle due EA, AD ad AD, [n] *ſarà come EG à GF, e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG ſarà come AD,* [o] *ad FG: ma la compoſta delle due EA, AD, è il doppio di EG, ſarà ancora AD il doppio di FG; e perciò FG è la metà di AD lato del decagono, ch'era da dimoſtrarſi.*

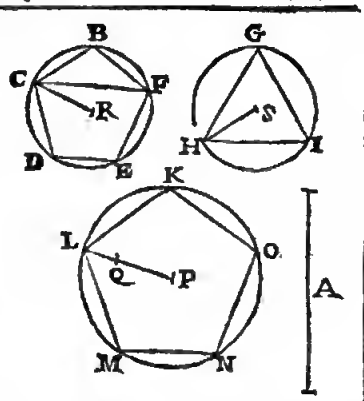
f 1. Corol. alla 10. del 13.
g. 30 del 6.
h 9. del 13.
K 16. del 5.
l 1. del 14.
m Corol. 2. all. 12. del 13.
n Corol. alla 19. del 5.
o 16. del 5.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Il medeſimo circolo comprende il pentagono del Dodecaedro, e il triangolo dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima ſfera.

Sia A il diametro della ſfera, nella quale s'intenda iſcritto il Dodecaedro, la di cui baſe ſia il pentagono BCDEF, e l'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHI. Dico che il circolo circoſcritto intorno al pentagono BCDEF è vguale al circolo circoſcritto intorno al triangolo GHI. Sia eſpoſto il pentagono KLMNO di quell'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHC, ſarà ciaſcun lato LK, KO,

ON,



ON, NM, ML, vguale al lato GH, del triangolo equilatero GHI. Intorno al pentagono KLMNO [a] ſia circoſcritto il circolo KMN, il di cui centro ſia P, ſi tiri la retta PL, e da i centri R, ed S, ſi tirino le rette RC, SH, e ſi ſeghi la retta PL [b] ſecondo l'eſtrema, e media proportione in Q, e per il 2. Coroll. alla 9. propoſ. del 13, la maggior parte QP ſarà il lato del decagono iſcritto nel circolo KLMNO, nel quale il lato dell' eſagono è vguale ad LP; ſi tiri la retta CF. Perche la retta CF ſottende l'angolo CBF del pentagono, per il Corol 2. alla 17. propoſ. del 13, ſarà CF il lato del cubo iſcritto nella medeſima ſfera, dou'è iſcritto il Dodecaedro: e perche il quadrato della retta A, ch'è diametro della ſfera, per la 15. prop. del 13, è triplo al quadrato di CF, lato del Cubo, ed il medeſimo quadrato della retta A, per il 1 Corol. alla 16 prop. del 13, è quintuplo al quadrato di LP, perciò il triplo quadrato di CF ſarà vguale al quintuplo quadrato di LP. In oltre ſe concepiremo CF, ch'è il lato del detto cubo, diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, per il Coroll. 1. alla citata 17. propoſ. del 13, la maggior parte ſarà vguale al lato FB del pentagono BCDEF, e per lo Scolio 2. alla 5. propoſ. del 13, ſarà CF alla maggior parte FB., come LP à PQ: e permutando, CF ad LP [c] ſarà come FB à PQ, ed il quadrato di CF al quadrato di LP [d] ſarà come il quadrato di FB al quadrato di PQ; e triplati gli antecedenti, ſarà il triplo quadrato di CF al quadrato di LP, come il triplo quadrato di BF al quadrato di PQ; e quintuplati i conſeguenti, ſarà il triplo quadrato di CF al quintuplo quadrato di PL, come il triplo quadrato di BF al quintuplo quadrato di PQ: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, il triplo quadrato di CF è vguale al quintuplo quadrato di PL, perciò il triplo quadrato di FB [e] ſarà vguale al quintuplo quadrato di PQ: e perche il quadrato di ML, lato del pentagono, per la 10. del 13, è vguale al quadrato di PL, lato dell'eſagono, col quadrato di PQ, lato del decagono; ſarà il quintuplo quadrato di ML vguale al quintuplo quadrato di PL, col quintuplo quadrato di PQ: fù dimoſtrato il triplo quadrato di CF, vguale al quintuplo quadrato di PL, ed il triplo quadrato di FB vguale al quintuplo quadrato di PQ, ſarà il quintuplo quadrato di LM vguale al triplo quadrato di CF, più il triplo quadrato di FB. Di nuouo, perche i quadrati delle due CF, FB, per il 1. Scol. alla 10. propoſ. del 13, ſono il quintuplo del quadrato di CR, il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB, ſarà vguale à quindici quadrati di CR: ma il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB fù dimoſtrato vguale al quintuplo quadrato di LM, ſarà il quintuplo quadrato di LM vguale à quindici quadrati di CR. E perche il lato LM per quel che ſi è detto, è vguale al lato HI, ſarà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di CR. Finalmente perche, per la 12. prop. del

a 14. del 4.
b 30. del 6.
c 16. del 5.
d 22. del 6.
e 14 del 5.

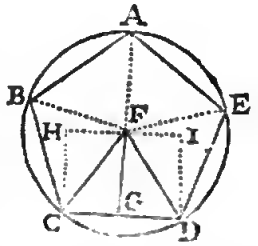
13, il

13, il quadrato di HI è vguale al triplo quadrato di HS, sarà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di HS: ma il quintuplo quadrato di HI fù dimostrato vguale à quindici quadrati di CR; i quindici quadrati dūque di CR sono vguali à i quindeci quadrati di HS, D'onde il quadrato di CR sarà vguale al quadrato di HS, ed il semidiametro CR vguale al semidiametro HS. Per la qual cosa il circolo BCDEF sarà vguale al circolo GHI, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se dal centro del circolo circoscritto al pentagono del Dodecaedro, cade vna retta perpendicolare al lato di esso pentagono, il trentuplicato rettangolo contenuto da quella perpendicolare, e dal lato del detto pentagono, è vguale alla superficie del Dodecaedro.

Sia ABCDE vno de pentagoni del Dodecaedro iscritto nel circolo ACD, il di cui centro F, dal quale cada la retta FG perpendicolare al lato CD. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalla retta FG, e dal lato CD, è vguale alla superficie del Dodecaedro. Si tirino le rette FD, FC, e sopra il lato CD, all'altezza FG, si faccia il rettangolo HCDI, il quale [a] sarà il doppio del triangolo FCD; e perche il rettangolo HCDI è contenuto dalle rette HC, CD, e la retta HC è vguale ad FG, sarà il rettangolo contenuto dalle due FG, CD, vguale al doppio triangolo FCD, ed il quintuplo rettangolo contenuto dalle due FG, CD, sarà decuplo al triangolo FCD, cioè il quintuplo rettangolo contenuto dalle due FG, CD, è vguale à dieci triangoli FCD; cioè vguale à due volte i cinque ttiāgoli FCD, FDE, FEA, FAB, FBC; e perciò il quintuplo rettāgolo contenuto dalle rette FG, CD, è vguale al doppio pentagono ABCDE; e dodecuplicata l'vna, e l'altra parte di questa vgualità, ne vengono sessanta rettangoli, contenuti dalle rette FG, CD, vguali à 24. pentagoni ABCDE; e presone la metà, ne vengono trenta rettangoli contenuti dalle rette FG, CD, vguali à dodici pentagoni ABCDE; ma i 12. pentagoni ABCDE, sono vguali alla superficie del Dodecaedro, i trenta rettangoli dunque contenuti dalle rette FG, CD, sono vguali alla superficie del Dodecaedro, ch'era da dimostrarsi.



[a] 41. del 1.

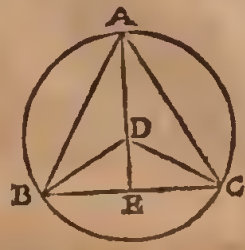
SCOLIO I.

Nell'istesso modo si dimostrerà il seguente Theorema.

Se dal centro del circolo circoscritto intorno ad vno

de i triangoli, ch'è base dell'Icosaedro, cade vna retta perpendicolare ad vn lato; il trentuplo rettangolo contenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triangolo, è vguale alla superficie dell'Icosaedro.

Sia il triangolo equilatero ABC vno di quelli, che contengono l'Icosaedro, intorno al quale sia circoscritto il circolo ABC, il di cui centro D, dal quale cada la retta DE perpendicolare al lato BC. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale alla superficie dell'Icosaedro. Si tiri la retta DA, sarà diuiso il triangolo ABC ne i tre vguali triangoli DBC, DAC, DAB; e perche come si disse nella dimostratione antecedente, il rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è il doppio del triangolo DBC, sarà il triplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, il doppio de i tre triangoli DBC, DCA, DAB; cioè il triplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale al doppio triangolo ABC; e ventuplicata l'vna, e l'altra parte dell'vgualità, ne viene il sessantuplo rettangolo, contenuto dalle rette DE, BC, vguale al quarantuplo triangolo ABC; e prese le loro metà, sarà il trentuplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, vguale à venti triangoli ABC; ma venti triangoli ABC sono vguali alla superficie dell'Icosaedro, in conseguenza il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, sarà vguale alla superficie dell'Icosaedro, ch'era da dimostrarsi.



3 41. del 1.

COROLLARIO

Quindi è manifesto, che il rettangolo contenuto da vn lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, e dalla retta, che dal centro di esso pentagono cade perpendicolare ad vno de i suoi lati, al rettangolo contenuto da vn lato del triangolo equilatero, e dalla retta, che dal centro di esso triangolo cade perpendicolare ad vno de i suoi lati, è come la superficie del Dodecaedro (di cui ciascuna base è vguale à quel pentagono) alla superficie dell'Icosaedro, del quale ciascuna base è vguale al detto triangolo.

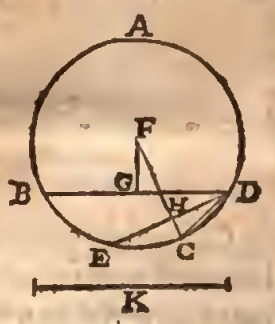
Perche, nel detto pentagono, essendo il trentuplo rettangolo, contenuto dalla perpendicolare, e dal lato di esso pentagono, vguale alla superficie del Dodecaedro; e similmente nel detto triãgolo il trentuplo rettãgolo cõtenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triãgolo, è vguale alla superficie dell'Icosaedro; sarà nel pentagono, il trentuplo rettãgolo, cõtenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, alla superficie del Dodecaedro, come nel triangolo il trentuplo

rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del triangolo, alla superficie dell'Icosaedro; e presa la trentesima parte degli antecedenti, sarà il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del pentagono, e dal lato di esso pentagono, alla superficie del Dodecaedro, come il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato del medesimo triangolo, alla superficie dell'Icosaedro: e permutando, il rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, al rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato di esso triangolo, come la superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

La superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, e come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro.

Nel circolo ABCD, che si circoscriue intorno al pentagono del Dodecaedro, ed al triangolo dell'Icosaedro, siano addattate le rette cioè BD lato del triangolo del Icosaedro, e la retta DE lato del pentagono del Dodecaedro; e dal centro F cadano le rette FG perpendicolare al lato BD, ed FH perpendicolare ad ED, e sia K il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera, coll'Icosaedro, e Dodecaedro. Dico, che la superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro è come la retta K, ch'è lato del Cubo, al lato BD del triangolo equilatero. Perche ED è lato del Dodecaedro, cioè è lato del pentagono del Dodecaedro, e la retta FH è perpendicolare ad ED, se la retta FH sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte [a] sarà vguale ad FG, ch'è la retta, che cade perpendicolare al lato BD del triangolo. Similmente se concepiremo diuiso il lato K del Cubo secondo l'estrema, e media proportione, per il 2. Coroll. alla 17. propos. del 13, la maggior parte sarà il lato ED del pentagono; e per lo Scolio 2. alla 5. propositione del 13, la retta K, ch'è lato del Cubo, alla sua maggior parte ED sarà come FH alla sua maggior parte FG, ed il rettangolo contenuto dall'estreme, cioè dalla retta K, e da FG, sarà vguale [b] al rettangolo contenuto dalle medie ED, FH. Prese le due K, & BD, come basi di due rettangoli, e sia FG altezza commune, sarà il rettangolo contenuto dalle due K, & FG, al rettangolo contenuto dalle due BD, & FG [c] come la base K alla base BD; ma il rettangolo contenuto dalle due K, & GF, è dimostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due ED, FH; sarà il rettangolo contenuto dalle due ED, EH, al rettangolo contenuto dalle due



[a] Scol. alla 1. del 14.

[b] 19. del 6.

[c] 1. del 6.

BD, FG,

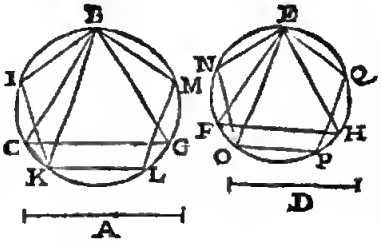
BD, FG, come la retta K al lato BD: ma per l'antecedente Corollario il rettangolo contenuto dalle due ED, FH, al rettangolo contenuto dalle due BD, FG, è come la ſuperficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla ſuperficie dell'Icoſaedro, il di cui lato è BD, ſarà la retta K, ch'è lato del Cubo, alla retta BD, ch'è lato del triangolo dell'Icoſaedro, come la ſuperficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla ſuperficie dell'Icoſaedro, il di cui lato EBD, come fù propoſto dimoſtrare.

SCOLIO.

In aiuto della propoſ. ſeguente dimoſtraremo col P. Clauio il ſeguente Theorema.

I lati del Cubo à i lati dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima sfera, ſono come i lati del Cubo à i lati dell'Icoſaedro, iſcritti in qualunque altra sfera.

Sia A il lato del Cubo, e la retta BC il lato dell'Icoſaedro iſcritti nella medeſima sfera; e di nuouo ſia D il lato del Cubo, e la retta EF il lato dell'Icoſaedro deſcritti in qualche altra sfera. Dico che il lato A del Cubo al lato BC dell'Icoſaedro è come il lato D del Cubo al lato EF dell'Icoſaedro. Si compiſcano i triangoli degl'Icoſaedri BCG, EFH, intorno à i quali [a] ſi circoſcriuano i circoli BCG, EFH, ed in eſſi [b] ſi iſcriuano i pentagoni equilateri, ed equiangoli BIKLM, ENOPQ; ſi tirino le rette BK, CK, EO, FO. Perche il medeſimo circolo [c] comprende il pentagono dol Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icoſaedro della medeſima sfera, eſſendo BCG, per ipoteſi, il triangolo dell'Icoſaedro, ſarà BIKLM il pentagono del Dodecaedro: ma per il 2. Coroll. àlla 17. prop. del 13, la retta BK è il lato del Cubo iſcritto nella medeſima sfera col Dodecaedro, ſarà BK il lato del Cubo iſcritto nella medeſima sfera coll'Icoſaedro; per ipoteſi la retta A è il lato del Cubo iſcritto nella medeſima sfera col propoſto Icoſaedro, perciò il lato BK del Cubo ſarà vguale al lato A del Cubo propoſto. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il lato EO del Cubo è vguale al lato D del Cubo propoſto. In oltre perche i pentagoni BIKLM, ENOPQ ſono equilateri, ed equiangoli, perciò ſono frà loro ſimili, e ſarà l'angolo BIK vguale all'angolo ENO: ma gli angoli BIK, BCK, [d] nella medeſima portione ſono frà loro vguali. E gli angoli ENO, EFO nella medeſima portione ſono frà loro vguali, in conſeguenza l'angolo BCK ſarà vguale all'angolo EFO. Similmente perche i triangoli BCG, EFH ſono equilateri, ed in conſeguenza equiangoli, ſarà l'angolo BGC vguale all'angolo EHF; ma gli angoli BGC, BKC [e] nella medeſima portione ſono frà di loro vguali, e gli angoli EHF, EOF, nella me-



[a] 5. del 4.
[b] 11. del 4.
[c] 2. del 14.
[d] 21. del 3.
[e] 21. del 3.

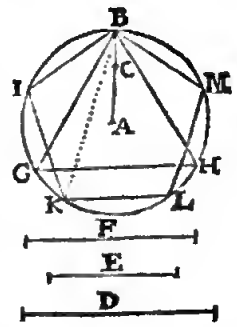
 deſima

desima portione, sono frà di loro vguali; saranno gli angoli BKC, EOF frà di loro vguali. Ne i triangoli BKC, EOF, i due angoli, BCK, BKC sono
f 32.del 1. *vguali à i due angoli EOF, EFO, e perciò il rimanente angolo KBC sarà vguale al restante angolo OEF; dal che i triangoli BKC, EOF sono equiangoli, e*
g 4.del 6. *sarà BK à BC g come è EO ad EF; ma BK fù mostrata vguale alla retta A, e la retta EO vguale à D, perciò A lato del Cubo à BC lato dell'Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come D lato del Cubo ad EF lato dell'Icosaedro iscritti in vn' altra sfera, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della maggior parte, alla retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della minor parte, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera,

Sia esposta qualunque retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia AC la maggior parte; sia poi D il lato del Cubo, e la retta F il lato dell'Icosaedro iscritto nella medesima sfera col Cubo: fatto centro in A, coll'interuallo AB si descriua il circolo BGH,
a 11.del 4. a nel quale si iscriua il pentagono equilatero, ed equiangolo BIKLM,
b 2. del 4. c d il triangolo b equilatero BGH; si tiri la retta BK. Se la retta BI si suppone lato del Dodecaedro iscritto in qualche sfera, la retta BK, per il 2. Coroll' alla 17, propos. del 13, sarà il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera. In oltre la retta AB, come semidiametro del circolo



c Corol. al-
la 15.del 4. BGH c è vguale al lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo BGH; se dunque AB è lato dell'esagono, diuiso in C secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte AC
d Corol. 2. alla 9.del 13 d sarà lato del decagono iscritto nell'istesso circolo BGH, e per la 10 propos. del 13, il quadrato di IB, ch'è lato del pentagono, sarà vguale à i quadrati delle due BA, AC. Si esponghi poi la retta E, e il
e 47.del 1. di cui quadrato sia vguale à i quadrati delle due AB, BC. Dico che la retta D, ch'è lato del Cubo, alla retta F, ch'è lato dell'Icosaedro, è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB,
f 12. del 13. BC. Perche il quadrato di BG, lato del triangolo BGH, f è triplo al quadrato del semidiametro AB, ed i quadrati delle due AB, BC, sono il
g 15. del 5. triplo del quadrato di AC, sarà il quadrato di BG al quadrato di AB g come è l'aggregato de' quadrati di AB, BC, cioè il quadrato di E al qua-

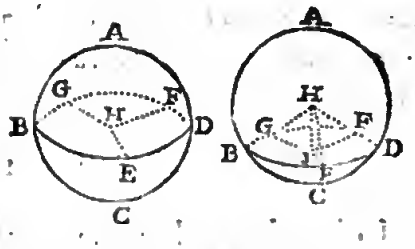
drato

drato di AC, e permutando, il quadrato di BG al quadrato della retta E [h] sarà come il quadrato di BA al quadrato di AC. Di nuono perche la retta BK sottende l'angolo BIK del pentagono, se concepiremo BK diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte [K] sarà vguale al lato IB del penragono, e perciò sarà BK à BI come è BA ad AC, ed il quadrato di BK al quadrato di BI [l] sarà come il quadrato di BA al quadrato di AC; ma il quadrato di BA al quadrato di AC, per quel che si è dimostrato, è come il quadrato di BG al quadrato della retta E, sarà il quadrato di BK al quadrato di BI [m] come è il quadrato di BG al quadraro della retta E; e permutando, il quadrato di BK al quadrato di BG [n] sarà come il quadrato di BI al quadrato della retta E; per la qual cosa la retta BK alla retta BG [o] sarà come BI alla retta E; cioè il lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC: ma per l'antecedente Scolio, il lato D del Cubo al lato F dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, è come il lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro; sarà il lato D del Cubo al lato F dell'Icosaedro [p] come la retta BI; il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC, ch'era da dimostrarsi.

h 16. del 5.
K 8. del 13.
l 22. del 6.
m 11. del 5.
n 16. del 5.
o 22. del 6.
p 11. del 5.

LEMMA I.

Se la sfera è segata da qualche piano, la commune settione è circolo.

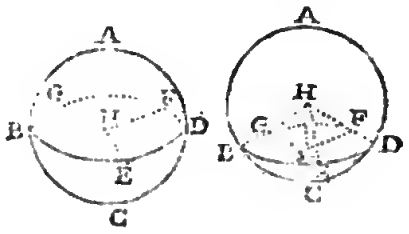


Sia la sfera ABCD segata dal piano BEDF, e la commune settione sia BEDFG. Dico che il piano BEDFG è circolo. Passi prima il piano segante per il centro H della sfera. Perche tutte le rette tirate dal centro H della sfera alla superficie sferica, per la definitione della sfera, sono frà di loro vguali, perciò le rette HE, HF, HG, e tutte le altre tirate nel piano BEDFG, sono frà di loro vguali, e per la definitione del circolo, il piano BEDFG sarà circolo. Se il piano BEDFG non passa per il centro H, dal centro H si faccia cadere la retta HI [a] *perpendicolare al piano BEDFG, e dal punto I nel piano BEDFG si tirino le rette IF, IE, IG. Essendo HI perpendicolare al piano BEDFG, gli angoli HIE,* a 11. del 11.

b 3.definit. de. 11. *HIF, HIG* [b] *saranno retti, e tutte le rette HE, HF, HG, tirate dal centro H alla superficie della sfera, sono frà di loro vguali. Nel*

c 47.del 1. *triangolo HIE, angolo retto in I, il quadrato di HE* [c] *è vguale à i quadrati delle due HI, IE; e*

d 47.del 1. *nel triangolo HIF, il quadrato di HF* [d] *è vguale à i quadrati de i lati HI, IF; per la qual cosa i quadrati de i due lati HI, IE, saranno vguali à i quadrati delle due HI, IF; se ne leui il commune quadrato di HI, resta il quadrato di IE vguale al quadrato di IF, e la retta IE sarà vguale alla retta IF. Nell' istesso modo si dimostrerà, che IF è vguale ad IG, ed è vguale à tutte le altre rette tirate dal punto I nel piano BEDFG. Per la qual cosa il piano BEDFG è circolo, come fù proposto dimostrare.*



COROLLARIO.

Appare dunque che, se il piano segante passa per il centro della sfera, il circolo, che si fà, hà il medesimo centro colla sfera; e se il piano, che sega, non passa per il centro della sfera, il centro del circolo generato, è fuori del centro della sfera, ed è quel punto doue la retta tirata dal centro della sfera cade perpendicolare al piano segante.

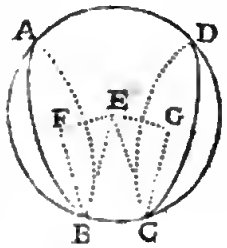
LEMMA II.

I circoli vguali nella sfera sono vgualmente distanti dal centro della sfera; ed i circoli, che nella sfera sono vgualmente distanti dal centro di essa sfera, sono frà di loro vguali.

Nella sfera ABCD, il di cui centro E, siano gli vguali circoli AB, CD. Dico che i circoli AB, CD, sono vgualmente distanti dal centro E. Cadano dal centro E a i piani de' cir-

coli

coli AB, CD, [a] le perpendicolari EF, EG, e per l'antecedente Corollario, i punti F, & G, ſono i centri de' circoli AB, CD; da i centri G, ed F, alle circonferenze de' circoli AB, CD, ſi tirino le rette GC, FB. Eſſendo i circoli AB, CD, per ipoteſi, frà di loro vguali, i loro ſemidiametri FB, GC ſono frà di loro vguali; ſi tirino le rette EB, EC, le quali, per la definitione della ſfera, ſono frà di loro vguali; e perche le rette EG, EF, ſono perpendicolari à i piani AB, CD, perciò gli angoli EGC, EFB [b] ſono retti. Nel triangolo rettangolo EGC il quadrato di EC [c] è vguale à i quadrati de i due lati EG, GC; e ſimilmente nel triangolo EFB, angolo retto in F, il quadrato di EB [d] è vguale à i quadrati de i due lati EF, FB: ma il quadrato di EC è vguale al quadrato di EB, i due quadrai de i lati EG, GC, ſaranno vguali à i due quadrati de i lati EF, FB; ſe ne leuino i quadrati delle vguali GC, FB, reſta il quadrato di EG vguale al quadrato di EF, e la retta EG ſarà vguale alla retta EF. Hor eſſendo le perpendicolari EG, EF frà di loro vguali, i circoli AB, CD diſtano vgualmente dal centro E della ſfera, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



a 11. del 11.

b 3. definit. del 11.

c 47. del 1.

d 47. del 1.

Di nuouo ſiano i circoli AB, CD vgualmente diſtanti dal centro E. Dico che ſono frà di loro vguali. Sia fatta la medeſima coſtruttione di prima, e ſi dimoſtri che i quadrati delle due EG, GC ſono vguali à i quadrati delle due EF, FB, che leuatone i quadrati delle vguali perpendicolari EG, EF, reſta il quadrato di GC vguale al quadrato di FB, e la retta GC ſarà vguale alla retta FB. Hor eſſendo i ſemidiametri GC, FB frà di loro vguali, i circoli AC, DC ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

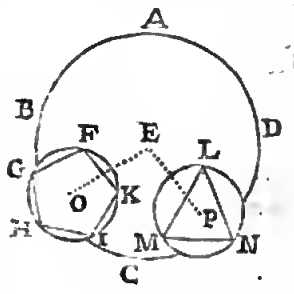
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Il Dodecaedro all'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima ſfera, è come il lato del Cubo al lato dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima ſfera.

Nella ſfera ABCD, il di cui centro E, ſia iſcritto il Dodecaedro, & di eſſo vno de i pentagoni ſia FGHIK; e ſimilmente nella medeſima ſfera ſia iſcritto l'Icoſaedro, del quale vno de i triangoli ſia LMN. Dico

che

che il Dodecaedro, la di cui baſe è il pentagono FGHIK, all'Icoſaedro, la di cui baſe è il triangolo LMN, è come il lato del Cubo al lato dell'Icoſaedro, ò iſcritti nella sfera ABCD, ò pure in altra sfera. S'intendano continuati i piani del pentagono FGHIK, e del triangolo LMN, le ſettioni fatte nella sfera ABCD, per il primo degli antecedenti Lemma, ſaranno i circoli FGHIK, LMN; e perche il pentagono del Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icoſaedro [a] ſi iſcriuono in vn medeſimo circolo, perciò i circoli, ne'quali ſono iſcritti il pentagono FGHIK, ed il triangolo LMN, ſono frà di loro vguali; e per il ſecondo degli antecedenti Lemma, gli vguali circoli FGHIK, LMN, diſtano vgualmente dal centro E della sfera. Se dunque dal centro E della sfera ſono tirate le rette EP, EO, [b] perpendicolari à gli vguali circoli FGHIK, LMN, quelle ſono frà di loro vguali, e per il Corollario al primo Lemma, i punti P, O ſono i centri de'circoli FGHIK, LMN. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che tutte le rette tirate dal centro E della sfera, perpendicolari à gli altri pentagoni del Dodecaedro, ed à gli altri triangoli dell'Icoſaedro, ſono frà di loro vguali, e cadono ne i centri di quei pentagoni, e triangoli. Se dunque da tutti gli angoli del Dodecaedro, s'intendano tirate linee rette al centro E della sfera, ſarà diuiſo tutto il Dodecaedro in 12 piramidi di vguali baſi, ed vguali altezze, ed in conſeguenza vguali frà di loro. E ſimilmente, ſe da tutti gli angoli dell'Icoſaedro al centro E della sfera, s'intendano tirate linee rette, ſarà diuiſo l'Icoſaedro in venti piramidi di vguali baſi, & vguali altezze, è perciò frà di loro vguali. E perche l'altezza della piramide del Dodecaedro è dimoſtrata vguale all'altezza della Piramide dell'Icoſaedro, ſtante che EP è vguale ad EO, ſarà la piramide del Dodecaedro alla piramide dell'Icoſaedro [c] come la baſe FGHIK alla baſe LMN; e Dodecuplicati gli antecedenti, ſaranno le dodeci piramidi del Dodecaedro, cioè tutto il Dodecaedro, alla piramide EMNL dell'Icoſaedro, come i dodici pentagoni del Dodecaedro, cioè tutta la ſuperficie del Dodecaedro, al triangolo LMN: e, ventuplicati i conſeguenti, ſarà tutto il Dodecaedro alle venti piramidi dell' Icoſaedro, cioè à tutto l'Icoſaedro, come la ſuperficie del Dodecaedro à i venti triangoli LMN dell' Icoſaedro, cioè à tutta la ſuperficie dell' Icoſaedro: ma la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie dell' Icoſaedro, per la 4. propoſitione di queſto, è come il lato del Cubo al lato dell' Icoſaedro iſcritti l' vno, e l' altro in qualunque altra sfera; il Dodecaedro dunque all' Icoſaedro, iſcritti nella medeſima sfera è come il lato del Cubo al lato dell' Icoſaedro, iſcritti in qualunque altra sfera, ch' era da dimoſtrarſi.



[a] 2. del 14.

[b] 11. del 12.

[c] 5. & 6. del 12.

COROL-

COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato, è manifeſto, che il Dodecaedro all' Icoſaedro, iſcritto nella medeſima ſfera, è come la ſuperficie del Dodecaedro alla ſuperficie del Icoſaedro.

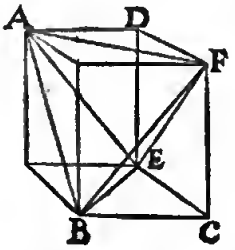
Fine del decimoquarto Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOQVINTO.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Nel dato Cubo iſcriuere il Tetraedro.

SIA il dato Cubo ABCD, nel quale ſi habbia ad iſcriuere il Tetraedo. Da vno degli angoli del dato Cubo, come dall'angolo A, ne i tre piani AB, AE, AF, che lo coſtituiſcono, ſi tirino le diagonali AB, AE, AF, e per gli eſtremi F, E, B, di queſte diagonali ſi tirino à gli altri tre piani le diagonali FE, EB, BF. Perche i piani, che che contengono il Cubo ABCD, ſono quadrati vguali frà loro, tutti i diametri AE, AF, AB, FE, EB, FB ſono frà di loro vguali, ſtante che il quadrato di ogn'vna delle dette diagonali è il doppio del quadrato del lato del Cubo. Hor eſſendo tutte le dette diagonali frà di loro vguali, i quattro triangoli ABF, ABE, AEF, FEB, ſono equilateri, ed vguali frà loro, per la qual coſa il ſolido contenuto da queſti quattro triangoli ſarà Tetraedro; e perche tutti gli angoli del coſtrutto Tetraedro ſono collocati negli angoli del Cubo, perciò il coſtrutto Tetraedro è iſcritto nel Cubo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



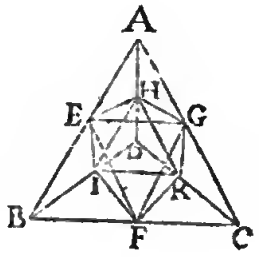
PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

Nella data Piramide iſcriuere l'Ottaedro.

Sia la Piramide, ò Tetraedo ABCD, nel quale s'habbia ad iſcriuere l'Ottaedro. Si diuidano tutti i lati della propoſta piramide [a] in due parti vguali ne i punti E, F, G, H, I, K, e ſi tirino le dodici rette EH, HG, GE, GK, KI, IE, IF, FK, KH, HI, EF, FG, le quali coſtituiſcono otto triangoli,

cioè

cioè quattro ſopra al piano EIKG, e gli altri quattro ſono ſotto al medeſimo piano EIKG, quelli poſti ſopra al piano EIKG ſono i notati FIE, FEG,FGK,FIK, i quali concorrendo nel punto F, coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice F, e la baſe il piano EIKG; quelli poi poſti ſotto al piano EIKG ſono i notati HEG, HEI, HIK, HKG, i quali concorrono nel medeſimo punto H, e coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice H, e la baſe è il piano EIKG. Dico che il ſolido contenuto da queſti otto triangoli è l'Ottaedro iſcritto nella data Piramide. Perche tutti i lati della Piramide ſono diuiſi in due parti vguali,ſaranno i lati AG,AH, del triangolo AGH, vguali à i lati AE, AH del triangolo AEH, l'angolo GAH è vguale all'angolo EAH, ſtante che ſono angoli de i triangoli equilateri, perciò la baſe HG [b] ſarà vguale alla baſe HE. Similmente ne i triangoli AEG, AEH, i due lati EA,AG ſono vguali à i due lati AE, AH, l'angolo EAG è vguale all'angolo EAH, perciò la baſe EG [c] ſarà vguale alla baſe EH; ma EH è dimoſtrata vguale ad HG, i tre lati dunque EH,HG,GE ſono frà di loro vguali, ed il triangolo EHG è triangolo equilatero. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli otto triangoli ſopra nominati ſono equilateri. E perche queſti triangoli, preſi à due à due, hanno vn lato commune, come la retta EG è lato del triangolo EHG, ed è lato del triangolo EFG, ed il ſimile s'intende degli altri, perciò tutti gli antedetti otto triangoli ſono frà di loro vguali, e per la definitione 27. dell'11, il ſolido contenuto da quegli otto triangoli è Ottaedro; e perche tutti gli angoli del detto Ottaedro toccano i lati del Tetraedro, perciò è iſcritto nel propoſto Tetraedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



b 4. del 1.

c 4.del 1.

SCOLIO.

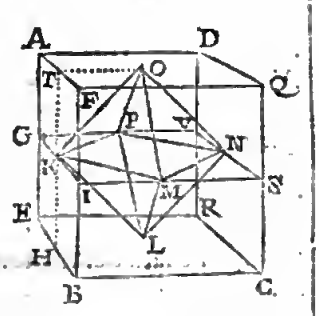
Perche i tre piani EIKG,GHIF,HKEF per il primo Coroll. alla 14. propoſ. del 13, ſono quadrati vguali, che ſcambieuolmente ſi ſegano ad angoli retti, ciaſcuno de'quali diuide la piramide ABCD in due parti vguali, ſtante che ogn'vno diuide la piramide ABCD in modo, che da vna parte laſcia vn priſma, ed vna piramide, e dell'altra laſcia l'altro priſma, e l'altra piramide; come per eſempio, il quadrato EFKH laſcia da vna parte la piramide AEGH, ed il priſma EHGCFK, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HEBFKI. Similmente il quadrato HIFG laſcia da vna parte la piramide AGHE, ed il priſma EHGFBI, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HGCFIK, ed il quadrato EIKG laſcia da vna parte la piramide GFCK, ed il priſma EGFKIB, e dall'altra parte laſcia la piramide AEHG, ed il priſma EHGKID, per il che le piramidi ſono frà di loro vguali, ed i priſmi ſono frà di loro vguali, ed il tutto ſi può ancora dimoſtrare, come ſi fece nella 3. propoſ. del 12; d'onde è manifeſto,

che se sarà iscritto l'Ottaedro nel Tetraedro, i tre vguali quadrati, che scambieuolmente si segano ad angoli retti, ed ogn'vno sega l'Ottaedro in due parti vguali, ogn'vno di essi sega ancora la piramide in due parti vguali.

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

In vn dato Cubo iscriuere l'Ottaedro.

Sia il Cubo ABCD, nel quale s'habbia ad iscriuere l'Ottaedro. Si diuidano i lati del quadrato AEBF [a] in due parti vguali ne i punti T, G, H, I; si tirino le rette TH, GI, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto K, sarà K il centro del quadrato AEBF. Nell'istesso modo si trouino i centri degli altri quadrati, che contengono il Cubo ABCD, che siano i punti M, N, P, L, O; si tirino le rette KM, MN, NP, PK; poi dal punto L si tirino le rette LK, LM, LN, LP, e dal punto O si tirino le rette OK, OM, ON, OP; e saranno descritti otto triangoli, cioè quattro sopra il piano KMNP, e quattro altri di sotto; i quattro sopra il piano KMNP, che costituiscono vna piramide, il di cui vertice O, e la base è il piano KMNP, sono i notati OKM, OMN, ONP, OPK, gli altri quattro di sotto, che costituiscono la piramide, il di cui vertice L, e la base il piano KMNP, sono i notati LKM, LMN, LNP, LPK. Dico che il solido contenuto da questi otto triangoli è Ottaedro. Perche FI è vguale, e parallela ad SQ, sarà IS [b] vguale, e parallela ad FQ. Nell'istesso modo si dimostrerà, che IG è vguale, e parallela ad AF, e perciò l'angolo SIG [c] sarà vguale all'angolo QFA: ma l'angolo QFA è retto, sarà l'angolo SIG retto. In oltre perche AQ è quadrato, sarà QF vguale ad FA: ma QF è dimostrata vguale ad SI, e la retta AF vguale ad IG, sarà dunque SI vguale ad IG, e la metà MI vguale ad IK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli angoli IGV, GVS, ISV, OTK sono retti, e perciò il quadrilatero ISVG è quadrato, e la metà de' lati GK, KI, IM, MS, SN, NV, VP, PG sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutte le rette tirate da i centri de' quadrati nelle metà de i lati di essi quadrati sono frà di loro vguali, ed ogn'vna è vguale alla metà del lato del quadrato, ed in conseguenza i lati OT, TK, IK, IM &c. sono frà di loro vguali. Nel triangolo IMK, perche l'angolo MIK è retto, ed i lati IK, IM, sono frà di loro vguali, perciò ogn'vno degli angoli IMK, IKM, [d] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'vno degli angoli SMN, SNM, VNP, VPN, GPK, GKP, è la metà d'vn angolo retto, e perciò gli angoli KMN, MNP, NPK, PKM [e] sono retti; ed essendo i lati KI, IM, vguali à i lati PG, GK, e gli angoli MIK, PGK, retti, sarà la base PK, [f] vguale alla base KM; per la qual cosa il quadrilatero KMNP è quadrato. Nell'istesso modo si proverà, che i quadrilateri LMOP,



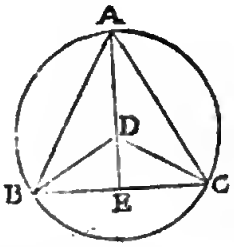
a 10. del 1.
b 33. del 1.
c 11. del 11.
d 32. del 1.
e 13. del 1.
f 4. del 1.

OKLN ſono quadrati. Si conſiderino i triangoli OKM, OKP. Perche i due lati OK, KM, ſono vguali à i due lati OK, KP, e la baſe OM è vguale alla baſe OP, ſtante che ſono lati del quadrato LMOP, ſarà l'angolo OKM g vguale all'angolo OKP, e tutto il triangolo OKM h vguale al triangolo OKP. Finalmente perche i lati OT, TK, del triangolo OTK, ſono vguali à i lati KI, IM del triangolo KIM, e gli angoli OTK, KIM ſono retti, ſarà la baſe OK K vguale à KM, ed ogni lato del quadrato OKLN ſarà vguale à ciaſcun lato del quadrato KMNP. E nel medeſimo modo ſi prouerà, che ogni lato del quadrato OKLN è vguale à ciaſcun lato del quadrato LMOP, per la qual coſa tutti gli otto triangoli OKM, OMN, ONP, OPK, LKM, LMN, LNP, LPK, ſono equilateri, ed vguali, e per la definit. 17. dell'11, il ſolido contenuto da i detti otto triangoli è Ottaedro, il quale toccando, per coſtruttione, con tutti i ſuoi angoli i quadrati, che contengono il Cubo ne i centri O, K, L, M, N, P, ſarà, per la definitione dell'11, iſcritto nel Cubo ABCD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

g 8. del 1.
h 4. del 1.
K 4. del 1.

LEMMA.

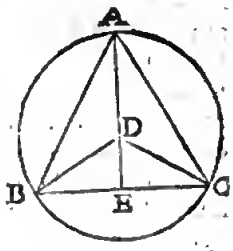
La retta linea, che tirata da vn'angolo del triangolo equilatero al centro del medeſimo triangolo, e continuata concorre col lato oppoſto, ſarà perpendicolare à quel lato; diuide quel lato, e l'angolo del triangolo in due parti vguali, e tutta è tripla della parte interpoſta frà il centro, ed il lato, al quale cade perpendicolare.



Sia il triangolo equilatero ABC, il di cui centro D, e dall'angolo A al centro D ſia tirata la retta AD, la quale continuata concorra col lato BC in qualche punto E. Dico che la retta AE è perpendicolare al lato BC; che diuide BC, e diuide l'angolo BAC in due parti vguali; e che tutta AE è tripla alla retta ED, la quale dal centro D cade perpendicolare al lato BC. Intorno al triangolo ABC a ſia circoſcritto il circolo ABC, il di cui centro ſarà il punto D; ſi tirino le rette DC, DB. Perche il triangolo ABC è equilatero, ſarà l'arco AC b vguale all'arco AB, e l'angolo ADC c ſarà vguale all'angolo ADB, per la qual coſa i ſupplementi, cioè gli angoli CDE, BDE, d ſono frà di loro vguali. Si conſiderino i due triangoli DEC, DEB, de' quali i due lati ED, DC ſono vguali à i due lati ED, DB, l'angolo EDC è vguale all'angolo EDB, ſarà la baſe EC e vguale alla baſe EB, e gli angoli DEC, DEB ſaranno frà di loro vguali, cioè retti, e ſarà la retta AE, come ancora DE, perpendicolare al lato BC. Ne i triangoli AEC, AEB, eſſendo l'angolo ACE vguale all'angolo ABE, e gli angoli in E retti, ſarà il rimanente angolo EAC f vguale al reſtante angolo EAB. Si conſiderino poi i triangoli ADB, BDC. Perche i due lati AD, DB ſono vguali à i due

a 5. del 4.
b 28. del 3.
c 27 del 3.
d 13. del 1.
e 4. del 1.
f 32. del 1.

g 8. del 1. h 4. del 1. *lati BD, DC, e la baſe AB è vguale alla baſe BC, ſarà l'angolo ADB g vguale all'angolo BDC, ed il triangolo ADB h ſarà vguale al triangolo BDC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il triangolo ADB è vguale al triangolo ADC, per il che i tre triangoli ADB, BDC, ADC ſono frà di loro vguali, e tutto il triangolo ABC ſarà il triplo del triangolo DBC. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle due AE,*



K 41. del 1. l 41. del 1. *BC K è il doppio del triangolo ABC, ed il rettangolo contenuto dalle due DE, BC l è il doppio del triangolo DBC, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB vguale al triangolo ABC; ed il rettangolo contenuto dalle due DE, EB vguale al triangolo DBC; e perciò il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al triangolo ABC, ſarà come il rettangolo contenuto dalle due DE, EB al trian-*

m 16. del 5. *golo DBC: e permutando, il rettangolo contenuto dalle due AE, EB m al rettangolo contenuto dalle due DE, EB, ſarà come il triangolo ABC al triangolo DBC; preſe AE, ED come baſi di due rettangoli, la di cui altezza commune ſia BE, ſarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto*

n 1. del 6. *dalle due DE, EB, n come la baſe AE alla baſe DE; e perche il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto dalle due DE, EB, per quel che ſi è dimoſtrato, è come il triangolo ABC al triangolo DBC, ſarà il*

o 11. del 5. *triangolo ABC al triangolo DBC o come la retta AE alla retta DE: ma il triangolo ABC fù dimoſtrato eſſere il triplo del triangolo DBC, la retta dunque AE ſarà il triplo della retta DE, ch'era da dimoſtrarſi.*

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IV.

Nel dato Ottaedro iſcriuere il Cubo.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, nel quale s'habbia da iſcriuere il Cubo. Perche l'Ottaedro è diuiſo dal quadrato in due Piramidi, ogn'vna delle quali è contenuta da quattro triangoli equilateri, ed hà per baſe il detto quadrato, ſia quel quadrato, per eſempio, il notato ABCD, ſopra il quale ſia poſta la Piramide, il di cui vertice E, e la baſe il detto quadrato ABCD, ed i quattro triangoli ſiano i notati EAB, EBC, ECD, EAD; l'altra Piramide vguale à queſta reſti ſotto al quadrato ABCD, la quale hà per vertice F, e per baſe il medeſimo quadrato ABCD; e ritornando alla

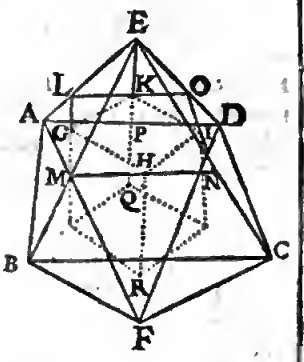
a 5. del 4. prima Piramide ſi trouino i centri de' triangoli EAB, EBC, ECD, EAD, a che ſiano i punti, G, H, I, K, e ſi tirino le rette KG, GH, HI, IK; per li punti

b 31. del 1. K, G, H, I, ſi faceiano paſſare le rette LM, MN, NO, OL, b cioè ML parallela ad AB, MN parallela à BC, NO parallela à CD, ed LO parallela ad AD;

c Corol. alla 4. del 6. ſaranno i triangoli LME, EMN, NEO, OEL, c ſimili à i triangoli equilateri EAB, EBC, ECD, EAD, e perciò i triangoli LME, EMN, NEO, OEL ſono equilateri: e perche ogni due de i detti triangoli hanno vn lato commune; per eſempio EM è lato commune de i due triangoli ELM, EMN; la retta EN è lato commune de i due EMN, ENO, e la retta EO è lato com-

mune

mune de i due ENO,EOL; per la qual cosa i triangoli ELM,EMN,ENO, EOL sono frà di loro vguali. Dal punto E al centro K del triangolo equilatero EAD si tiri la retta EK, e si prolunghi in P; per l'antecedente Lemma, EP sarà tripla alla retta KP, e perciò EK sarà il doppio di KP: ma, EK à KP [d] è come EL ad LA, ed ancora come EO ad OD, sarà EL il doppio di AL, e la retta EO il doppio di OD. Nell'istesso modo si dimostrerà che EM è il doppio di MB, e che EN è il doppio di NC; ed essendo le rette EA,EB,EC,ED, diuise nella medesima proportione, le rette ML, MN,NO, OL concorreranno ne i punti delle diuisioni L,M, N,O: e perche i triangoli equilateri ELM, EMN,ENO, EOL furono dimostrati frà loro vguali, perciò i lati LM,MN,NO,OL sono frà di loro vguali. In oltre, perche la retta LO è parallela ad AD, e la retta LM è parallela ad AB, sarà l'angolo MLO [e] vguale all'angolo BAD: ma l'angolo BAD è retto, stante che il quadrilatero ABCD, per il 1. Coroll. alla 14. propos. del 13, è quadrato, in conseguenza l'angolo OLM sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli LON, ONM, NML sono retti, e perciò il quadrilatero LMNO è quadrato. Si considerino i due triangoli EKL, EKO. Perche i due lati EK, EL, sono vguali à i due lati EK, EO, e l'angolo KEL, per l'antecedente Lemma, è vguale all'angolo KEO, sarà la base LK [f] vguale alla base KO; dal che la retta LO è diuisa in due parti vguali nel pũto K. Col medesimo modo d'argumẽtare si dimostrerà, che le rette ML,MN,NO sono diuise in due parti vguali ne i punti, G,H,I; per la qual cosa le rette LG,GM,MH,HN,NI,IO,OK,KL, essẽdo metà de i lati del quadrato LMNO, sono frà di loro vguali; e perche gli angoli KLG, GMH,HNI, IOK sono retti, perciò le rette KG,GH,HI, IK [g] sono frà di loro vguali. Di più perche i lati LK, LG sono frà di loro vguali, e l'angolo KLG è retto, ogn'vno de gli angoli LKG,LGK, [h] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà che ogn'vno degli angoli OKI, OIK, NIH,NHI,MHG,MGH, è la meta d'vn angolo retto, e perciò gli angoli GKI,KIH, IHG, HGK [K] sono retti; per la qual cosa il quadrilatero KGHI è quadrato. Finalmente perche l'Ottaedro, per il 3. Coroll. alla 14. prop. del 13, si diuide in sei vguali piramidi quadrangolari, che due prese In qualunque modo compongono l'Ottaedro, e nella figura antecedente vna di quelle piramidi è la notata EABCD, la di cui base è il quadrato ABCD, ed il vertice E, nella quale si è iscritto il quadrato LMNO, se in ciascuna delle altre cinque piramidi si farà la medesima costruttione, saranno iscritti gli altri cinque quadrati, ogn'vno vguale al quadrato LMNO, i quali tutti haueranno gli angoli ne i centri de i triangoli, che contengono l'Ottaedro, e per la defin. 31. del 11, sarà iscritto il Cubo KGRI nell'Ottaedro, come si è proposto fare, e dimostrare.



d 2. del 6.

e 10. del 11.

f 4. del 1.

g 4. del 6.

h 32. del 1.

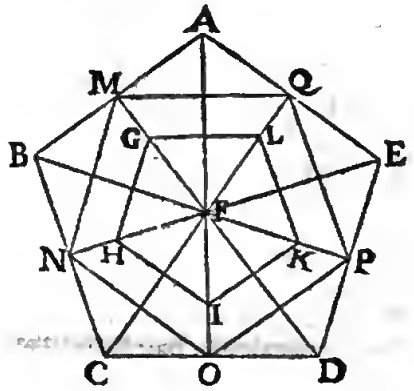
K 13. del 1.

PRO-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Iſcriuere il Dodecaedro nel dato Icoſaedro.

Sia ABCDE vno de i dodeci pentagoni, che nell'Icoſaedro ſono baſi delle dodici piramidi, come fù ſpiegato nel terzo Corollario della 16. prop. di queſto, e ſopra la baſe ABCDE s'intenda eretta vna di quelle 12. piramidi dell'Icoſaedro, il di cui vertice ſia F, e l'angolo ſolido F ſia contenuto da i cinque angoli piani AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ed i centri de' triangoli equilateri AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ſiano i punti, G, H, I, K, L, i quali ſi congiungano con le rette, GH, HI, IK, KL, LG. Dal vertice F à i centri G, H, I, K, L, ſi tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL, e ſi prolunghino ſin che ſeghino i lati del pentagono ne i punti, per eſempio M, N, O, P, Q, le rette FM, FN, FO, FP, FQ, per il Lem. dopo la 1. prop. di queſto, ſegaranno i lati del pentagono in due parti vguali, & ad angoli retti in M, N, O, P, Q; ſi tirino le rette MN, NO, OP, PQ, QM. Perche le rette AQ, AM, ſono vguali alle due BM, BN, e gli angoli

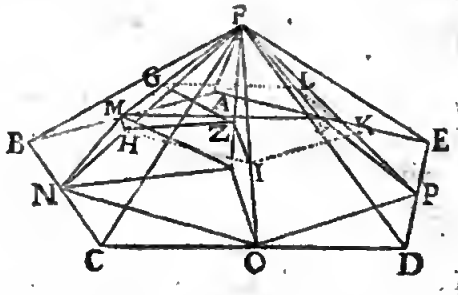


QAM, MBN, ſono frà di loro vguali, perciò la baſe QM [a] ſarà vguale alla baſe MN. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che le rette QP, PO, ON ſono frà loro vguali, e che ogn'vna è vguale ad MQ ouero MN; per la qual coſa il pentagono MNOPQ ſarà equilatero. Similmente perche le perpendicolari FQ, FM, FN, FO, FP, ſono frà di loro vguali (ſtante che ſono le perpendicolari de gli vguali triãgoli equilateri, che ſono baſi dell'Icoſaedro) e le rette QM, MN, NO, OP, PQ, ſono ſtate dimoſtrate vguali, gli angoli QFM, MFN, NFO, OFP, PFQ, [b] ſaranno frà di loro vguali. E perche i punti G, H, I, K, L, ſono centri de gli vguali triangoli equilateri, le rette FG, FH, FI, FK, FL ſaranno frà di loro vguali: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, contengono angoli vguali, perciò le rette GH, HI, IK, KL, LG ſono frà di loro vguali, ed il pentagono GHIKL, è equilatero. Di nuouo eſſendo i lati AQ, AM, BM, BN, CN, CO, &c. frà di loro vguali, e gli angoli in A, B, C, frà di loro vguali, ſaranno gli angoli AQM, AMQ, BMN, BNM, CNO &c. frà di loro vguali, e perciò i due angoli AMQ, BMN ſono vguali à i due angoli BNM, CNO, e per la 13. del 1, il rimanente angolo QMN ſarà vguale al reſtante angolo MNO. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vno degli angoli MNO, NOP, OPQ, PQM, è vguale all'angolo QMN, ed in conſeguenza ſono frà di loro vguali: dal che il pentagono MNOPQ, ch'è poſto nel piano ABCDE, ſarà equiangolo, e

[a] 4. del 1.

[b] 8. del 1.

perche



perche ſopra ſi è dimoſtrato il pentagono MNOPQ eſſere equilatero; ſarà perciò il pentagono MNOPQ equilatero, ed equiangolo. Di più perche le perpendicolari FM,FN,FO,FP, FQ, paſſano per li centri de' triangoli equilateri, per il Lem. dopo la 2. propoſitione di queſto ſono i tripli delle rette GM, HN, IO, KP, LQ; ſarà FG il doppio di GM, e la retta FH ſarà il doppio di HN. Per la qual coſa FG à GM [c] ſarà come FH, ad ad HN; e per la 2. del 6, la retta HG è parallela ad NM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le altre rette HI, IK, KL, LG, ſono parallele à i lati NO,OP,PQ,QM. Hor eſſendo le due LG,GH parallele alle due QM,MN, ſarà l'angolo LGH [d] vguale all'angolo QMN, e per l'iſteſſa ragione gli angoli, GHI,HIK,IKL, ſono vguali à gli angoli MNO,NOP,OPQ, ed in conſeguenza gli angoli LGH,GHI,HIK,IKL, KLG, ſono frà loro vguali. Finalmente perche le rette GH,HI ſono parallele alle rette MN, NO, il piano, che paſſa per le rette GH,HI, [e] ſarà eqnidiſtãte al piano MNO. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che il piano, che paſſa per le rette HI, IK, è parallelo al piano NOP, e perche la retta HI è nel piano GHI, ed ancora nel piano HIK, li piani GHI, KIH, ſecondo la detta poſitura, formano vn medeſimo piano. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il pentagono GHIKL è in vn medeſimo piano, e per quel che ſi è dimoſtrato, il pentagono GHIKL è equilatero, ed equiangolo. Se poi nelle altre vndici piramidi dell'Icoſaedro ſi farà la medeſima coſtruttione, congiungendo con rette linee i centri de' triangoli equilateri, ſaranno coſtrutti dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli, i quali coſtituiranno il Dodecaedro iſcritto nel propoſto Icoſaedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

[c] 15. del 5.

[d] 10. del 11.

[e] 15. del 11.

INVENTIONE

Dell'angolo della ſcambieuole inclinatione di due baſi di qualunque corpo regolare,

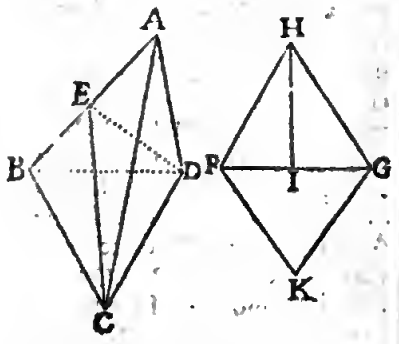
DI ISIDORO MAESTRO D'HYPSICLE.

I.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Tetraedro.

Sia il Tetraedro ABCD contenuto da i quattro triangoli equilateri ABC,ACD,ADB, BCD, e ſia A il vertice, e la baſe ſia BCD, e ſi

voglia



voglia ritrouare l'angolo di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD. Si faccia il triangolo equilatero HFG vguale al triangolo equilatero ABC, ouero
a 23. del 1. ABD, dall'angolo H [a] si faccia cadere la retta HI perpendicolare al lato FG, poi sopra la retta FG si costruisca il triangolo isoscele KGF in modo, che ciascun lato KG, KF, sia vguale ad IH. Dico che l'angolo FKG sarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è incli-
b 10. del 1. nato al piano ABD. Si diuida il lato AB [b] in due parti vguali in E, e si tirino le rette CE, DE. Perche i due lati BE, EC sono vguali à i due lati CE, EA, e la base AC è vguale alla base BC, stante che sono lati
c 8. del 1. del triangolo equilatero ABC, sarà l'angolo CEB [c] vguale all'angolo
d 10. defin. del 1. CEA, e perciò gli angoli CEB, CEA [d] sono retti, e la retta CE è perpendicolare ad AB. Per l'istessa ragione la retta DE è perpendicolare ad AB. Di nuouo perche BC è vguale ad AB, sarà BC il doppio di
e Scol. alla 4. del 2. BE, ed il quadrato di BC [e] sarà il quadruplo del quadrato di BE: ma
f 47. del 1. il quadrato di BC [f] è vguale à i quadrati de i lati CE, EB, i quadrati de i lati di CE, EB, saranno il quadruplo del quadrato di EB: dal che il quadrato di CE sarà il triplo del quadrato di EB, cioè il quadrato di EB sarà la terza parte del quadrato di EC. Di nuouo perche il quadrato di CE è minore del quadrato di CB per quanto è il quadrato di EB, sarà dunque il quadrato di CE minore del quadrato di CB per quanto è vn terzo del medesimo quadrato di CE. Nell'istesso modo si dimostrerà che il quadrato di DE è minore del quadrato di CB per quanto è la terza parte del medesimo quadrato di DE; dal che i quadrati delle due CE, ED, insieme giunti, sono maggiori del quadrato di BC; ma BC è vguale al lato CD, i quadrati delle due CE, ED, saranno maggiori del quadrato di CD;
g 13. del 1. per la qual cosa l'angolo CED [g] sarà acuto, e perche le rette CE, ED sono perpendicolari alla retta AB, ch'è commune settione de' piani ABC, ABD, sarà l'angolo CED l'inclinatione, che fà il piano ABC al piano ABD. Finalmente perche i triangoli equilateri ABC, ABD, HFG sono frà loro vguali, le perpendicolari CE, DE, HI sono frà di loro vguali; fù fatto ciascun lato KG, KF vguale ad HI, saranno i due lati KG, KF, vguali à i due lati CE, ED; la base CD è vguale alla

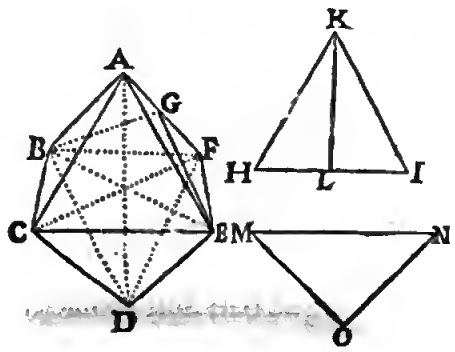
base

baſe FG; ſtante che i triangoli BCD, HFG ſono equilateri, ed vguali, l'angolo dunque FKG [h] ſarà vguale all'angolo CED, e perciò l'angolo GKF ſarà acuto, e ſarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi. h 8. del 1.

II.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi dell'Ottaedro.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, la di cui diagonale ſia BE, e ſia eſpoſto il triangolo equilatero KHI vguale ad vno de' triangoli equilateri, che contiene il propoſto Ottaedro, per eſempio, ſia vguale al triangolo equilatero AEF, ouero AFB, dall'angolo K ſi faccia cadere la retta KL [k] perpendicolare al lato HI: ſi eſponga poi la retta MN vguale alla diagonale BE, e ſopra la retta MN ſi deſcriua il triangolo iſoſcele ONM [l] in modo, che ciaſcuno de' lati ON, OM ſia vguale alla perpendicolare KL. Dico che l'angolo MON è vguale alla inclinatione del piano AEF al piano AFB. Si diuida AF in due parti vguali in G, ſi tirino le rette EG, BG, e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente, che le rette EG, BG ſono perpendicolari alla retta AF, per la qual coſa l'angolo BGE ſarà la quantità dell'inclinatione, che fà il piano AEF al piano AFB. Perche i triangoli equilateri KHI, ABF, AEF ſono frà di loro vguali, le loro perpendicolari KL, EG, BG, ſono frà di loro vguali, ma ciaſcun lato ON, OM è vguale, per coſtruttione, alla perpendicolare KL, ſaranno i due lati ON, OM vguali à i due lati GB, GE; la baſe MN è vguale alla baſe BE; ſarà l'angolo MON [m] vguale all'angolo BGE, e perciò l'angolo MON ſarà la quantità dell'inclinatione, che hà il piano AEF al piano ABF. Dico finalmente che l'angolo MON è ottuſo. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF [n] è vguale à i quadrati de' lati EG, GF, e perciò il quadrato di EF è maggiore del quadrato di EG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrato di BF è maggiore del quadrato di BG: ma nel quadrato BCEF il quadrato di EB è vguale à i due quadrati di EF, FB, ſarà il quadrato di EB maggiore de i quadrati delle rette EG, GB; dal che l'angolo EGB, cioè MON, è ottuſo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



k 12. del 1.

l 22. del 1.

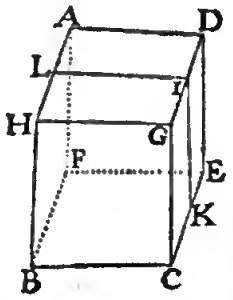
m 8. del 1.

n 47. del 1.

III.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Cubo.

Sia il Cubo ABCD, e ſi voglia ritrouare l'inclinatione, che fà il piano CD al piano HD. Si prenda nella retta GD qualunque punto I, e dal punto I nel piano CD ſi tiri la retta IK [a] ad angoli retti con GD. Similmente dal punto I nel piano GA ſi tiri la retta IL ad angoli retti colla retta GD; ſarà l'angolo LIK l'inclinatione del piano CD al piano HD. Dico che l'angolo LIK è retto. Perche gli angoli LIG, HGI ſono retti, ſarà HG [b] parallela ad IL. Nell'iſteſſo modo ſi proverà, che IK è parallela à CG. Hor eſſendo le rette LI, IK parallele à i lati HG, GC, ſarà l'angolo LIK [c] vguale all'angolo HGC: ma l'angolo HGC è retto, ſarà l'angolo LIK retto; ſi che, douendoſi eſporre in qualche piano l'angolo dell'inclinatione di due contigue baſi del Cubo, ſi faccia in quel piano vn angolo retto, quello rappreſentarà l'inclinatione, che ſi cerca, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.



a 12. del 11.

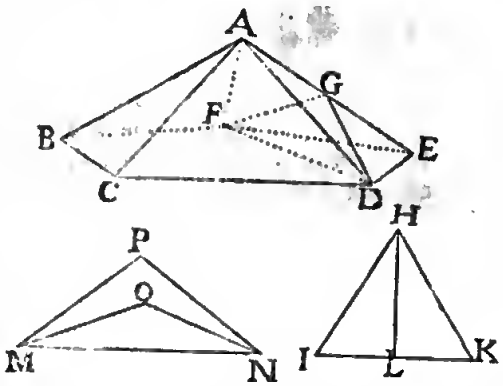
b 28. del 1.

c 10. del 11.

IV.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi dell'Icoſaedro.

Sia eſpoſta vna delle dodici piramidi dell'Icoſaedro, che ſia ABCDEF, la di cui baſe pentagonale ſia BCDEF, ed il vertice A, e ſi voglia ritrouare l'inclinatione del piano AED al piano AEF. Si diuida il lato AE [a] in due parti vguali in G, e da gli angoli D, ed F, al punto G ſi tirino le rette DG, FG, e ſi moſtri, come ſi fece nel Tetraedo, che ne i triangoli equilateri ADE, AFE, le rette DG, FG ſono perpendicolari alla commune ſettione AE, dal che l'angolo DGF ſarà l'inclinatione del piano ADE al piano AEF. Si eſponga il triangolo equilatero HIK vguale al triangolo equilatero ADE, ouero AEF, e dall'angolo H cada la retta HL perpendicolare al lato IK. Perche i triangoli equilateri ADE, AEF, HIK, ſono frà di loro vguali, le per-



a 10. del 1.

pendi-

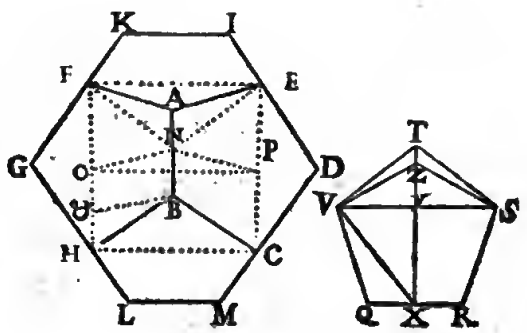
pendicolari HL,DG,FG ſono frà di loro vguali. Si tiri la retta FD, che ſottende l'angolo FED del pentagono, e ſi faccia la retta MN vguale ad FD; ſopra la retta MN ſi coſtruiſca il triangolo OMN iſoſcele [b] in modo, che ciaſcun lato OM, ON ſia vguale alla perpendicolare HL; ſaranno i due lati MO,ON vguali à i due lati DG, GF; la baſe MN è fatta vguale alla baſe FD, ſarà l'angolo MON [c] vguale all'angolo FGD: ma l'angolo FGD è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ADE al piano AEF, l'angolo dunque MON ſarà l'inclinatione del piano AED al piano AEF. Dico finalmente che l'angolo MON, ouero FGD, è ottuſo. Perche il pentagono FBCDE, per ipoteſi, è equilatero, il lato ED ſarà vguale al lato EF. Si coſtituiſca ſopra la baſe MN il triangolo iſoſcele PMN [d] in modo, che ciaſcun lato PM, PN ſia vguale ad ED, ouero EF, e ſi conſideri il triangolo DGE, angolo retto in G. Perche il quadrato di DE, [e] è vguale à i quadrati de i due lati DG, GE, ſarà il quadrato di ED maggiore del quadrato di GD, ed il lato ED ſarà maggiore del lato DG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il lato FE è maggiore del lato FG, dal che i due lati DE,EF ſono maggiori de i due lati DG, GF: ma i due lati DG, GF ſono vguali à i due NO,OM, perciò i due lati DE, EF, cioè i due NP, PM, ſono maggiori de i due lati NO, OM, e per la 21. del 1, l'angolo MON è maggiore dell'angolo NPM. Inoltre perche i lati NP, PM, ſono vguali à i due lati DE,EF, e la baſe NM è vguale alla baſe DF, l'angolo NPM [f] ſarà vguale all'angolo DEF; e perche l'angolo DEF (come angolo del pentagono è ottuſo) perciò l'angolo MPN, ſarà ottuſo; fù dimoſtrato l'angolo NOM maggiore dell'angolo NPM, ſarà l'angolo NOM più ottuſo dell'angolo NPM. Per la qual coſa l'angolo NOM, ouero DGF, che rappreſenta l'inclinatione del piano ADE al piano AEF, è ottuſo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

b 22. del 1.
c 8. del 1.
d 22. del 1.
e 47. del 1.
f & del 1.

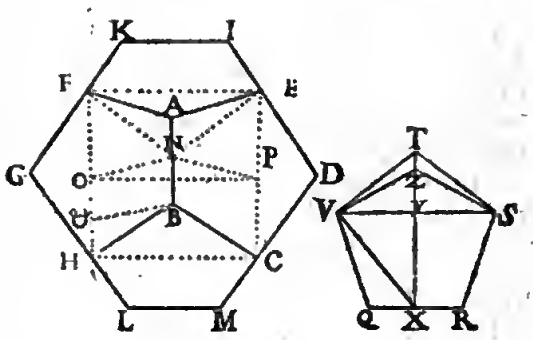
V.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Dodecaedro.

Siano eſpoſte quattro baſi del Dodecaedro, come ſono i notati quattro pentagoni ABCDE, FGHBA, AEIKF, CBHLM, in modo, che i due ABCDE, FGHBA concorrano, ſecondo il commune lato AB, e gli altri due AEIKF, BHLMC habbiano l'angolo, negli eſtremi A, & B del lato commune AB; ſi tirino le rette FE,FH, HC, CE, le quali, perche ſottendono gli angoli EAF, FGH, HBC, CDE, degli



vguali pentagoni, che ſono baſi del Dodecaedro, perciò ſono frà di loro vguali. In oltre perche i lati DE, DC, GF, GH, ſono frà di loro vguali, e gli angoli in D, & G ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo
a 4. del 1. DEC [a] vguale all'angolo GFH, che detratti dagli vguali angoli DEA, GFA, reſta l'angolo HFA vguale all'angolo CEA: ma gli angoli AEF,
b 5. del 1. AFE [b] ſono frà di loro vguali (ſtante che le rette AE, AF ſono lati de i pentagoni vguali) tutto l'angolo dũque CEF ſarà vguale à tutto l'angolo HFE. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo FEC è vguale all'angolo HCE, e che l'angolo EFH è vguale all'angolo CHF: per la qual coſa i quattro angoli del quadrilatero FHCE ſono frà di loro vguali. E perche quattro angoli d'vn quadrilatero, per lo Scolio alla 32. del 1, ſono vguali à quattro angoli retti; eſſendo i quattro angoli del quadrilatero FHCE, fra di loro vguali, ogn' vno di quelli ſarà vn angolo retto, ed il quadrilatero FHCE ſarà quadrato. Si diuida AB [c] in due parti vguali in N, e dal punto N ne i piani de' pentagoni ABCDE, AFGHB, ſi tirino le rette NP, NO, [d] ad angoli retti col lato AB, Perche le rette EC, FH, che ſottendono gli angoli de' pentagoni, per lo Scolio alla propoſitione 8. del 13, ſono parallele al lato AB, eſſendo gli angoli PNA, ONA, per coſtruttione, retti; ſaranno gli angoli NPE, NOF retti. E perche le rette PN, ON ſono ne' piani de' pentagoni ABCDE, AFGHB, e fanno angoli retti colla commune ſettione AB, pereiò l'angolo ONP ſarà la quantità dell'inclinatione, che il piano ABCDE fà al piano AFGHB. Si tiri la retta OP, e ſi eſponga il pentagono QRSTV equilatero, equiangolo, ed vguale al pentagono ABCDE; dal che QR ſarà vguale al lato del Dodecaedro eſpoſto; ſi tiri
f 10. del 1. la retta VS, che ſarà vguale ad FE, ouero EC; ſi diuida QR [f] in due parti vguali in X, e ſi erigga la retta XY [g] perpendicolare alla retta QR; ſopra la retta VS ſi deſcriua il triangolo iſoſcele ZVS [h] in modo, che ciaſcun lato VZ, ZS, ſia vguale ad XY. Dico che l'angolo VZS è vguale all'angolo ONP dell'inclinatione. Si tirino le rette NE, NF, VX. Perche le rette AE, AF, VQ, ſono lati degli vguali pentagoni del Dodecaedro, perciò ſono frà di loro vguali. Similmente perche le rette AN, QX ſono metà degli vguali lati QR, AB, perciò ſono frà di loro vguali, ſi che ne i triangoli FAN, EAN, VQX, i due lati FA, AN, ouero EA, AN, ſono vguali à i due lati VQ, QX, gli angoli FAN, EAN, VQX, ſono frà
K 4. del 1. di loro vguali, ſaranno le baſi FN, EN, VX [K] frà di loro vguali, e gli angoli FNA, ENA, VXQ ſono frà di loro vguali, che detratti dagli an-



goli

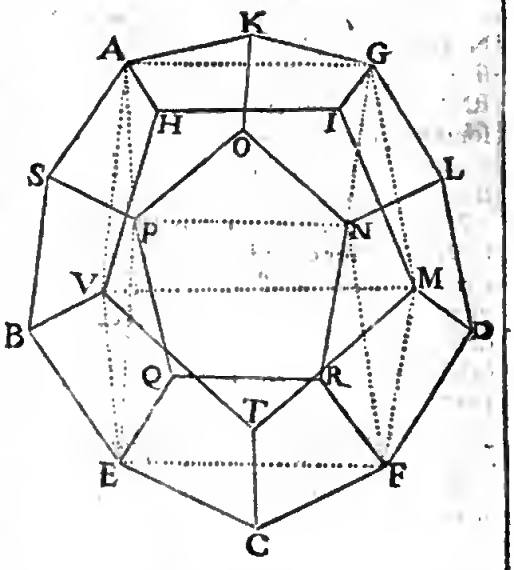
goli tetti ANO,ANP,QXY, restano gli angoli FNO, ENP, VXY frà di loro vguali. Si considetino i triãgoli FON,EPN, XYV. Perche gli angoli NOF,NPE,VYX, sono retti, e gli angoli FNO,ENP,VXY, per quel che si è dimostrato, sono frà loro vguali, i due angoli FNO, FON, ouero ENP,EPN, sono vguali à i due angoli VYX, VXY; i lati NF, NE, VX sono stati dimostrati vguali, saranno i due lati NO,OF, l ouero NP, PE, vguali à i due lati XY,YV; cioè il lato OF, ouero PE, vguale ad VY, ed il lato ON, ouero NP, vguale ad XY: ma per costruttione ciascun lato VZ, ZS è vguale ad XY, saranno i due lati VZ, ZS, vguali alle due rette ON,NP. Hor essendo EP vguale, e parallela ad FO, sarà FE m vguale, e parallela ad OP; fù dimostrata la retta FE vguale ad VS, sarà OP vguale alla retta VS: per la qual cosa l'angolo VZS n è vguale all'angolo dell'inclinatione ONP. Dico finalmente, che l'angolo VZS, ouero ONP, è ottuso. Dal punto B o si tiri la retta B&, parallela ad NO. Perche NB è parallela ad O&, il quadrilatero O&BN sarà parallelogrammo, dal che il lato B& p sarà vguale ad ON. Oltre à ciò perche le rette B&,ON sono patallele, sarà l'angolo B&H q esterno vguale all'angolo NO& interno, ed opposto: ma l'angolo NO& è retto, in conseguenza l'angolo B&H sarà retto. E perche i due angoli BH&, B&H r sono minori di due retti, perciò l'angolo B&H sarà maggiore dell'angolo BH&, e la retta BH s sarà maggiore di B&: ma B& è vguale ad ON, ouero NP, sarà la retta BH, ouero BC, maggiore di ON, ouero NP: ma le rette HB,BC,TV,TS, come lati de pentagoni vguali, ed equilateri, sono frà di loro vguali; e le rette ON, NP furono dimostrate vguali alle rette VZ,ZS; le rette dunque VT, TS saranno maggiori delle rette VZ, ZS, e per la 21. propositione del 1, l'angolo VZS è maggiore dell'angolo VTS: ma l'angolo VTS del pentagono, per lo Scolio alla 32. del 1, è maggiore del retto, perciò l'angolo VZS, ouero ONP, sarà molto maggiore d'vn' angolo retto. Per la qual cosa l'angolo dell'inclinatione di due contigue basi del Dodecaedro è ottuso, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

l 26. del 1.
m 33. del 1.
n 8. del 1.
o 31. del 1.
p 34. del 1.
q 29. del 1.
r 17. del 1.
s 19. del 1.

COROLLARIO I.

Dalle cose antedette, e da quel che si è dimostrato nella 17. propos. del 13, è manifesto il modo da iscriuere il Cubo nel Dodecaedro.

Sia per esempio è sposto il Dodecaedro ABCD, nel quale si habbia ad iscriuere il Cubo. Perche nella costruttione del Dodecaedro, seruendoci de' quadrati, che contengono il Cubo, in ciascun lato di quel Cubo si descriue il pentagono del Dodecaedro in modo, che ogni lato del Cubo sottende l'angolo del pentagono del Dodecaedro; se dunque nel Dodecaedro proposto per ogni pentagono si tirerà vna retta, che sottenda vn angolo di quel pentagono, sarà iscritto il cubo nel Dodecaedro; come per esempio. Nel pentagono AHIGK è tirata la retta AG, che sottende l'angolo AKG del detto pentagono; nel pentagono



GIMDL è tirata la retta GM, che ſottende l'ãgolo GIM; nel pentagono KGLNO è tirata la retta GN, che ſottende l'angolo GLN; nel pentagono OPQRN è tirata la retta PN, che ſottende l'angolo PON; nel pentagono SPOKA è tirata la retta AP, che ſottende l'angolo ASP; nel pentagono LNRFD è tirata la retta NF, che ſottende l'angolo NRF; e nel pentagono DMTCF è tirata la retta MF, che ſottende l'angolo MDF; ſimilmente nel pentagono FRQEC è tirata la retta EF, che ſottende l'angolo FCE; di più nel pentagono HVTMI è tirata la retta VM, che ſottende l'angolo VTM; nel pentagono EQPSB è tirata la retta EP, che ſottende l'angolo EQP; nel pentagono CTVBE è tirata la retta EV, che ſottende l'angolo EBV; e finalmente nel pentagono BVHAS è tirata la retta VA, che ſottende l'angolo VHA; e queſti dodici lati, che contengono i ſei quadrati APNG, GNFM, AGMV, APEV, PEFN, VEFM, formano il Cubo AEFG iſcritto nel propoſto Dodecaedro.

COROLLARIO II.

Quindi è manifeſto come nel dato Dodecaedro ſi iſcriue il Tetraedro, e l'Ottaedro.

Poiche ſe nel Dodecaedro ſi iſcriua prima il Cubo, e nel Cubo ſi iſcriua il Tetraedro, ouero l'Ottaedro, ſarà iſcritto il Tetraedro, e l'Ottaedro nel Dodecaedro.

COROLLARIO III.

Appare ancora il modo da iſcriuere il Cubo nell'Icoſaedro.

Il che ſi fà con iſcriuere prima il Dodecaedro nell' Icoſaedro, come fù inſegnato nella 5. prop. di queſto, e poi nel Dodecaedro ſi iſcriua il Cubo, come ſi è detto nel 1. Coroll, e ſarà iſcritto il Cubo nell'Icoſaedro.

CO-

COROLLARIO III.

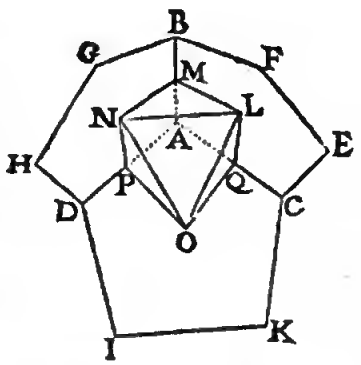
Si può ancora colla medeſim' arte iſcriuere il Tetraedro nell'Icoſaedro.

Il che ſi farà coll'iſcriuere prima il Cubo nell'Icoſaedro, e nel Cubo iſcriuere il Tetraedro, e ſarà iſcritto il Tetraedro nell'Icoſaedro.

COROLLARIO V.

Dalle coſe dette ſi caua ancora il modo da iſcriuere l'Icoſaedro nel Dodecaedro.

Sia eſpoſto l'angolo ſolido A contenuto dalli tre angoli BAC, BAD, DAC, de i tre pentagoni BACEF, BADHG, DACKI, che ſono baſi del Dodecaedro, e da i centri O, L, N, di quei tre pentagoni à i lati intorno all'angolo A ſi facciano cadere rette perpendicolari, cioè LQ a perpendicolare ad AC, la retta LM perpendicolare ad AB, le rette NM, NP perpendicolari à i lati AD, AB, e le rette OQ, OP perpendicolari à i lati AC, AD; ſi tirino le rette LN, NO, OL. Perche le rette OQ, QL, ſono perpendicolari alla commune ſettione AC, l'angolo LQO ſarà l'inclinatione del piano ACEFB al piano DACKI; e per ſimile ragione l'angolo LMN è l'inclinatione del piano BACEF al piano DABGH; e l'angolo NPO è l'inclinatione del piano DABGH al piano DACKI; è perche il Dodecaedro è contenuto da dodeci pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, gli angoli delle inclinationi ſono frà di loro vguali, e perciò gli angoli OQL, LMN, NPO, ſono frà di loro vguali. Similmente eſſendo i tre eſpoſti pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, le perpendicolari OQ, LQ, LM, MN, NP, PO, ſono frà di loro vguali. Hor ne i triangoli LQO, LMN, NPO, eſſendo i lati LQ, QO, LM, MN, NP, PO, frà di loro vguali, e gl'angoli OQL, LMN, NPO, frà di loro vguali ſaranno le baſi LN, NO, OL, b frà di loro vguali; dal che il triangolo LNO ſarà equilatero. Se quanto ſi è fatto intorno all'angolo ſolido A, ſi farà ancora intorno à gli altri vndici angoli ſolidi del Dodecaedro, ſara iſcritto l'Icoſaedro nel dodecaedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



a 12. del 1.

b 4. del 1.

AN-

ANNOTATIONE.

A queſti quindici Elementi Franceſco Fluſſa Candalla aggiunſe il decimoſeſto, nel quale compara ſcambieuolmente i corpi regolari iſcritti, à quelli ne' quali ſono iſcritti, e fà ancora varie comparationi de i lati de' medeſimi corpi frà loro; e perche il mio iſtituto è ſtato di ſpiegare qui ſolamente li quindici Elementi eſpoſti da Euclide come più neceſſarij; perciò ſi è tralaſciato tutto il di più aggiunto da altri Autori, e ſolo ſi è cercato reſtituire con chiara ſpiegatione quel che ne hà ſcritto il medeſimo Euclide, come ſtimiamo già adempito.

Fine del Decimoquinto, ed vltimo Elemento.

Aoi 1462401

intiero nella fabbrica